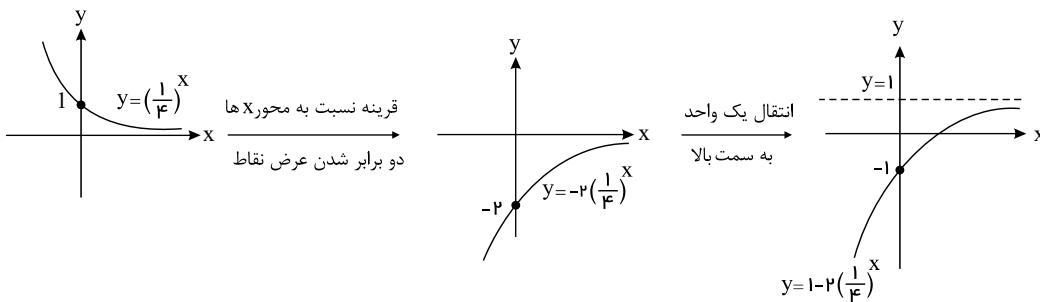


۱. نمودار تابع $f(x) = 1 - 2^{1-2x}$ از کدام نواحی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

- ۱ فقط دوم ۲ فقط اول اول و دوم ۴ سوم و چهارم

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = 1 - 2^{1-2x} = 1 - (2^1 \times 2^{-2x}) = 1 - 2\left(\frac{1}{2^2}\right)^x \rightarrow f(x) = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^x$$



نمودار تابع از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

۲. اگر $\log_5^3 = a$ باشد حاصل $\log_{25}^{\sqrt{3}}$ چقدر است؟

- ۱ $-\frac{a}{4}$ ۲ $-a$ ۳ $-\frac{a}{2}$ ۴ $\frac{a}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

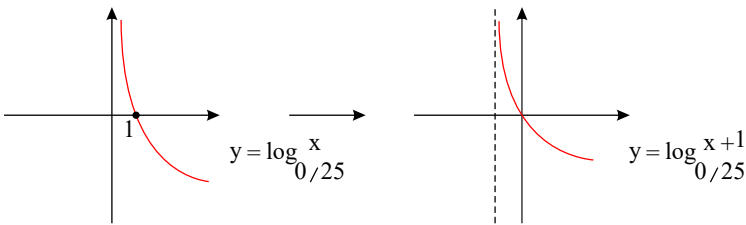
می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log_{25}^{\sqrt{3}} = \log_{5^2}^{\frac{1}{2}} = \log_{5^2}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \log_5^3 = -\frac{1}{4} a$$

۳. نمودار $y = \log_{25}^{(x+1)}$ به کدام صورت است؟



پاسخ: گزینه ۳ از انتقال نمودار $y = \log_{25}^x$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ محور x ، نمودار $y = \log_{25}^{x+1}$ حاصل می‌شود.



۴. اگر $\log_5^3 = a$ باشد حاصل $\log_{\sqrt{25}}^3$ کدام است؟

$$a^2 \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{1}{4}a$$

$$\sqrt{a} \quad \boxed{۲}$$

$$-a \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_{\sqrt{25}}^3 = \log_5^{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_5^3 = \frac{1}{2} a$$

۵. حاصل $2^{\log_8 x}$ کدام است؟

$$x^3 \quad \boxed{۴}$$

$$\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[3]{x^2} \quad \boxed{۲}$$

$$x^2 \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$a^{\log_b^x} = x^{\log_b^a}, \log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$2^{\log_8 x} = x^{\log_8^2} = x^{\log_{2^3}^2} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

۶. اگر $\log_{343}^{7^x} = x + 1$ آن گاه حاصل عبارت $(x + 2)^{12}$ کدام است؟

$$\frac{1}{8192} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{1}{2048}$$

$$\frac{1}{4096} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{1}{1024} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ باتوجه به تعریف لگاریتم می توان نوشت:

$$\log_{343}^{7^x} = x + 1 \rightarrow 7^x = 343^{x+1} \rightarrow 7^x = (7^3)^{x+1}$$

$$\rightarrow 7^x = 7^{3x+3} \rightarrow 3x + 3 = x \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$(x + 2)^{12} \stackrel{x = -\frac{3}{2}}{=} \frac{1}{4096}$$

۷. انرژی آزاد شده زلزله ای ۶ ریشتر در واحد ارگ (Erg) چقدر است؟

$$10^6 \quad \boxed{۴}$$

$$10^{15.1}$$

$$10^{20.8} \quad \boxed{۲}$$

$$10^{22.3} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ کافیت از رابطه زیر استفاده کنیم:



$$\log E = 11,8 + 1,5M \xrightarrow{M=6} \log E = 11,8 + 1,5(6)$$

$$\rightarrow \log E = 20,8 \rightarrow E = 10^{20,8} \text{ Erg}$$

۸. جواب معادله $\log(x+4) = \log \sqrt{2x+11}$ کدام است؟

۳ (۴)

-۱

-۵ (۲)

-۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\log(x+4) = \log \sqrt{2x+11} \rightarrow x+4 = \sqrt{2x+11}$$

توان ۲ $\rightarrow x^2 + 16 + 8x = 2x + 11 \rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$

$$\rightarrow (x+1)(x+5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{ق ق} \\ x = -5 & \text{جلوی لگاریتم را منفی می کند و غیر قابل قبول است} \end{cases}$$

۹. حاصل $2 \log_9 \sqrt{3} - \log_4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$\log_k^a = n \log_k^a, \quad \log_{k^m}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$

می دانیم:

$$2 \log_9 \sqrt{3} - \log_4 \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \times \log_{3^2}^{\frac{1}{2}} - \log_{2^2}^{-\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۱۰. اگر $\log_b a = \frac{3}{2}$ آنگاه $\log_{\sqrt{b}} ab^2$ کدام است؟

۷ (۴)

۶

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$\log_k ab = \log_k a + \log_k b, \quad \log_{k^m} a^n = \frac{n}{m} \log_k a$

می دانیم:

$$\log_{\sqrt{b}} ab^2 = \log_{\sqrt{b}} a + \log_{\sqrt{b}} b^2 = \log_{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}} a + \log_{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}} b^2 = 2 \log_b a + 4 = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 4 = 7$$

۱۱. اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ باشد، لگاریتم $(4a+1)$ در پایه ۴ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

۲

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا مقدار a را به دست می آوریم:



$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\log_4^{(4a+1)} = \log_4^{(4 \times \frac{3}{4} + 1)} = \log_4^4 = 1$$

۱۲. حاصل $\log_4^{\sqrt{2}} + \log_{\sqrt{8}}^2$ چقدر است؟

$$\frac{7}{4} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{19}{24}$$

$$\frac{7}{12} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{11}{12} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_4^{\sqrt{2}} + \log_{\sqrt{8}}^2 = \log_{2^2}^{2^{\frac{1}{2}}} + \log_{2^{\frac{3}{2}}}^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$$

۱۳. با فرض $\log_2^9 = x$ ، حاصل $\log_6^2$ کدام است؟

$$\frac{2}{1+2x} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{1}{1+2x}$$

$$\frac{1}{2+x} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{2}{2+x} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\log_k^{a^n} = n \log_k^a, \quad \log_k^a = \frac{1}{\log_a^k}, \quad \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_2^9 = x \Rightarrow 2 \log_2^3 = x \Rightarrow \log_2^3 = \frac{x}{2}$$

$$\log_6^2 = \frac{1}{\log_2^6} = \frac{1}{\log_2^2 + \log_2^3} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{x+2}{2}} = \frac{2}{x+2}$$

۱۴. حاصل $\log_9^{3\sqrt[4]{27}}$ کدام است؟

$$\frac{8}{7} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{7}{8}$$

$$\frac{5}{3} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{3}{5} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_9^{3\sqrt[4]{27}} = \log_{3^2}^{3 \times 27^{\frac{1}{4}}} = \log_{3^2}^{3 \times (3^3)^{\frac{1}{4}}} = \log_{3^2}^{3^1 \times 3^{\frac{3}{4}}} = \log_{3^2}^{3^{\frac{7}{4}}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{7}{8}$$



