

درس اول : مجموعه ها

	مجموعه های مهم
اعداد طبیعی	$N = \{1, 2, 3, \dots\}$
اعداد حسابی	$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
اعداد صحیح	$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
اعداد گویا	$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$
اعداد گنگ	$\dot{Q} = \{x \mid x \text{ گویا نیست}\}$
اعداد حقیقی	$R = Q \cup \dot{Q}$

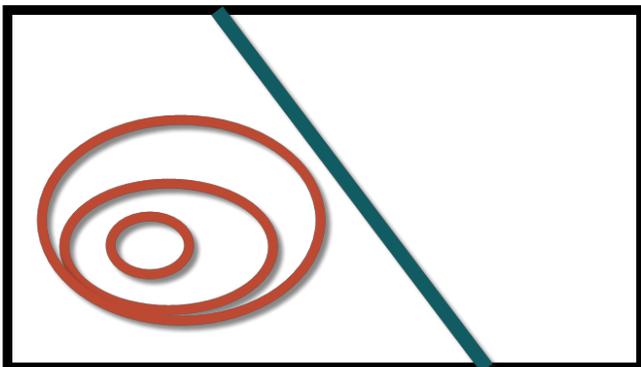
در مورد مجموعه های بالا رابطه ریاضی مقابل برقرار است . $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

مثال ۱ هر عدد حقیقی دارای جایی روی محور است و هر نقطه روی محور متناظر یک عدد حقیقی است

با توجه به رابطه بین زیر مجموعه های نامی اعداد حقیقی نام هر یک را در نمودار در مکان مناسب بنویسید .

سپس اعداد $-\frac{12}{3}$ و $\sqrt{1-\sqrt{3}}$ و 3000 و $\sqrt{2}^6$ و $\frac{\pi}{3}$

و $\frac{8}{7602}$ و $\frac{5}{7}$ در ناحیه مناسب شکل بنویسید .



اعمال روی اعداد گویا و گنگ							
y^x	x^y	$\frac{y}{x}$	$\frac{x}{y}$	xy	$x - y$	$x + y$	
							x و y گویا
							x و y گنگ
							x گویا و y گنگ
							x گنگ و y گویا

مثال ۲) با تفکر در باره ماهیت اعداد درستی یا نادرستی هر کدام از گزاره های زیر را مشخص کنید :

الف) حاصل جمع هر دو عدد گنگ عددی گنگ است .

ب) ۱۰ عدد گنگ وجود دارد که بین دو عدد گویای $\frac{1}{3}$ و ۱ واقعند .

پ) عددی که از ضرب دو عدد گنگ حاصل می شود ممکن است گویا باشد

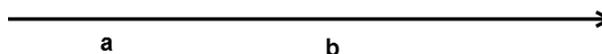
بازه ها

دسته ای دیگر از زیر مجموعه های پر کاربرد مجموعه اعداد حقیقی بازه ها هستند.

وقتی صحبت بازه می کنیم منظور انتخاب یک تکه از محور است.

فرض کنیم a و b اعداد حقیقی باشند و $a < b$ در این صورت نمایش آنها روی محور به صورت زیر است.

سمت چپ a ، بین a و b یا سمت راست b که می توانند شامل خود این دو عدد باشند یا نباشند



بازه	نمایش محوری	زبان ریاضی	تفسیر فارسی
(a, b)			
$[a, b]$			
$[a, b)$			
$[a, b]$			
$(b, +\infty)$			
$[b, +\infty)$			
$(-\infty, a]$			
$(-\infty, a)$			

مثال ۳ به صورت بازه بنویسید .

الف (اعداد حقیقی کوچکتر از ۳

ب (اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی ۳

پ (اعداد حقیقی بین ۰ و $\frac{1}{4}$

پ (اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی -1 و کوچکتر از $\sqrt{5}$

نکته ۱ در بازه ی (a, b) اعداد a و b عضو نیستند ولی هر عدد بین این دو در بازه هست



مثال ۴ اگر $A = (-2, \frac{1}{3})$ درستی یا نادرستی هر گزاره را معلوم کنید .

$$-\sqrt{2} \in A \quad \frac{1}{800} \in A \quad \frac{3}{5} \notin A \quad -2 \in A$$

نکته ۲: در بازه (a, b) عدد..... از دو سر بازه به یک فاصله است .

