

۱. اگر f و g توابعی چندجمله‌ای باشند به طوری که $(f+g)(x) = 4$ و $(f \circ g)(x) = 7 - 4x$ ، حاصل جمع مقادیر ممکن برای $g(2)$ کدام است؟

۴ -۲

۳ -۳

۲ ۳

۱ ۲

پاسخ: گزینه ۱ چون $f \circ g$ از درجه اول است، پس f و g توابعی از درجه اول هستند. اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$ خواهیم داشت:

$$f(x) + g(x) = 4 \Rightarrow g(x) = 4 - ax - b$$

$$f(g(x)) = 7 - 4x \Rightarrow ag(x) + b = 7 - 4x \Rightarrow a(4 - ax - b) + b = 7 - 4x$$

$$\Rightarrow -a^2x + 4a - ab + b = 7 - 4x \Rightarrow \begin{cases} -a^2 = -4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ 4a - ab + b = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow g(x) = -2x + 3 \Rightarrow g(2) = -1 \\ a = -2 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow g(x) = 2x - 1 \Rightarrow g(2) = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2$$

۲. اگر $A = \frac{(4)^{0.75}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + 9^{0.25}$ باشد، حاصل $\log_A (\sqrt{2} - 1)$ کدام است؟

۴ - $\frac{1}{2}$

۳ -۱

۲ $\frac{1}{2}$

۱ ۱

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم: $\log_k a^n = n \log_k a$

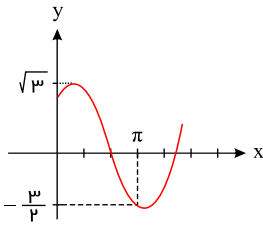
ابتدا عبارت A را خلاصه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2^2)^{\frac{3}{4}}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + (3^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt{3} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{6}}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} + \sqrt{3} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{6}}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(\sqrt{2} + 2)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

توجه کنید که $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ است. پس داریم:



$$\Rightarrow \log_A (\sqrt{2} - 1) = \log_{1+\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \log_{1+\sqrt{2}} (\sqrt{2} + 1)^{-1} = -1$$



۳. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$2 \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است.

$$Max = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{چون شکل فرمت خود سینوس است، } b > 0 \text{ است.}} b + a = \sqrt{3}$$

نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\left| \begin{array}{l} \pi \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2} b$$

$$\rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

$$-2 \left\{ \begin{array}{l} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{array} \right. \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

۴. اندازه دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه 60° درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$$72 \quad (4)$$

$$64 \quad (3)$$

$$54 \quad (2)$$

$$48 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بینشان به دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2}(12)(8\sqrt{3})(\sin 60^\circ) = (48\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 24 \times 3 = 72$$

۵. در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ، کدام است؟

$$15 \quad (4)$$

$$12 \quad (3)$$

$$-18 \quad (2)$$

$$-21 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

مشخص است که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$ می‌باشد. بنابراین، کافی است از تابع مشتق گرفته و به جای x آن عدد ۲ را قرار



دهیم.

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3 \rightarrow f'(x) = 3 \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^2 \left(\frac{\frac{1(2x-3) - 2(x+2)}{(2x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right) \left(\frac{-7}{(2x-3)^2} \right) \rightarrow f'(2) = \frac{3}{2} (2) (-7) = -21$$

۶. اگر $\log 5 = 3k$ باشد، $\log \sqrt[3]{1.6}$ کدام است؟

۱ - k ☐ ۴

۱ - ۲k ☐ ۳

۲ - ۵k ☐ ۲

۱ - ۴k ☐ ۱

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$, $\log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b$, $\log 5 = 1 - \log 2$

$$\log \sqrt[3]{1.6} = \log(1.6)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 1.6 = \frac{1}{3} \log \frac{16}{10}$$

$$= \frac{1}{3} (\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1) = \frac{1}{3} (4(1 - \log 5) - 1) = \frac{1}{3} (3 - 4 \log 5)$$

$$= \frac{1}{3} (3 - 12k) = \frac{1}{3} (3(1 - 4k)) = 1 - 4k$$

۷. اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

-۴ ☐ ۴

-۳ ☐ ۳

۱ ☐ ۲

۵ ☐ ۱

پاسخ: گزینه ۱

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha, \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha, \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

صورت و مخرج را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$



۸. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}}$ ، کدام است؟

۲۴ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3-x}})}{(4 - 2 - \sqrt{3-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(1)(4)(2 + \sqrt{3-x})}{(2 - \sqrt{3-x})(2 + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(1)(4)(4)}{(4 - 3 + x)} = 16 \end{aligned}$$

روش دوم: با استفاده از هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3-x}}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x + 5}{-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

۹. نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

(۲, ۶) (۴)

(۳, ۵) (۳)

(۲, ۵) (۲)

(۳, ۴) (۱)

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به جای x عبارت $x - 3$ و برای اینکه به طرف y های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد ۲- اضافه شود؛ بنابراین داریم:

$$y = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x-3) \cdot (x-4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