۱۵. اگر $2^A = \left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}} \right)^2$ ، عدد A کدام است؟

$$12\sqrt{2} \quad \boxed{4}$$

$$8\sqrt{2}$$

$$16 \quad \boxed{2}$$

$$8 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}} \right)^2 &= \left(\frac{4^2\sqrt{2}}{2^2\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{(2^2)^2\sqrt{2}}{2^2\sqrt{2}} \right)^2 = \left(\frac{2^8\sqrt{2}}{2^2\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \left(2^6\sqrt{2} \right)^2 = 2^{12}\sqrt{2} = 2^A \rightarrow A = 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۶. در کدام بازه، نمودار تابع $y = 4(2)^x$ بالاتر از نمودار تابع $y = 8^x$ قرار دارد؟

$$1 < x < 2 \quad \boxed{4}$$

$$0 < x < 1$$

$$x < 1 \quad \boxed{2}$$

$$x > 1 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$4(2)^x > 8^x \Rightarrow 2^2 \times 2^x > 2^{3x} \Rightarrow 2^{x+2} > 2^{3x} \Rightarrow x+2 > 3x \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1$$

۱۷. اگر $\log_2 12 = \alpha$ باشد، عدد $4^{\alpha-2}$ کدام است؟

$$18 \quad \boxed{4}$$

$$9$$

$$6 \quad \boxed{2}$$

$$\frac{9}{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_b N = x \rightarrow b^x = N \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_2 12 = \alpha \Rightarrow 2^\alpha = 12$$

$$4^{\alpha-2} = 4^\alpha \times 4^{-2} = (2^2)^\alpha \times \frac{1}{16} = (2^\alpha)^2 \times \frac{1}{16} = \frac{144}{16} = 9$$

۱۸. مقدار x از معادله $\left(\frac{1}{8} \right)^{3x} = 32^{x+1}$ برابر کدام است؟

$$-\frac{5}{14} \quad \boxed{4}$$

$$-\frac{10}{8}$$

$$\frac{5}{4} \quad \boxed{2}$$

$$-\frac{14}{5} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ دو طرف تساوی را به صورت عدد توان دار با پایه های برابر می کنیم:

$$\left(\frac{1}{8} \right)^{3x} = 32^{x+1} \Rightarrow (2^{-3})^{3x} = (2^5)^{x+1} \Rightarrow 2^{-9x} = 2^{5x+5}$$

$$\Rightarrow -9x = 5x + 5 \Rightarrow 14x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{14}$$



۱۹. حاصل $\log_{(1+\sqrt{2})} (3+2\sqrt{2})^3$ کدام است؟

- ☐ ۱ $\frac{3}{2}$ ☐ ۲ 3 ☐ ۳ 6 ☐ ۴ $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

دقت کنید که $(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ است.

$$\log_{(1+\sqrt{2})}^{(3+2\sqrt{2})^3} = \log_{(1+\sqrt{2})}^{((1+\sqrt{2})^2)^3} = \log_{(1+\sqrt{2})}^{(1+\sqrt{2})^6} = 6$$

۲۰. حاصل $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \log_{\sqrt{3}} + \log_{\sqrt[4]{3}}$ برابر است با:

- ☐ ۱ $\frac{1}{2}$ ☐ ۲ $\frac{1}{3}$ ☐ ۳ 1 ☐ ۴ $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$, $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \log_{\sqrt{3}} + \log_{\sqrt[4]{3}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

۲۱. تابع نمایی $y = 2^x$ محور y ها را در نقطه ی A قطع می کند معکوس این تابع محور x ها را در نقطه ی B قطع می کند. طول پاره خط AB کدام است؟

- ☐ ۱ $\sqrt{3}$ ☐ ۲ 3 ☐ ۳ $\sqrt{2}$ ☐ ۴ $\frac{10}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم تابع $y = 2^x$ وقتی محور y ها را قطع می کند که $x = 0$ باشد. پس: $y = 2^0 = 1$

پس نقطه ی $A(0, 1)$ به دست آمد و چون نقطه ی B در معکوس تابع صدق می کند پس جای x و y عوض می شوند. و $B(1, 0)$ است. حال فاصله ی نقاط A و B را به دست آوریم:

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

۲۲. اگر $\log_{12}^2 + \log_{12}^3 + \log_{12}^4 = a$ باشد حاصل $\log_{12}^3 + \log_{12}^6 + \log_{12}^9$ کدام است؟

- ☐ ۱ a ☐ ۲ $a+2$ ☐ ۳ $a+1$ ☐ ۴ $2a+1$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$



پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

عدد مورد نظر را a در نظر می‌گیریم، طبق فرض داریم:

$$\log_{\frac{1}{4}}^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}}^a = \frac{15}{4} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}^a = \frac{15}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{a^2}} = \log_{\frac{1}{8}}^{a^{-2}} = \frac{-2}{3} \log_{\frac{1}{8}}^a = -\frac{2}{3} \left(\frac{15}{2} \right) = -5$$

۲۷. اگر $\log 7 = 0.8$, $\log 3 = 0.4$, آنگاه حاصل $\log \frac{8100}{\sqrt[4]{49}}$ کدام است؟

۳٫۵ (۴)

۲٫۴

۳٫۱ (۲)

۳٫۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log \frac{8100}{\sqrt[4]{49}} = \log 8100 - \log \sqrt[4]{49} = \log(81 \times 100) - \log 49^{\frac{1}{4}} = \log 81 + \log 100 - \log(7^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \log 3^4 + \log 10^2 - \log 7^{\frac{1}{2}} = 4 \log 3 + 2 - \frac{1}{2} \log 7 = (4 \times 0.4) + 2 - \frac{1}{2}(0.8) = 3.2$$

۲۸. مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{2^{x-1}} \geq (2\sqrt{2})^{2x}$ کدام است؟

$x \leq \frac{1}{2}$ (۴)

$x \geq \frac{1}{2}$

$x \leq \frac{1}{4}$ (۲)

$x \geq \frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{1}{2^{x-1}} \geq (2\sqrt{2})^{2x} \rightarrow 2^{1-x} \geq (2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{2x} \rightarrow 2^{1-x} \geq (2^{\frac{3}{2}})^{2x}$$

$$\rightarrow 2^{1-x} \geq 2^{3x} \rightarrow 1-x \geq 3x \rightarrow 1 \geq 4x \rightarrow \frac{1}{4} \geq x$$

۲۹. حاصل $\frac{\log 8 + \log 3}{\log 2 + \log \sqrt{6}}$ کدام است؟

$2\sqrt{6}$ (۴)

۲۴

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$



$$\frac{\log 8 + \log 3}{\log 2 + \log \sqrt{6}} = \frac{\log 24}{\log 2\sqrt{6}} = \frac{\log 24}{\log \sqrt{24}} = \frac{\log 24}{\log(24)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 24}{\frac{1}{2}\log 24} = 2$$

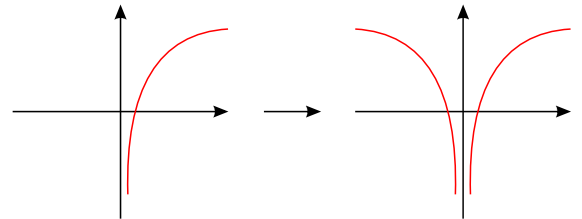
۳۰. تابع $y = \frac{1}{4}\log_3 x^4$ کدام ویژگی را دارد؟

- (۱) وارون پذیر (۲) مرکز تقارن دارد. محور تقارن دارد. (۴) اکیداً یکنوا

پاسخ: گزینه ۳ برای پیدا کردن گزینه صحیح می توان تابع را رسم کرد، قبل از رسم ساده سازی انجام می دهیم. با رعایت این نکته که دامنه تابع تغییر نمی کند.

$$y = \frac{1}{4}\log_3 x^4 = \frac{1}{4} \times 4 \times \log_3 x = \log_3 x$$

$$f(x) = \log_3 x \rightarrow f(|x|) = \log_3 |x|$$



باتوجه به نمودار تابع فقط محور تقارن دارد.