مثال ۵ در بازه $(1, 17)$ عدد وسط بازه است

مثال ۶ به ازای چه مقدار k عدد 4 مرکز بازه $(2, 3k + 1)$ است ؟

اعمال روی بازه ها

اگر A و B دو بازه دلخواه باشند اعمال زیر روی آنها قابل انجام است ؟

$A \cup B$ بازه ای متشکل از تمام اعضای دو مجموعه است .

$A \cap B$ بازه ای شامل اعضای است که به هر دو بازه تعلق دارند است .

$A - B$ بازه ای شامل تمام اعضای A است که در B قرار ندارند (اعضای اختصاصی A)

مثال ۷ اگر $A = (0, 6)$ و $B = [-1, 5]$ باشند در اینصورت بازه های زیر را مشخص کنید :

$B - A =$	$A - B =$
$A \cap B =$	$A \cup B =$



نکته ۳: اشتراک دو بازه $(-\infty, a]$ و $[b, +\infty)$ زمانی تنها شامل یک عضو است که

مثال ۸ به ازای چه مقدار t مجموعه $(-\infty, \frac{2t+1}{3}] \cap [t-2, +\infty)$ دارای یک عضو است ؟

مثال ۹ اگر $[-1, 2) \cap [-a, 7) = [a, 2)$ باشد مقدار a چند است ؟

۳ (۴

۲ (۳

۱ (۲

۰ (۱

تمرین ۱) هر عدد را به بازه های که تعلق دارد وصل کنید .

2	$1/7602$	-2×3^{25}	$\frac{1}{400}$	عدد
$[0, \frac{5}{2})$	$[-3, +\infty)$	$(-2, -1)$	$(-\infty, \frac{1}{2})$	بازه

تمرین ۲) a عددی حقیقی است و عددهای صفر و a^3 به بازه $(a, +\infty)$ تعلق دارند ثابت کنید $a \in (-1, 0)$ است .

مجموعه های منتهای و نامتناهی

مجموعه منتهای : مجموعه ای است که تعداد اعضایش قابل بیان با یک عددی حسابی است . مجموعه ای که منتهای نباشد نامتناهی نامیده می شود .

مثال ۱۰) مجموعه های منتهای و نامتناهی را مشخص کنید .

الف) مجموعه اعداد طبیعی زوج کوچکتر از 10^{21} و بزرگتر 10^9

ب) مجموعه اعداد اول ۵ رقمی

پ) مجموعه دانش آموزان پایه دهم کشور در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

ت) مجموعه درختان بلوط رشته کوههای زاگرس



مثال (۱۱) مجموعه های متناهی و نامتناهی را مشخص کنید .

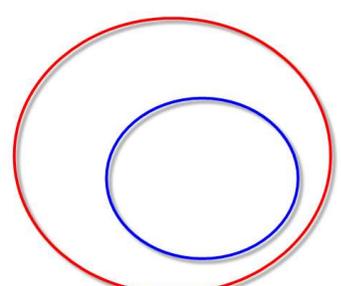
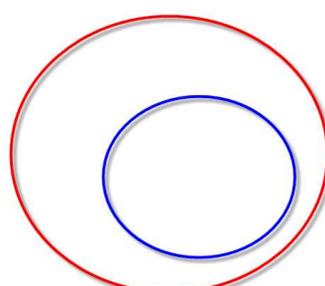
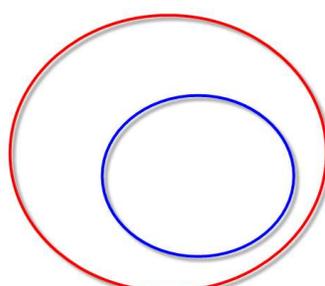
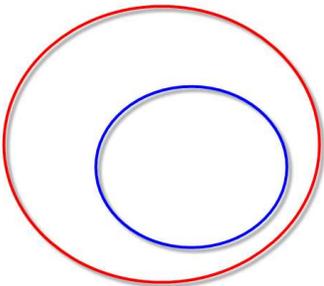
الف) اعداد طبیعی بین ۲ و ۱۰