۱۰. حاصل عبارت $\sin(\frac{17\pi}{3}) \cos(\frac{-17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4}) \sin(\frac{-11\pi}{6})$ ، کدام است؟

 $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی داده‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin(6\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{-\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\frac{-17\pi}{6}) = \cos \frac{17\pi}{6} = \cos(3\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\tan \frac{19\pi}{4} = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = -\sin \frac{11\pi}{6} = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

بنابراین خواسته سؤال به صورت زیر است:

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۱۱. حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ ، کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad \boxed{4}$$

$$2\sqrt{2} \quad \boxed{3}$$

$$\sqrt{6} \quad \boxed{2}$$

$$2 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ می دانیم:

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\frac{1}{16}} = \frac{1 - \sin 30^\circ}{\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}} = 8$$

$$\rightarrow A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۱۲. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

$$2 \quad \boxed{4}$$

$$1 \quad \boxed{3}$$

$$-1 \quad \boxed{2}$$

$$-2 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ روش اول: با ضرب کسر در مزدوج صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} \times \frac{x + \sqrt{3x-2}}{x + \sqrt{3x-2}} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(ax+b)(x + \sqrt{3x-2})}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{a(x + \frac{b}{a})(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{1}{2}$$

با توجه به موجود بودن حد و اینکه عددی مخالف صفر است، نتیجه می گیریم که عدد ۲ ریشه مخرج نیز می باشد.

$$x-2 = x + \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{a(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{a(4)} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{0}{2a+b} \quad \begin{array}{l} \text{چون جواب حد، برابر عدد شده است پس این کسر حتما} \\ \text{شده که پس از رفع ابهام جوابش} \end{array} \rightarrow 2a+b=0 \rightarrow b=-2a$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1(3)}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{2a+b=0} 1+b=0 \rightarrow b=-1$$

۱۳. اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = \sqrt{2x}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x}$ برابر با کدام گزینه است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

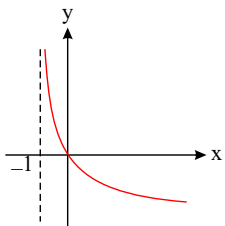
۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \times g)(2 + \Delta x) - (f \times g)(2)}{\Delta x} = (f \times g)'(2)$$

حاصل عبارت، تعریف مشتق $f(x) \times g(x)$ در نقطه $x_0 = 2$ است. یعنی مشتق اولی در دومی به اضافه ی مشتق دومی در اولی.

$$y' = (2x - 1)\sqrt{2x} + \frac{2}{2\sqrt{2x}}(x^2 - x) \Rightarrow y'(2) = (2(2) - 1)\sqrt{4} + \frac{2}{2\sqrt{4}}(4 - 2) = 6 + 1 = 7$$

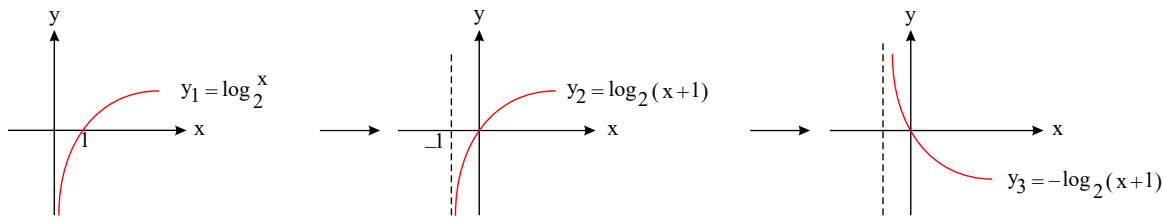


۱۴. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = \log_2^{U(x)}$ است. $U(x)$ کدام است؟

 $(x + 1)^{-1}$ (۲) $x + 1$ (۱) $1 - x$ (۴) $x - 1$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲ روش اول:

نمودار تابع داده شده $y = \log_2^x$ است که یک واحد به سمت چپ برده شده و سپس نسبت به محور x ها قرینه شده است.



$$\text{پس: } y = -\log_2^{(x+1)} \rightarrow y = \log_2^{(x+1)^{-1}} \rightarrow U(x) = (x + 1)^{-1}$$

روش دوم:

با توجه به شکل، دامنه تابع داده شده $x > -1$ است بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند. با توجه به شکل وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ نمودار تابع به سمت $+\infty$ می‌رود.

$$\text{گزینه اول: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_2(x + 1) = \log_2 0^+ = -\infty \text{ : نادرست}$$

$$\text{گزینه دوم: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_2 \frac{1}{x + 1} = \log_2 \frac{1}{0^+} = \log_2(+\infty) = +\infty \text{ : درست}$$



توجه کنید اگر $a > 1$ باشد $\log_a^+ = +\infty$ و $\log_a^- = -\infty$ است.