۳۱. مجموعه جواب نامعادله $3^{x+1} < 243$ شامل چند عدد صحیح منفی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

$$3^{-2x+1} < 243 \rightarrow 3^{-2x+1} < 3^5 \xrightarrow{3>1} -2x+1 < 5 \rightarrow -2x < 4 \rightarrow x > -2$$

جهت عوض نمی شود

که جواب نامعادله، فقط شامل یک عدد صحیح منفی است ($x = -1$)

۳۲. اگر $\log_y x = \frac{1}{3}$ باشد حاصل $\log_x^y \sqrt{x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

$\log_k^a = \frac{1}{\log_a^k}, \quad \log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

می دانیم:

$$\log_x^y \sqrt{x} = \log_x^y x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_x^y x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\log_y^x} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

۳۳. ساده شده عبارت $(2 \log_5^2 + 3 \log_5^3)$ برابر است با:

- (۱) ۵ (۲) ۳۶ (۳) ۱۰۸ (۴) ۵۶

پاسخ: گزینه ۳

$\log_k^{a^n} = n \log_k^a, \quad \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad a^{\log_b^x} = x^{\log_b^a}$

می دانیم:



$${}_5(2 \log_5^2 + 3 \log_5^3) = {}_5(\log_5^4 + \log_5^{27}) = {}_5\log_5^{4 \times 27} = 4 \times 27 = 108$$

۳۴. حاصل $\sqrt[4]{2^{(4+\log_2^3)}}$ کدام است؟

$$3\sqrt[4]{2} \quad (4)$$

$$6\sqrt[4]{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{2} \quad (2)$$

$$4\sqrt[4]{3} \quad (1)$$

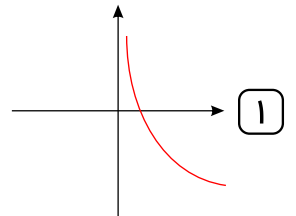
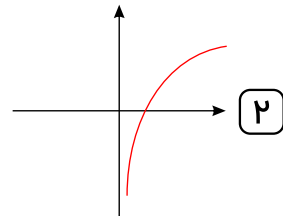
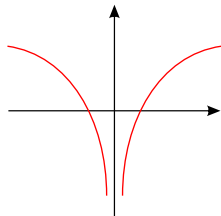
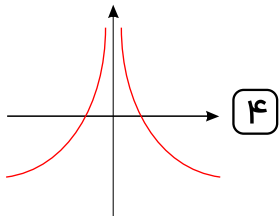
پاسخ: گزینه ۱
می‌دانیم:

$$a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$$

$$\log_b^{a^n} = n \log_b^a$$

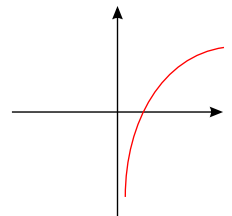
$$\sqrt[4]{2^{4+\log_2^3}} = \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{2^{\log_2^3}} = 4 \times 3^{\log_2^{\frac{1}{4}}} = 4 \times 3^{\frac{1}{4} \log_2^2} = 4 \times 3^{\frac{1}{4}} = 4\sqrt[4]{3}$$

۳۵. نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{5}}^x$ کدام است؟



پاسخ: گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$y = \log_{\frac{1}{5}}^x = \log_{5^{-1}}^{x^{-1}} = \log_5^x \xrightarrow{\text{نمودار تابع به صورت شکل روبه‌رو است}}$$



۳۶. به ازای افزایش یک واحد مقیاس ریشتر، قدرت تخریب زلزله چند برابر می‌شود؟

$$10\sqrt{10} \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\log E = 11.8 + 1.5M \rightarrow E = 10^{11.8+1.5M}$$

$$\begin{cases} E_1 = 10^{11.8+1.5M} \\ E_2 = 10^{11.8+1.5(M+1)} \end{cases} \rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{11.8+1.5(M+1)}}{10^{11.8+1.5M}} = 10^{1.5} = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = 10\sqrt{10}$$

۳۷. اگر $\log 2 = 0.301$ و $\log 3 = 0.5$ باشد. $\log 6000$ برابر است با:

$$3,002 \quad (4)$$

$$4,778 \quad (3)$$

$$3,801 \quad (2)$$

$$3,222 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b, \quad \log_k^{a^n} = n \log_k^a \quad \text{می‌دانیم:}$$



$$\log \overbrace{6000}^{6 \times 1000} = \log \overbrace{6}^{2 \times 3} + \log 1000 = \log 2 + \log 3 + \log 10^3 = 0,301 + 0,5 + 3 = 3,801$$

۳۸. حاصل $\log \frac{(\sqrt{125})^3}{\sqrt{5}}$ کدام است؟

۵,۵ (۴)

۹

۴,۵ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log \frac{(\sqrt{5^3})^3}{\sqrt{5}} = \log \frac{(5^{\frac{3}{2}})^3}{5^{\frac{1}{2}}} = \log 5^{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}} = \log 5^4 = 4$$

۳۹. اگر $a > 1$ باشد. کدام گزینه صحیح است؟

$$\frac{3}{2} \log_a^2 = \frac{2}{3} \log_a^3 \quad (۴)$$

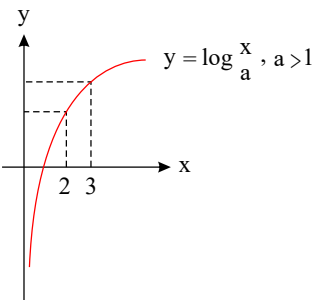
$$2^a > 3^a$$

$$\log_a^2 > \log_a^3 \quad (۲)$$

$$\log_a^2 < \log_a^3 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع $y = \log_a^x$ را با شرط $a > 1$ رسم می کنیم (واضح است هرچه x افزایش می یابد y افزایش می یابد)



۴۰. به عدد ۳۰۰ چند واحد بیفزاییم تا لگاریتم آن در مبنای ۸ برابر ۳ گردد؟

۳۲۲ (۴)

۱۱۲

۱۰۳ (۲)

۲۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\log_b^N = x \rightarrow N = b^x \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_8^{x+300} = 3 \xrightarrow{\text{تعریف}} x + 300 = 8^3 = 512 \rightarrow x = 512 - 300 = 212$$

۴۱. اثر یک داروی بیهوشی در مدت ۳۰ دقیقه از بین می رود. اگر اثر ماده بیهوشی از رابطه $f(t) = 100 - 20 \log_2^{(t+2)}$ محاسبه شود، پس از گذشت ۶ دقیقه چه اثری از داروی باقی مانده است؟

۸۰% (۴)

۶۰%

۴۰% (۲)

۲۰% (۱)

پاسخ: گزینه ۲ برای محاسبه کافیت $t = 6$ را در تابع جایگذاری نماییم.

$$f(6) = 100 - 20 \log_2^8 \rightarrow f(6) = 100 - 20 \times 3 = 40\%$$



۴۲. قدرت تخریب زلزله ۹ ریشتری چند برابر قدرت تخریب زلزله ۷ ریشتری می باشد؟

۲۰ (۴)

۱۰۰۰

۲۰۰ (۲)

۱۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ کافیست انرژی آزاد شده در دو حالت را محاسبه و بر هم تقسیم نمائیم.

$$\log E = 11,8 + 1,5M \rightarrow E = 10^{11,8+1,5M}$$

$$\text{حالت اول } M_1 = 9 \rightarrow E_1 = 10^{11,8+1,5(9)} = 10^{25,3}$$

$$\text{حالت دوم } M_2 = 7 \rightarrow E_2 = 10^{11,8+1,5(7)} = 10^{22,3}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{25,3}}{10^{22,3}} = 10^3 = 1000 \rightarrow \text{پس قدرت تخریب ۱۰۰۰ برابر است.}$$

۴۳. حاصل عبارت $\log_{\frac{625}{2}} + 9^{\log \sqrt{5}}$ کدام است؟

۱ (۴)

۹`

-۹ (۲)

-۱ (۱)

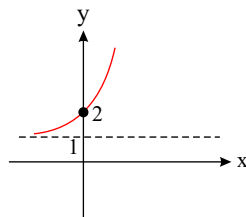
پاسخ: گزینه ۴ می دانیم:

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a, \quad a^{\log_b^x} = x^{\log_b^a}$$

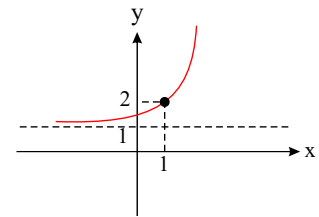
حاصل هر لگاریتم را جداگانه بدست آورده و سپس آنها را با هم جمع می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \log_{\frac{625}{2}}^{625} &= \log_{\frac{2}{10}}^{\frac{5^4}{2}} = \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{5^4}{2}} = \log_{\frac{1}{5}}^{\frac{5^4}{2}} = -4 \\ 9^{\log \sqrt{5}} &= \sqrt{5}^{\log 9} = \sqrt{5}^{\log 3^2} = (\sqrt{5})^2 = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow -4 + 5 = 1$$

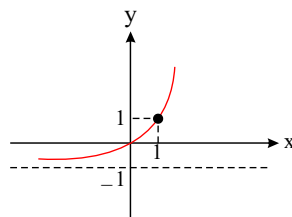
۴۴. نمودار تابع $y = 2^{(x-1)} + 1$ کدام است؟



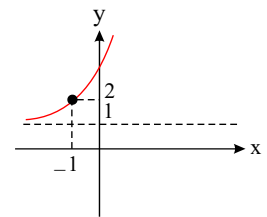
(۲)



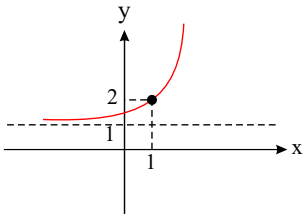
(۱)