ب) اعداد گویای بین صفر و یک

پ) کسر های منفی که صورت از مخرج یک واحد کوچکتر باشد

اعمال روی متناهی و نامتناهی				
$B - A$	$A - B$	$A \cap B$	$A \cup B$	
				A و B متناهی
				A و B نامتناهی
				B متناهی و A نامتناهی
				B نامتناهی و A متناهی

نکته (۴) هرگاه مجموعه ای دارای زیر مجموعه باشد خودش است



مثال (۱۲) مجموعه های \mathbb{W} ، \mathbb{Z} ، \mathbb{Q} ، \mathbb{R} نامتناهی هستند زیرا که زیر مجموعه آنهاست و

نامتناهی است .

تمرین ۳) چرا مجموعه (0 و 1) نا متناهی است؟

تمرین ۴) درستی یا نادرستی هر گزاره را معلوم کنید:

الف) مجموعه اعداد گنگ نا متناهی است.

ب) هر زیر مجموعه یک مجموعه نا متناهی، نا متناهی است.

پ) هر زیر مجموعه یک مجموعه متناهی، متناهی است.

ت) اگر مجموعه ای دارای یک زیر مجموعه متناهی باشد خودش ممکن است متناهی یا نا متناهی باشد.

ث) اگر $A - B$ نا متناهی باشد $B - A$ هم نامتناهی است.

ج) اگر $A \cap B$ متناهی باشد A و B هر دو متناهی است.

تمرین ۵) در هر مورد دو مجموعه A و B بنویسید که گزاره زیر در باره آنها درست باشد:

الف) A و B نامتناهی باشند و $A - B$ متناهی باشد

ب) A و B نامتناهی باشند و $A - B$ نا متناهی باشد

تمرین ۶) یک مجموعه نا متناهی بنویسید که بزرگترین عضو داشته باشد.

تمرین ۷) یک مجموعه نا متناهی بنویسید که کوچکترین عضو داشته باشد

تمرین ۸) یک مجموعه نامتناهی بنویسید که هم بزرگترین عضو داشته باشد و هم کوچکترین عضو

تمرین ۹) کدام یک از مجموعه های زیر نامتناهی است و کدام یک متناهی؟

الف) مجموعه کسر های مثبت با مخرج ۷ .

ب) مجموعه مستطیل هایی که مساحت آنها ۲۴ سانتی متر مربع است .

پ) مجموعه نقاطی از صفحه که از دو سر پاره خطی معلوم به یک فاصله اند .

ت) مجموعه اعداد اول ۵۰ رقمی .

ث) مجموعه عددهای گویای کمتر از ۱ که صورت آنها ۱ است .



ث) مجموعه عددهای حسابی کوچکتر از $10^{9166817602}$

تمرین ۱۰) اگر عدد ۱ به بازه ی $(4a + 5)$ و $[2a - 3]$ تعلق داشته باشد بزرگترین بازه ای که a به آن تعلق دارد را بیابید .

تمرین (۱۱) در مورد دو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{24}{x} \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{x \in \mathbb{W} \mid \frac{x}{2} \leq 3\}$ کدام گزینه درست است؟

الف) A مجموعه ای متناهی و B مجموعه ای نامتناهی است.

ب) A مجموعه ای نامتناهی و B مجموعه ای متناهی است.

پ) A و B مجموعه هایی متناهی هستند.

پ) A و B مجموعه هایی نامتناهی هستند.

تمرین (۱۲) چند تا از مجموعه های زیر نامتناهی است؟

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid (-1)^n = 1\} \quad \{x \in \mathbb{Z} \mid 3^{x+6} = 10^{x+6}\}$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 0/31 < \frac{n+1}{n+2} < 1\} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 > 4n\}$$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

نکته ۵) اگر A و B دو بازه دلخواه باشند به طوری که $A = (-\infty, a]$ و $B = [b, +\infty)$ در این صورت $A \cup B$ در صورتی کل اعداد حقیقی می شود که.....



مثال (۱۳) اگر اجتماع دو بازه $(-\infty, -5]$ و $(\frac{3a+2}{2}, +\infty)$ کل اعداد حقیقی شود

حدود a را بیابید.