۱۵. اگر $a = \log_3^b$ ، آن گاه معادله $3^{x-a} = 2^{x^2}$ فقط یک جواب دارد. b کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{۳}$$

$$3 \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a, \quad \log_k^a = \frac{1}{\log_k^a}$$

می دانیم:

$$3^{x-a} = 2^{x^2} \xrightarrow{\text{از دو طرف در مبنای سه لگاریتم می گیریم}} \log_3^{3^{x-a}} = \log_3^{2^{x^2}}$$

$$\rightarrow x - a = x^2 \log_3^2 \rightarrow (\log_3^2)x^2 - x + a = 0$$

چون گفته شده این معادله درجه ی دوم دارای یک ریشه است پس $\Delta = 0$ می باشد:

$$\Delta = 0 \rightarrow 1 - 4a \log_3^2 = 0 \rightarrow 4a \log_3^2 = 1$$

$$\rightarrow a \log_3^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{\frac{1}{4}}{\log_3^2} = \frac{1}{4} \log_3^3 = \log_3^3 = \frac{1}{2} \log_3^3 = \log_3^{\sqrt{3}}$$

$$a = \log_3^b \rightarrow \log_3^{\sqrt{3}} = \log_3^b \rightarrow b = \sqrt{3}$$

۱۶. در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax+b & ; x \leq 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است. b کدام است؟

$$\frac{10}{3} \quad \text{۴}$$

$$\frac{8}{3} \quad \text{۳}$$

$$\frac{7}{3} \quad \text{۲}$$

$$\frac{4}{3} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴ چون $f'(1)$ موجود است، لذا f در $x=1$ پیوسته است و مشتق چپ و راست f در $x=1$ با هم برابرند، پس داریم:

$$\text{شرط پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{(2x+6)^2} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b \\ f(1) = a+b \end{cases} \Rightarrow a+b=4 \quad (*)$$

$$\left. \begin{aligned} x > 1 : f(x) = \sqrt[3]{(2x+6)^2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{2(2)}{3\sqrt[3]{2x+6}} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{4}{3(2)} = \frac{2}{3} \\ x < 1 : f(x) = ax+b &\Rightarrow f'(x) = a \Rightarrow f'_-(1) = a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{10}{3}$$

۱۷. در تابع $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ ، کدام است؟

$$2 \quad \text{۴}$$

$$4 \quad \text{۳}$$

$$3 \quad \text{۲}$$

$$5 \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ وقتی $x \rightarrow 1^+$ میل می کند، داخل قدرمطلق، مثبت است و وقتی $x \rightarrow 1^-$ میل می کند، داخل قدرمطلق، منفی است.



$$x \rightarrow 1^+ : f(x) = x\sqrt{x} + x - 1 = x^{\frac{3}{2}} + x - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1 \Rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$x \rightarrow 1^- : f(x) = x\sqrt{x} - x + 1 = x^{\frac{3}{2}} - x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow f'_-(1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{2} = 4$$

۱۸. خط به معادله $y = 3x - 5$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد،

$(fog)'(2)$ کدام است؟

۴ [۴]

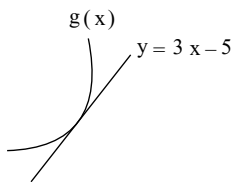
۳ [۳]

۲ [۲]

۱ [۱]

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم که $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ و $(fog(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$ است.



$$\Rightarrow g(2) = 1, \text{ شیب خط مماس } = 3 \Rightarrow g'(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x - 1)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow (fog)'(2) = g'(2) \cdot f'(g(2)) = 3f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

۱۹. اگر $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})$ باشد، مقدار $f'(0)$ کدام است؟

2^n [۴]

۱ [۳]

صفر [۲]

-۱ [۱]

پاسخ: گزینه ۳

عبارت داده شده را در $1 - x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}) = \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{(1-x^{2^n})(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x} = \frac{(1-x^{2^n})(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})}{1-x}$$

با ادامه این روند داریم:

$$f(x) = \frac{1 - (x^{2^n})^2}{1-x} = \frac{1 - x^{2^n \times 2}}{1-x} = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x}$$



$$f'(x) = \frac{-2^{n+1} \times x^{2^{n+1}-1}(1-x) - (-1)(1-x^{2^{n+1}})}{(1-x)^2}$$

$$f'(0) = \frac{0 + (1-0)}{1} = 1$$

۲۰. اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ ، کدام است؟

۳ (۴)

۲٫۵ (۳)

۲ (۲)

۱٫۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آنگاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(8) = g^{-1}(f^{-1}(8))$$

برای محاسبه $f^{-1}(8)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$8 = \frac{2}{5}x - 4 \rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \rightarrow 2x = 60 \rightarrow x = 30$$

$$\text{پس: } g^{-1}(f^{-1}(8)) = g^{-1}(30)$$

برای محاسبه $g^{-1}(30)$ بدین صورت عمل می‌نماییم.

$$30 = x^3 + x \rightarrow x = 3$$