(۴)



پاسخ: گزینه ۱ نمودار تابع $y = 2^x$ را یک واحد در راستای افقی به سمت راست و سپس یک واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال می دهیم تا نمودار $y = 2^{(x-1)} + 1$ به دست آید. بنابراین داریم:



۴۵. اگر $\log 2 \simeq 0.3$ و $\log 6 \simeq 0.78$ باشد، حاصل $\log 15$ کدام است؟

۱٫۲۲ (۴)

۱٫۰۸

۱٫۱۸ (۲)

۱٫۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$ و $\log 5 = 1 - \log 2$ است.

$$\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 \rightarrow \log 3 = \log 6 - \log 2 = 0.78 - 0.3 = 0.48$$

$$\text{پس: } \log 15 = \log 5 + \log 3 = 1 - \log 2 + \log 3 = 0.7 + 0.48 = 1.18$$

۴۶. شدت زلزله ۶٫۵ ریشتر و شدت پس‌لرزه آن حدود ۳٫۵ ریشتر می‌باشد. انرژی آزاد شده در زلزله اصلی چند برابر پس‌لرزه آن است؟

۳ (۴)

۱٫۸

۱۰۰۰۰ (۲)

۱۰۰۰۰ $\sqrt{10}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\log E = 11.8 + 1.5M \rightarrow E = 10^{11.8+1.5M}$$

$$\text{حالت اول } M_1 = 6.5 \rightarrow E_1 = 10^{11.8+1.5(6.5)} = 10^{21.55}$$

$$\text{حالت دوم } M_2 = 3.5 \rightarrow E_2 = 10^{11.8+1.5(3.5)} = 10^{17.05}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{21.55}}{10^{17.05}} = 10^{4.5} = 10^{\frac{9}{2}} = \sqrt{10^9} = 10^4 (\sqrt{10}) = 10000 \sqrt{10}$$

۴۷. معادله $\log(x^3 + 3x^2 + 3x - 1) = \log x + \log(x + 1) + \log(x + 2)$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

بیشمار (۴)

هیچ

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$\log(x^3 + 3x^2 + 3x - 1) = \log x + \log(x + 1) + \log(x + 2)$$

$$\Rightarrow \log(x^3 + 3x^2 + 3x - 1) = \log x(x + 1)(x + 2)$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = x(x^2 + 3x + 2)$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + 3x^2 + 2x \Rightarrow x = 1$$



۴۸. انرژی آزاد شده (به واحد Erg) از زلزله‌ای به بزرگی M ریشتر از رابطه $\log E = 12 + 1.5M$ به دست می‌آید. اگر انرژی آزاد شده Erg $10^{18} \times 10^{24}$ باشد، بزرگی این زلزله چند ریشتر بوده است؟ ($\log 2 = 0.3$)

۶ (۴)

۶٫۶

۵ (۲)

۵٫۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ برای محاسبه بزرگی این زلزله، باید در رابطه مطرح شده انرژی زلزله را جایگذاری نماییم.

$$\log E = 12 + 1.5M \xrightarrow{E=10^{24} \times 10^{18}}$$

$$\rightarrow \log^{10^{24} \times 10^{18}} = 12 + 1.5M \rightarrow \log^{10^{24}} + \log^{10^{18}} = 12 + 1.5M$$

$$\rightarrow \log 2^{10} + 18 \log^{10} = 12 + 1.5M \rightarrow 10 \times \log 2 + 18 = 12 + 1.5M$$

$$\rightarrow 10 \times 0.3 + 18 = 12 + 1.5M \rightarrow 1.5M = 21 - 12 \rightarrow M = \frac{9}{1.5} = 6$$

۴۹. انرژی آزاد شده در یک زلزله ۴٫۸ ریشتری برابر 10^α ارگ می‌باشد. $\sqrt{\alpha - 10}$ کدام گزینه می‌باشد؟

۱ (۴)

۲

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا انرژی آزاد شده را از رابطه زیر محاسبه می‌نمائیم:

$$\log E = 11.8 + 1.5M \xrightarrow{M=4.8} \log E = 11.8 + 7.2 = 19$$

$$\log E = 19 \rightarrow E = 10^{19} = 10^\alpha \rightarrow \alpha = 19 \rightarrow \sqrt{\alpha - 10} = \sqrt{9} = 3$$

۵۰. اگر α و β ریشه‌های معادله $\log_3^{x^2 - 7x + 21} = 2$ باشند، حاصل $\log_{125}^{\alpha^2 + \beta^2}$ کدام است؟

 $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\log_b^a = k \leftrightarrow a = b^k,$$

بنابراین:

$$\log_3^{x^2 - 7x + 21} = 2 \rightarrow x^2 - 7x + 21 = 3^2$$

$$x = 3$$

$$x^2 - 7x + 21 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0 \rightarrow$$

$$x = 4$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \log_{125}^{\alpha^2 + \beta^2} = \log_{125}^{25}$$

می‌دانیم: $\log_b^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$ پس:

$$\log_{125}^{\alpha^2 + \beta^2} = \log_{125}^{25} = \log_{5^3}^{5^2} = \frac{2}{3} \log_5^5 = \frac{2}{3}$$



۵۱. اگر $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$ باشد، آن گاه حدود x کدام است؟

$x < \frac{4}{3}$ (۱) $x > \frac{4}{3}$ (۲) $x < ۲$ $x > ۲$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به این که پایه به بین صفر و یک قرار دارد و تابع نمایی اکیداً نزولی است در حل نامعادله جهت تغییر می‌نماید:

$$a^x < a^y \xrightarrow{0 < a < 1} x > y$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \rightarrow 5-x > 2x+1 \rightarrow 3x < 4 \rightarrow x < \frac{4}{3}$$

۵۲. اگر $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x-1} = \frac{8}{343}$ و $9^y = 27^{y-1}$ باشند، مقدار $x + y$ کدام است؟

۴ (۱) -۱ (۲) ۳ ۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{2x-1} = \frac{8}{343} = \left(\frac{2}{7}\right)^3 \Rightarrow 2x-1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

طبق فرض سؤال :

$$9^y = 27^{y-1} \Rightarrow 3^{2y} = 3^{3y-3} \Rightarrow 2y = 3y-3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x+y \stackrel{x=2, y=3}{=} 2+3 = 5$$

طبق فرض سؤال :

۵۳. اگر زمین‌لرزه‌ای به بزرگی m ریشتر اتفاق بیفتد، انرژی آزادشده آن (E) از رابطه $\log E = 1,5m + 11,8$ محاسبه می‌شود. زلزله‌ای به بزرگی $۶,۸$ ریشتر چقدر انرژی آزاد می‌کند؟

$۱۰^{۲۲}$ (۱) $۲۰^{۲۰,۸}$ (۲) $۱۰^{۲۱}$ $۲۰^{۱۰,۸}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱ نکته:

$$\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c \quad , \quad a, b > 0, b \neq 1$$

$$\log E = (1,5) \times (6,8) + 11,8 \Rightarrow \log E = 10,2 + 11,8 \Rightarrow \log E = 22 \Rightarrow E = 10^{22}$$

۵۴. از تساوی $\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x^5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۲ کدام است؟

-۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ ۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^{a^n} = n \log_k^a \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\log_x^{x^2+4} = 1 + \log_x^5 \Rightarrow \log_x^{x^2+4} = \log_x^x + \log_x^5 \Rightarrow \log_x^{x^2+4} = \log_x^{5x} \Rightarrow x^2 + 4 = 5x$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{c}{a} = 4 \end{cases} \quad (\text{مبنا نمی‌تواند یک باشد})$$



$$\log_2^x \xrightarrow{x=4} \log_2^4 = \log_2^{2^2} = 2$$

۵۵. دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\log(2x - 3)}$ کدام است؟

- ☐ ۱ $[1, +\infty)$
☐ ۲ $(1, +\infty)$
☐ ۳ $[2, +\infty)$
☐ ۴ $(2, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۳

$$\Rightarrow 2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

از اشتراک این دو جواب به $x \geq 2$ یا $x \in [2, +\infty)$ می‌رسیم.