تعریف مجموعه مرجع : در هر بحث مجموعه ای که همه مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه آن هستند مجموعه مرجع می نامند و آن را با حرف U نمایش می دهند .

تعریف متمم یک مجموعه :

اگر U مجموعه مرجع و $A \subseteq U$ مجموعه $U - A$ را متمم A می نامند و با \bar{A} نمایش می دهند .

مثال ۱۴) برای مجموعه A اعداد اول کوچکتر از ۱۰ مرجع می تواند یکی از مجموعه های زیر باشد. با توجه به هر مرجع متمم مجموعه A را بنویسید .

الف) اعداد طبیعی زیر ۱۰

ب) مجموعه اعداد طبیعی

پ) مجموعه اعداد صحیح

ت) مجموعه اعداد حقیقی

مثال ۱۵) اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A = \{2, 3\}$ در اینصورت متمم A را بیابید .

قوانین متمم گیری و مجموعه ها

 برای هر دو مجموعه A و B و مجموعه مرجع U

$\emptyset' = U$	$U' = \emptyset$	اگر $A \subseteq B$ آن گاه $B' \subseteq A'$	
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	$(A')' = A$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$ دموگان	
$A \cup U = U$	$A \cap U = A$	$A \cap A' = \emptyset$	$A \cup A' = U$
اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ در اینصورت $A = B$ و برعکس	$(A \cap B) \subseteq A$ $(A \cap B) \subseteq B$	$A \subseteq (A \cup B)$ $B \subseteq (A \cup B)$	
$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$			
$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$			جذب

 مثال ۱۶) اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A = \{2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 5\}$

 مجموعه $(A \cap B)'$ را بنویسید و ثابت کنید با $A' \cup B'$ برابر است.

تمرین ۱۲) اگر \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد کدام گزینه زیر درست است؟

(۱) $N' \subseteq W' \subseteq Z' \subseteq Q'$ (۲) $Z' \subseteq W' \subseteq N' \subseteq Q$

(۳) $N' \subseteq W' \subseteq Z' \subseteq Q$ (۴) $Q' \subseteq Z' \subseteq W' \subseteq N'$

تمرین ۱۳) طرف دوم تساوی زیر، کدام است؟

$$[(R - Q') \cup Z] - (Q \cup Z)'$$

(۱) Q (۲) Q' (۳) \emptyset (۴) R

تمرین ۱۴) اشتراک دوبازه $(b, 5]$ و $(-\infty, 2a)$ برابر $(-2, 2)$ است. حاصل

کدام است؟ $[2a + 1, -3b) \cup \left(\frac{a^2}{2} + 2a, 7\right)$

(۱) $[3, 7)$ (۲) $(3, 7]$ (۳) $[2, 5)$ (۴) $(2, 5]$

تمرین ۱۵) کدام مجموعه را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم تا N' یک مجموعه متناهی باشد؟

(۱) Q (۲) Z (۳) $W \cap Q$ (۴) R

تمرین ۱۶) اگر $U = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ مجموعه مرجع و $A = \{x \in U | x \geq 8\}$ و $B = \{x \in U | x < 4\}$ باشد آن گاه حاصل $(A \cup B)'$ کدام است؟

- (۱) $\{5, 6\}$ (۲) $\{3, 4, 5, 6\}$ (۳) $\{4, 5, 6, 8\}$ (۴) $\{4, 5, 6\}$

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند آن گاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

یعنی: تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه متناهی برابر است با تعداد اعضای مجموعه اول به اضافه تعداد اعضای مجموعه دوم منهای تعداد اعضای مشترک بین هر دو

اگر دو مجموعه ناتهی و متناهی A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند آنها را مجزا یا جدا از هم می نامند.