۵۶. اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$ کدام است؟

- ☐ ۱ $2 + 4k$
☐ ۲ $4k$
☐ ۳ $1 + k$
☐ ۴ $2k$

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^{a^n} = n \log_k^a \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\begin{aligned} \log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5}) &= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + 5 + 2\sqrt{5}) \\ &= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) = \log \underbrace{(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})}_{\text{مزدوج}} = \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k \end{aligned}$$

۵۷. فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ از نقطه $A(0, 4)$ کدام است؟

- ☐ ۱ ۲
 ☐ ۲ ۳
 ☐ ۳ ۴
 ☐ ۴ ۵

پاسخ: گزینه ۴ باید دو منحنی داده شده را با هم تلاقی دهیم و نقطه تلاقی را به دست آوریم.

$$2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \rightarrow 2^x = (2^{\frac{1}{2}})^{x+1} + 4 \rightarrow 2^x = (2^{x+1})^{\frac{1}{2}} + 4$$

$$\rightarrow 2^x = (2^x \times 2)^{\frac{1}{2}} + 4 \xrightarrow{2^x=A} A = \sqrt{2A} + 4 \rightarrow A - 4 = \sqrt{2A}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} A^2 - 8A + 16 = 2A \rightarrow A^2 - 10A + 16 = 0 \rightarrow (A - 8)(A - 2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 8 \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow x = 3 \xrightarrow{y=2^x} y = 8 \\ A = 2 \quad \text{غ ق ق} \quad \text{(در معادله رادیکالی صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

حال باید فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix}$ را از $B \begin{vmatrix} 3 \\ 8 \end{vmatrix}$ حساب کنیم.

$$AB = \sqrt{(0 - 3)^2 + (4 - 8)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$



۵۸. نمودار یک تابع نمایی $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$ ، نمودار تابع $g(x) = x^2 - x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟

۶ (۴)

۵

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ چون دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ محل برخورد این دو تابع است؛ پس:

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \rightarrow -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 1 - 1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 2 \rightarrow 2^{-A-B} = 2 \rightarrow -A - B = 1 \\ f(2) = g(2) \rightarrow -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 4 - 2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 2 \rightarrow 2^{-2A-B} = 2^2 \rightarrow -2A - B = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -A - B = 1 \\ -2A - B = 2 \end{cases} \rightarrow A = -1, B = 0 \rightarrow f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

$$\Rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -2 + 2^3 = -2 + 8 = 6$$

۵۹. اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد آنگاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه 8 کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$ $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

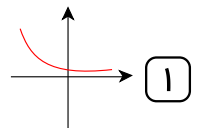
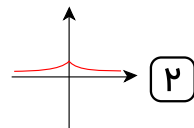
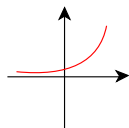
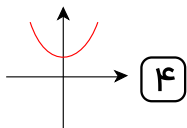
پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_b^N = x \rightarrow b^x = N$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log_{\sqrt{3}}^a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \Rightarrow a = (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

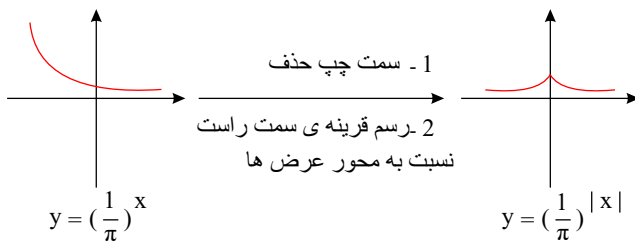
$$\log_8^{(a^3+7)} = \log_8^{(3^{\frac{2}{3}})^3+7} = \log_8^{3^2+7} = \log_8^{16} = \log_8^{2^4} = \log_{2^3}^{2^4} = \frac{4}{3}$$

۶۰. نمودار $y = \pi^{-|x|}$ به کدام شکل است؟



پاسخ: گزینه ۲ برای رسم نمودار $y = f(|x|)$ باید قسمت چپ محور y ها پاک شود و قرینه‌ی قسمت راست نسبت به محور y ها در سمت چپ محور y ها رسم شود.

$$y = \pi^{-|x|} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{|x|}$$



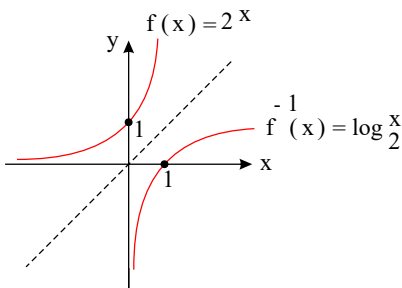
۶۱. اگر $f(x) = 2^x$ ، آنگاه دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

- ☐ ۱ R
 ☐ ۲ $(1, +\infty)$
 ☐ ۳ $(0, +\infty)$
 ☐ ۴ $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۳ دامنه‌ی تابع رادیکالی $y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ برابر است با:

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

ابتدا معکوس تابع $f(x) = 2^x$ را رسم می‌کنیم. باتوجه به نامعادله‌ی $x \geq f^{-1}(x)$ ، به دنبال محدوده‌ی x هایی هستیم که به ازای آن، نمودار خط $y = x$ بالاتر یا روی نمودار تابع $f^{-1}(x)$ باشد. باتوجه به شکل در تمام نقاط دامنه‌ی $f^{-1}(x)$ ، خط $y = x$ بالاتر از نمودار معکوس f قرار دارد. پس دامنه‌ی تابع مورد نظر $(0, +\infty)$ می‌شود.



$$D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$$

۶۲. دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{\log_{\frac{x-1}{x+1}} \frac{x-1}{x+1}}$ کدام است؟

- ☐ ۱ $x > 1$ یا $x < -1$
 ☐ ۲ $x < 1$
 ☐ ۳ $x > -1$
 ☐ ۴ $x > 1$

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_a^A \geq m \xrightarrow{0 < \alpha < 1} A \leq a^m \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} > 0 \quad \left| \begin{array}{cccc} -\infty & -1 & 1 & +\infty \\ + & - & 0 & + \end{array} \right. \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ \log_{\frac{x-1}{x+1}} \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{-2}{x+1} \leq 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 1$$

۶۳. دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ کدام است؟

- ☐ ۱ $[-2, 5]$
 ☐ ۲ $(-2, 5) - (0, 3)$
 ☐ ۳ $[-2, 0) \cup (3, 5]$
 ☐ ۴ $R - [0, 3]$



پاسخ: گزینه ۳ جلوی لگاریتم باید مثبت باشد پس داریم:

$$x(x-3) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x > 3 \text{ یا } x < 0 \quad (I)$$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq 1 \rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq \log 10$$

$$\rightarrow x^2 - 3x \leq 10 \rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0 \rightarrow (x-5)(x+2) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 \leq x \leq 5 \quad (II)$$

از اشتراک II, I به نتیجه‌ی $-2 \leq x < 0$ یا $3 < x \leq 5$ می‌رسیم. یعنی:

$$x \in [-2, 0) \cup (3, 5]$$

۶۴. تعداد نقاط تلاقی خط $y = x + 2$ با نمودار تابع $f(x) = 2^x$ کدام است؟

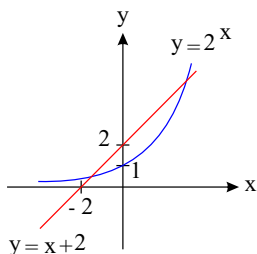
۳ (۴)

۲

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ کافی است دو تابع $y_1 = x + 2$ و $y_2 = 2^x$ را رسم کنیم.



واضح است خط و منحنی همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. $\rightarrow$

۶۵. جواب نامعادله $x^2 \geq 2^x$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۴ بی‌شمار (۴)

۴

۳ (۲)

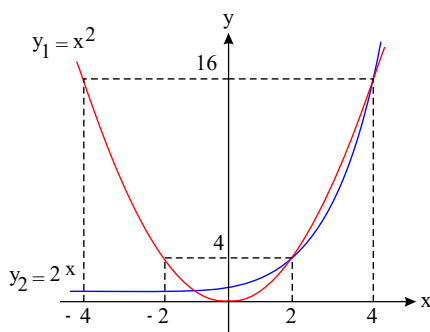
۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نمودار دو تابع $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

نامعادله $x^2 \geq 2^x$ تنها در بازه $[2, 4]$ رخ می‌دهد که x^2 بالاتر از 2^x رسم شده است و این بازه

شامل ۳ عدد طبیعی ۲، ۳ و ۴ است.



۶۶. اگر a عددی حقیقی و نمودار توابع $f(x) = (4a - 2)^x$ و $g(x) = (1 - \frac{a}{2})^x$ نسبت به محور y ها

قرینه هم باشند، مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۳ (۴)

۲٫۵

۲ (۲)

۱٫۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ نمودار دو تابع $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ($y = (\frac{1}{a})^x$) نسبت به محور y ها قرینه هستند، پس داریم:

$$(4a - 2)(1 - \frac{a}{2}) = 1 \rightarrow 4a - 2a^2 - 2 + a - 1 = 0 \rightarrow -2a^2 + 5a - 3 = 0$$



$$\rightarrow 2a^2 - 5a + 3 = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها } S = \frac{-b}{a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$$

۶۷. تابع $f(x) = \left(\frac{2a-3}{a+2}\right)^{x+3}$ نمایی است، مجموعه مقادیر a کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) & \boxed{۲} \\ (-2, \frac{3}{2}) & \boxed{۱} \\ (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) - \{5\} & \boxed{۴} \\ \left(\frac{-3}{2}, 2\right) & \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۴ تابع $y = a^x$ به شرطی تابع نمایی است که $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد.

$$\frac{2a-3}{a+2} > 0 \rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} a & -\infty & -2 & & \frac{3}{2} & & +\infty \\ \hline & + & \oplus & - & \oplus & + & \end{array} \rightarrow a < -2 \text{ یا } a > \frac{3}{2}$$

$$\frac{2a-3}{a+2} \neq 1 \rightarrow 2a-3 \neq a+2 \rightarrow a \neq 5$$

بنابراین مجموعه مقادیر a به صورت $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) - \{5\}$ است.

۶۸. اگر $f(x) = \log_3(x-1)$ ، آن گاه دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{4 - f^{-1}(x)}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

$$\begin{array}{llll} \boxed{۱} \text{ صفر} & \boxed{۲} \text{ ۱} & ۲ & \boxed{۴} \text{ ۳} \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا باید ضابطه‌ی تابع معکوس را پیدا کنیم برای این منظور x را بر حسب y به دست می‌آوریم و سپس y ها را به x و x را به $f^{-1}(x)$ تبدیل می‌کنیم.

$$y = \log_3^{x-1} \xrightarrow{\text{تعریف}} x-1 = 3^y \rightarrow x = 3^y + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = 3^x + 1$$

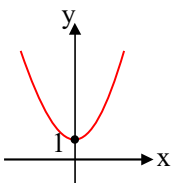
برای پیدا کردن دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{4 - f^{-1}(x)}$ کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$4 - f^{-1}(x) \geq 0 \rightarrow 4 - (3^x + 1) \geq 0 \rightarrow 4 - 3^x - 1 \geq 0 \rightarrow 3^x \leq 3^1 \rightarrow x \leq 1$$

که این جواب شامل یک عدد طبیعی می‌باشد. ($x = 1$)

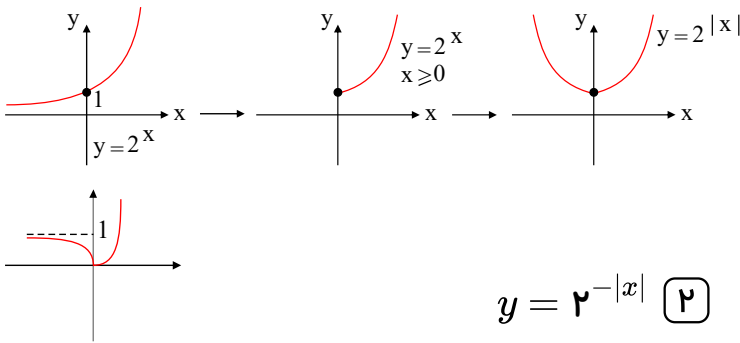
توجه: در بازه $x \leq 1$ این x مربوط به دامنه‌ی تابع f^{-1} است و ربطی به دامنه‌ی تابع لگاریتمی ندارد.

۶۹. شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟



$$\begin{array}{ll} y = x^2 - 1 & \boxed{۱} \\ y = 2^{|x|} & \boxed{۲} \\ y = 2^{x+1} & \boxed{۴} \\ y = |2^x| & \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۲ برای رسم توابع $y = f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را با شرط $x \geq 0$ رسم کرده و سپس قرینه‌ی شکل را نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم و به شکل اضافه می‌کنیم.



۷۰. شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟

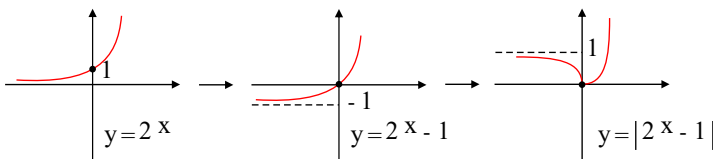
۱ $y = -2^{-x}$

$y = 2^{x+1} - 1$

۲ $y = 2^{-|x|}$

۴ $y = |2^x - 1|$

پاسخ: گزینه ۴



برای رسم توابع به فرم $y = |f(x)|$ هر آنچه از شکل تابع $y = f(x)$ زیر محور x ها است آئینه وار به بالا منتقل می کنیم.

۷۱. برای رسم نمودار تابع $f(x) = \log_2(2x + 4)$ ، به ترتیب باید چه انتقال هایی را روی تابع

$y = \log_2(x - 1)$ انجام دهیم؟

۱ ۵ واحد در راستای افقی به چپ، ۲ واحد در راستای قائم به بالا

۲ ۳ واحد در راستای افقی به چپ، ۱ واحد در راستای قائم به بالا

۵ واحد در راستای افقی به راست، ۲ واحد در راستای قائم به بالا

۴ ۳ واحد در راستای افقی به راست، ۱ واحد در راستای قائم به بالا

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \log_2(2x + 4) = \log_2 2(x + 2) = \log_2 2 + \log_2(x + 2) = 1 + \log_2(x + 2)$$

اکنون بررسی می کنیم که نمودار $y = \log_2(x - 1)$ را چگونه به نمودار $y = 1 + \log_2(x + 2)$ تبدیل کنیم:

$$y = 1 + \log_2(x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow x+3} y = \log_2(x + 2)$$

۳ واحد به چپ

$$\xrightarrow{y \rightarrow y+1} y = 1 + \log_2(x + 2)$$

۱ واحد به سمت بالا

۷۲. اگر $\log 9 = 0,95424$ باشد آنگاه عدد 3^{100} چند رقمی است؟

۴۶ ۴

۴۸

۴۹ ۲

۴۷ ۱

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم: $\log_k a^n = n \log_k a$

$$\log 9 = 0,95424 \Rightarrow 2 \log 3 = 0,95424 \Rightarrow \log 3 = 0,47712$$

$$\log 3^{100} = 100 \log 3 = 100(0,47712) = 47,712$$

$$\text{تعداد ارقام} = [47,712] + 1 = 47 + 1 = 48$$



اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه تعداد ارقام n برابر است با $1 + [\log n]$.

۷۳. اگر به بزرگی زمین لرزه‌ای برحسب ریشتر حداقل ۴ واحد اضافه شود، مقدار انرژی آزادشده برحسب ارگ حداقل چند برابر می‌شود؟

$$(\log E = 11.8 + 1.5M)$$

$$1000000 \quad \boxed{4}$$

$$1000000$$

$$1000 \quad \boxed{2}$$

$$100 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم $\log_k^a = \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$ و $\log_b^a = c \rightarrow b^c = a$ است.

$$\begin{cases} \log E_1 = 11.8 + 1.5M_1 \\ \log E_2 = 11.8 + 1.5M_2 \end{cases} \rightarrow \log E_2 - \log E_1 = 1.5M_2 - 1.5M_1$$

$$\rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 1.5(M_2 - M_1)$$

$$M_2 - M_1 \geq 4 \rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} \geq 1.5 \times 4 \rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} \geq 6 \rightarrow \frac{E_2}{E_1} \geq 10^6$$

۷۴. از معادله $4^x - 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 0$ مقدار x کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$1 \quad \boxed{2}$$

$$\text{صفر} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$4^x - 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 0 \rightarrow 4^x - 4 + (4^{-1})^{x-1} = 0$$

$$\rightarrow 4^x - 4 + 4^{1-x} = 0 \rightarrow 4^x - 4 + \frac{4}{4^x} = 0$$

$$\xrightarrow{4^x=t} t - 4 + \frac{4}{t} = 0 \rightarrow \frac{t^2 - 4t + 4}{t} = 0 \rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$\rightarrow (t - 2)^2 = 0 \rightarrow t = 2 \rightarrow 4^x = 2 \rightarrow 2^{2x} = 2 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۷۵. مجموعه جواب نامعادله $625^{5x-x^2-8} < (5 \cdot 4)^{5x-x^2-8}$ کدام است؟

$$3 < x < 5 \quad \boxed{4}$$

$$2 < x < 4$$

$$2 < x < 3 \quad \boxed{2}$$

$$1 < x < 3 \quad \boxed{1}$$



پاسخ: گزینه ۲

$$(0.4)^{5x-x^2-8} < 625 \rightarrow \left(\frac{4}{100}\right)^{5x-x^2-8} < 5^4 \rightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^{5x-x^2-8} < 5^4$$

$$\rightarrow (5^{-2})^{5x-x^2-8} < 5^4 \rightarrow 5^{-10x+2x^2+16} < 5^4$$

چون پایه بزرگ‌تر از یک می‌باشد ($5 > 1$) جهت نامعادله عوض نمی‌شود، یعنی:

$$2x^2 - 10x + 16 < 4 \rightarrow 2x^2 - 10x + 12 < 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x-3) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 < x < 3$$