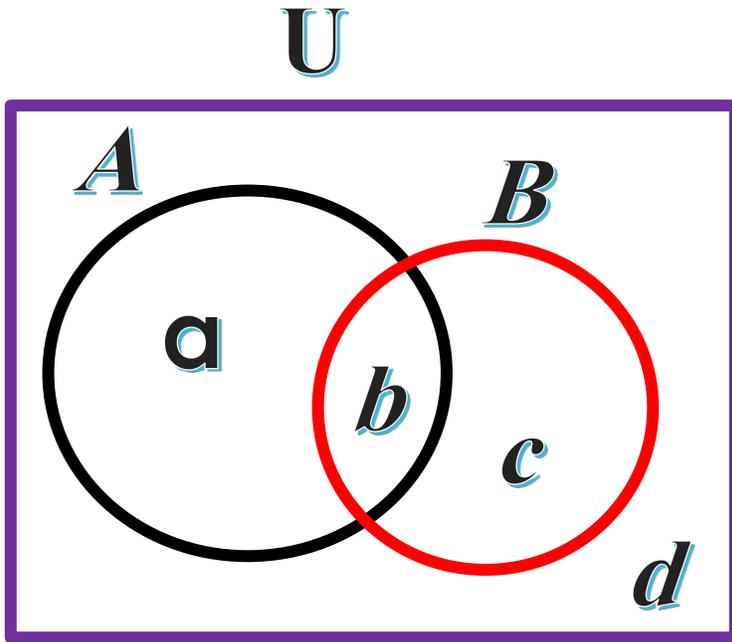
در این حالت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

مثال ۱۷) در یک کلاس ۳۴ نفره ۲۲ نفر در فعالیت های فرهنگی و ۱۸ نفر در فعالیت های ورزشی ثبت نام کرده اند چند نفر در هر دو فعالیت ثبت نام کرده اند؟

مثال ۱۸) ۱۲ جعبه داریم که در ۶ تا از آن مداد وجود دارد و در ۴ تا خودکار و در ۲ جعبه هم مداد وجود دارد هم خودکار در چند جعبه نه مداد وجود دارد نه خودکار؟

مثال ۱۹) در بررسی نمرات درسی ۶۳ دانش آموز مشخص شده تعداد کسانی که در درس فیزیک مشکل دارند و تعداد کسانی که در درس شیمی مشکل دارند به ترتیب ۵ برابر و ۴ برابر تعداد کسانی است که در هر دو درس مشکل دارند. اگر تعداد کسانی که در هر دو درس مشکل دارند با تعداد کسانی که در هیچ یک از این دو درس مشکل ندارند برابر باشد تعداد کسانی که فقط در فیزیک مشکل دارند چند نفر است؟



طبقه بندی خواسته سئوال

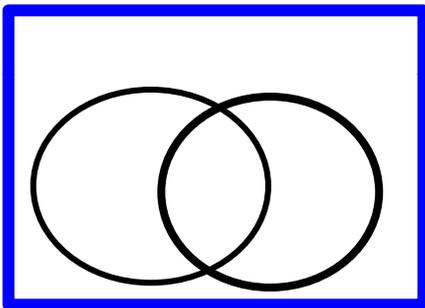
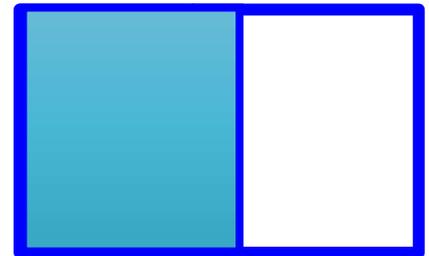
	روش محاسبه	کلمه کلیدی
$n(A - B)$	a	فقط دارای خاصیت A
	c	فقط دارای خاصیت B
	$a + c$	فقط دارای یک خاصیت
	b	هر دو خاصیت A و B
	d	بی خاصیت
	$a + b + c$	حداقل یکی از دو خاصیت A یا B را داشته باشد
	$a + c + d$	حداکثر یکی از دو خاصیت A یا B را داشته باشد

مثال ۲۰ در یک کلاس ۳۲ نفری ۲۰ نفر عضو تیم فوتبال و ۲۱ نفر عضو تیم والیبال هستند اگر ۱۲ نفر به هر دو تیم تعلق داشته باشند پاسخ موارد زیر را بنویسید :

- الف) چند نفر فقط عضو یک تیم هستند ؟
 ب) چند نفر عضو هیچ یک از دو تیم نیستند ؟
 پ) چند نفر حداکثر عضو یک تیم هستند ؟
 ت) چند نفر فقط عضو تیم والیبال هستند ؟