۷۶. اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 10x + 0.1 = 0$ باشند، حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است؟

- ۱) -2 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 1

پاسخ: گزینه ۱

$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \quad \log_k^{a^n} = n \log_k^a$

 می‌دانیم:

$$a+b=S=-\frac{b}{a}=10, \quad ab=P=\frac{c}{a}=\frac{1}{10}$$

$$\log a + \log b - \log(a+b) = \log \frac{ab}{a+b} = \log \frac{\frac{1}{10}}{10} = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$$

۷۷. معادله‌ی $4^x - 3 \times 2^x - 4 = 0$ چند ریشه دارد؟

- ۱) هیچ ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

پاسخ: گزینه ۲

$$4^x - 3 \times 2^x - 4 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 3(2^x) - 4 = 0 \xrightarrow{2^x=A} A^2 - 3A - 4 = 0$$

$$\rightarrow (A-4)(A+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} A = -1 \Rightarrow 2^x = -1 \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ A = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه است.

۷۸. جواب معادله لگاریتمی

$$\log(3x+1) + 2 \log \sqrt{x-2} = \frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 1) + \log(x+2)$$

- ۱) $3, 0$ ۲) 3 ۳) $4, 3$ ۴) 16

پاسخ: گزینه ۲

$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^{a^n} = n \log_k^a$

 می‌دانیم:



$$\begin{aligned} \log(3x+1) + 2 \log \sqrt{x-2} &= \frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 1) + \log(x+2) \rightarrow \log(3x+1) + 2 \log(x-2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log(x-1)^2 + \log(x+2) \rightarrow \log(3x+1) + \log(x-2) = \log(x-1) + \log(x+2) \\ &\rightarrow \log(3x+1)(x-2) = \log(x-1)(x+2) \rightarrow (3x+1)(x-2) = (x-1)(x+2) \\ &\rightarrow 3x^2 - 6x + x - 2 = x^2 + 2x - x - 2 \rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow 2x(x-3) = 0 \\ &\rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = 3 & \text{ق ق} \end{cases} \end{aligned}$$

(زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را منفی می‌کند) غ ق ق

۷۹. اگر $\log 2 = \frac{b}{2}$ باشد، مقدار $\log 12.5$ چه قدر است؟

$\frac{3-b}{2}$ (۴) $4+3b$ $\frac{4-3b}{2}$ (۲) $\frac{3b-4}{2}$ (۱)

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \log 12.5 &= \log \frac{25}{2} = \log 25 - \log 2 = \log 5^2 - \log 2 = 2 \log 5 - \log 2 \\ &= 2(1 - \log 2) - \log 2 = 2 - 3 \log 2 = 2 - \frac{3b}{2} = \frac{4-3b}{2} \end{aligned}$$

۸۰. اگر $\log_{15}^3 = a$ باشد $\log_{15}^{75}$ چه قدر است؟

$-\frac{2}{a}$ (۴) $2-a$ $\frac{2}{a}$ (۲) $a+2$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b$$

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \log_{15}^{75} &= \log_{15}^{5 \times 15} = \log_{15}^{15} + \log_{15}^5 = 1 + \log_{15}^{\frac{5}{3}} \\ &= 1 + \log_{15}^{15} - \log_{15}^3 = 1 + 1 - a = 2 - a \end{aligned}$$

۸۱. جواب معادله $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 20$ در کدام بازه قرار دارد؟

$(-6, -5)$ (۴) $(-5, -4)$ $(-4, -3)$ (۲) $(-3, -2)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 20 \rightarrow 2^{-x} = 20 \quad \text{و} \quad 16 < 20 < 32 \rightarrow 2^4 < 2^{-x} < 2^5$$

$$\rightarrow 4 < -x < 5 \rightarrow -4 > x > -5$$



۸۲. دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \log_{49-x^2} x^2 - 1$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۵ (۴)

۴

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد و مبنای لگاریتم باید مثبت باشد و مخالف یک باشد.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 1 > 0 \rightarrow x^2 > 1 \rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 49 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 49 \rightarrow -7 < x < 7 \\ 49 - x^2 \neq 1 \rightarrow x^2 \neq 48 \rightarrow x \neq \pm 4\sqrt{3} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (-7, -1) \cup (1, 7) - \{\pm 4\sqrt{3}\}$$

دامنه‌ی تعریف تابع شامل اعداد طبیعی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ می‌باشد.

۸۳. اگر $\log 3 = \frac{x}{2}$ باشد، $\log \sqrt[3]{729}$ بر حسب x به کدام صورت می‌باشد؟

$$\frac{3x - 2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{2x - 3}{3}$$

$$2x - 3 \quad (۲)$$

$$\frac{3x - 2}{2x - 3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^{a^n} = n \log_k^a \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\log 3 = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \log 3 \Rightarrow x = \log 9$$

$$\log \sqrt[3]{729} = \log \sqrt[3]{729 \times 10^{-2}} = \log \sqrt[3]{9^3 \times 10^{-2}}$$

$$= \log 9 \times 10^{-\frac{2}{3}} = \log 9 + \log 10^{-\frac{2}{3}} = x - \frac{2}{3} = \frac{3x - 2}{3}$$

۸۴. وارون تابع $f(x) = \frac{3^{2x} - 3^{-2x}}{3^{2x} + 3^{-2x}}$ کدام است؟ (مبنای تمام توابع لگاریمی ۳ است).

$$y = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (۲)$$

$$y = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad (۱)$$

$$y = \frac{1}{4} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (۴)$$

$$y = \frac{1}{4} \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

پاسخ: گزینه ۴ برای محاسبه وارون انجام یک تغییر متغیر به حل مسئله کمک می‌نماید.

$$3^{2x} = t \rightarrow f(x) = \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \xrightarrow{t=3^{2x}} y = \frac{3^{4x} - 1}{3^{4x} + 1} \xrightarrow{\text{وارون}} x = \frac{3^{4y} - 1}{3^{4y} + 1}$$

$$\rightarrow 3^{4y} - 1 = 3^{4y} \cdot x + x \rightarrow 3^{4y} - 3^{4y} \cdot x = x + 1$$



$$\rightarrow 3^{4y}(1-x) = 1+x \rightarrow 3^{4y} = \frac{1+x}{1-x} \rightarrow 4y = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \rightarrow y = \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

۸۵. از دو معادله $\log(y+2) = 1$ و $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$ مقدار x کدام است؟

۴ (۴)

۳

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log(y+2) = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} y+2 = 10^1 \rightarrow y = 8$$

$$\log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \xrightarrow{y=8} \log(8-x) + \log(4x+8) = 2$$

$$\rightarrow \log(8-x)(4x+8) = 2 \rightarrow (8-x)(4x+8) = 10^2 \rightarrow 32x + 64 - 4x^2 - 8x = 100$$

$$\rightarrow 4x^2 - 24x + 36 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

۸۶. نمودار وارون تابع $f(x) = 2(2^{x-1} - 1)$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۴ (۴) چهارم

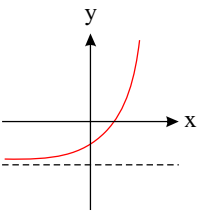
سوم

۲ (۲) دوم

۱ (۱) اول

پاسخ: گزینه ۴

داریم $f(x) = 2(2^{x-1} - 1) \Rightarrow y = 2^x - 2$ نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع f از ناحیه‌ی دوم دستگاه مختصات نمی‌گذرد. از آن جا که نمودار تابع f و نمودار وارون آن نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات قرینه هستند، پس نمودار وارون تابع f از ناحیه‌ی چهارم دستگاه مختصات نخواهد گذاشت.