تمرین ۱۷ فرض کنید A زیر مجموعه ای از مجموعه مرجع متناهی U باشد در این صورت ثابت کنید

$$n(A') = n(U) - n(A)$$



تمرین ۱۸ برای هر دو مجموعه A و B ثابت کنید :

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \quad \text{الف)}$$

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \quad \text{ب)}$$

مثال (۲۱) در شرایط زیر $n(A)$ را محاسبه کنید :

$$n(A \cup B)' = 6 \text{ و } n(A \cup B) = 60 \text{ و } n(B - A) = 30 \text{ و } n(A - B) = 13$$

تمرین (۱۹) اگر $n(A) = 4x$ و $n(A \cap B) = \frac{x}{2}$ و $n(B) = x$ و $n(A \cup B) = 45$

در این صورت $n(A \cap B)$ را محاسبه کنید

تمرین (۲۰) در بررسی نمرات درسی ۱۰۰ دانش آموز مشخص شده ۵۸ نفر در درس ریاضی و ۶۳ نفر در درس فیزیک ضعیف هستند اگر ۶ نفر داشته باشیم که در هیچ یک از این دو درس مشکل ندارند چند نفر فقط در یک درس مشکل دارند؟

تمرین (۲۱) اگر $n(A) = 25$ و $n(B) = 15$ و $n(A \cap B) = 3$ باشد، آن گاه تعداد اعضای مجموعه

مرجع کدام باشد تا فقط ۷ عضو داشته باشیم که نه عضو A باشند و نه عضو B ؟

(۱) ۴۲ (۲) ۴۳ (۳) ۴۴ (۴) ۴۵

تمرین ۲۲ در یک مدرسه ۶ نفر فقط در درس شیمی و ۱۸ نفر فقط در درس ریاضی قبول شده اند و ۱۵ نفر در هیچ یک از این دو درس قبول نشده اند. اگر تعداد قبولی ها در درس شیمی نصف تعداد قبولی ها در درس ریاضی باشد، تعداد دانش آموزان مدرسه کدام است؟

۱۸(۴ ۷۲(۳ ۴۵(۲ ۳۳(۱)

تمرین ۲۳ اگر U مجموعه مرجع، $n(U) = 120$ ، $n(A - B) = 50$ و $n(B - A) = 30$ باشد، آن گاه متمم مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ چند عضو دارد؟

۳۰(۴ ۴۰(۳ ۵۰(۲ ۶۰(۱)

تمرین ۲۴ اگر A و B دو مجموعه مجزا، $n(A \cup B) = 35$ و $n(A - B) = 8$ باشد، آن گاه تعداد اعضای که فقط عضو مجموعه B می باشند، چند تا هستند؟

۳۰(۴ ۴۰(۳ ۵۰(۲ ۶۰(۱)

تمرین ۲۵ اگر ۶۰ درصد دانش آموزان یک کلاس عضو تیم فوتبال و ۵۰ درصد عضو تیم والیبال باشند و ۱۰ درصد نیز در هیچ یک از دو تیم نباشند، چند درصد حداکثر در یکی از این دو تیم حضور دارند؟

۸۰(۴ ۷۵(۳ ۳۵(۲ ۳۰(۱)

تمرین ۲۶ در یک کلاس ۲۵ نفری ، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند . اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند ، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند .

تمرین ۲۷ اگر دو مجموعه $A = [3n - 1, 5n - 2]$ و $B = [3, 5]$ جدا از هم باشند n چند مقدار طبیعی را نمی تواند اختیار کند ؟

۱(۴) ۲(۳) ۳(۲) ۴(۱)

تمرین ۲۸ اگر $A \subseteq B$ و B متناهی باشد چند تا از مجموعه های زیر قطعا متناهی است ؟

$A' \cup B$ $A - B$ B' A'
 ۳(۴) ۲(۳) ۱(۲) ۱(صفر)

موفقیت هایی که نصیب افراد صبور می شود،
 همان هایی هستند که توسط افراد عجول رها شده اند
 آلبرت اینشتین