۸۷. از تساوی $\log_x^{3x+8} = 2 - \log_x^{x-6}$ مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۴، کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log_k^{a^m} = \frac{m}{n} \log_k^a, \quad \log_b^N = x \rightarrow N = b^x \quad \text{می دانیم:}$$

$$\log_x^{3x+8} = 2 - \log_x^{x-6} \rightarrow \log_x^{3x+8} + \log_x^{x-6} = 2$$

$$\rightarrow \log_x^{(3x+8)(x-6)} = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} (3x+8)(x-6) = x^2$$

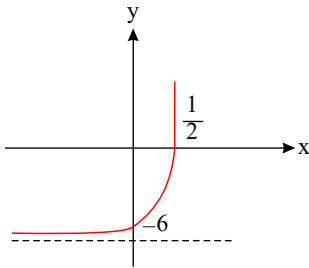
$$\rightarrow 3x^2 - 18x + 8x - 48 = x^2 \rightarrow 2x^2 - 10x - 48 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 & \text{ق ق} \\ x = -3 & \text{ق غ ق ق (جلوی لگاریتم را منفی می کند)} \end{cases}$$

$$\log_x^x \stackrel{x=8}{=} \log_8^8 = \log_{8^2}^{8^2} = \frac{3}{2}$$



۸۸. شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ است. $f(2)$ ، کدام است؟



۲۳۴ (۱)

۱۰۸ (۲)

۷۲

۱۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۱ دو نقطه داده شده را در تابع $f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ صدق می‌دهیم.

$$\begin{array}{l} 0 \\ -6 \end{array} \xrightarrow{\text{صدق}} \begin{array}{l} 0 \\ -6 \end{array} = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^b \rightarrow 3 = 3^{-b} \rightarrow -b = 1 \rightarrow b = -1$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ 0 \end{array} \xrightarrow{\text{صدق}} \begin{array}{l} \frac{1}{3} \\ 0 \end{array} = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{a}{2}-1} \rightarrow 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{a}{2}-1} \rightarrow 3^2 = 3^{-\frac{a}{2}+1} \rightarrow -\frac{a}{2} + 1 = 2 \rightarrow -\frac{a}{2} = 1$$

$$\rightarrow a = -2$$

$$\text{پس: } f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1} \rightarrow f(2) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = -9 + 3^5 = -9 + 243 = 234$$

۸۹. حاصل $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5^2 + 2}$ کدام است؟

۰٫۱ (۴)

۰٫۵

۰٫۰۱ (۲)

۰٫۰۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ و $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$ و $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5^2 + 2} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5^2 + 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5^2 + 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5^2 + \log_5^4} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5^2} = 2^{\log_5^{\frac{1}{2}}} = 2^{\log_5^{\frac{1}{2}}} = 2^{\log_5^{-1}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned}$$

۹۰. اگر $\log_x^{(3x-1)} + \log_x^{(x+1)} = 2$ باشد، حاصل $\log_x^{(x^2+x+\frac{7}{2})}$ کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_b^a = c \rightarrow a = b^c$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\log_x^{3x-1} + \log_x^{x+1} = 2 \rightarrow \log_x^{(3x-1)(x+1)} = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} (3x-1)(x+1) = x^2$$

$$\rightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 = x^2 \rightarrow 2x^2 + 2x = 1 \rightarrow x^2 + x = \frac{1}{2}$$



$$\log_p^{x^2+x+\frac{7}{2}} = \log_p^{\frac{1}{2}+\frac{7}{2}} = \log_p^{\frac{8}{2}} = \log_p^4 = \log_p^{2^2} = 2$$

۹۱. می‌دانیم $\log 2 = 0,301$ در این صورت عدد 2^{1398} چند رقمی است؟

۴۲۱ (۴)

۴۲۰

۴۱۹ (۲)

۴۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$2^{1398} \text{ تعداد ارقام} = [\log 2^{1398}] + 1 = [1398 \log 2] + 1 = [1398(0,301)] + 1 \\ = [420,798] + 1 = 420 + 1 = 421$$

اگر n یک عدد طبیعی باشد آن گاه تعداد ارقام n برابر است با: $[\log n] + 1$.

۹۲. اگر $\begin{cases} \log_2^x - \log_2^{2y} = 3 \\ x^2 + 2y^2 = 86 \end{cases}$ باشد، حاصل $\log_9^{(\sqrt[5]{3}y^2)}$ چقدر است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$-\frac{2}{5}$

$\frac{5}{3}$ (۲)

$\frac{3}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم: $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \log_b^a = k \rightarrow a = b^k, \log_{k^n}^{a^m} = \frac{m}{n} \log_k^a$

$$\log_2^x - \log_2^{2y} = 3 \rightarrow \log_2^{2y} = 3 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{x}{2y} = 2^3 \rightarrow x = 16y$$

$$x^2 + 2y^2 = 86 \rightarrow (16y)^2 + 2y^2 = 86 \rightarrow 256y^2 + 2y^2 = 86 \rightarrow 258y^2 = 86 \rightarrow y^2 = \frac{86}{258} \rightarrow y^2 = \frac{1}{3}$$

$$\log_9^{(\sqrt[5]{3}y^2)} = \log_{3^2}^{3^{\frac{1}{5}} \times \frac{1}{3}} = \log_{3^2}^{3^{\frac{1}{5}} \times 3^{-1}} = \log_{3^2}^{3^{-\frac{4}{5}}} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{2}{1}} = -\frac{2}{5}$$

۹۳. دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{\log_3^{\frac{x-1}{x+1}}}$ کدام است؟

$x > 1$ (۲)

$x < -1$ یا $x > 1$ (۱)

$x < -1$ یا $x \geq 1$ (۴)

$x < -1$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\log_a^A \geq m \xrightarrow{a>1} A \geq a^m$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} > 0 \mid \begin{array}{c|cccc} -\infty & -1 & 1 & +\infty \\ + & \text{ن} & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ \log_3^{\frac{x-1}{x+1}} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{-2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

اشتراک $\rightarrow x < -1$



۹۴. اگر $\log 2 = 0,301$ باشد آنگاه عدد 2^{100} چند رقمی است؟

۳۳ (۴)

۳۲

۳۱ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

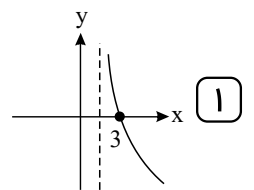
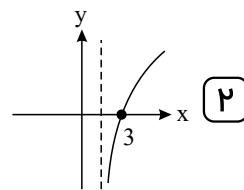
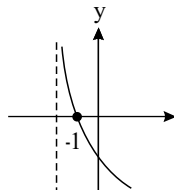
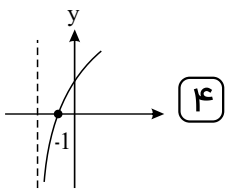
می دانیم: $\log_k a^n = n \log_k a$

$$\log 2^{100} = 100 \log 2 = 100(0,301) = 30,1$$

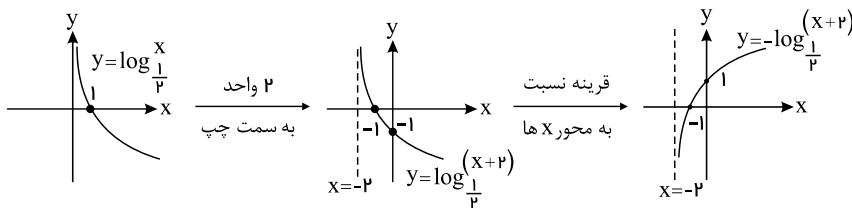
$$\text{تعداد ارقام} = [30,1] + 1 = 30 + 1 = 31$$

اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه تعداد ارقام n برابر است با $[\log n] + 1$.

۹۵. نمودار تابع $y = -\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ شبیه کدام گزینه است؟



پاسخ: گزینه ۴ برای رسم نمودار $y = -\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ به ترتیب زیر عمل می کنیم.



۹۶. یک دانش آموز، بعد از شرکت در n آزمون می تواند به درصد $f(x) = 100 - 90(2^{-0,4n})$ در درس ریاضی برسد. بعد از شرکت در چند آزمون انتظار می رود این دانش آموز به درصد ۷۰ در درس ریاضی برسد؟

$$(\log_2 3 \simeq 1,6)$$

۶ (۴)

۳

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می دانیم $\log_k a^n = n \log_k a$ است.

$$f(n) = 100 - 90(2^{-0,4n}) = 70 \rightarrow 100 - 70 = 90(2^{-0,4n})$$

$$\rightarrow 30 = 90(2^{-0,4n}) \rightarrow 2^{-0,4n} = \frac{1}{3} \rightarrow 2^{-0,4n} = 2^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{لگاریتم در مبنای ۲}} \log_2 2^{-0,4n} = \log_2 2^{-1} \rightarrow -0,4n = -1 \log_2 2$$



$$\rightarrow -0.4n = -1 \times 1.6 \rightarrow -0.4n = -1.6 \rightarrow n = 4$$

۹۷. مجموعه جواب نامعادله $\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{x-1} > 0.8$ شامل چند عدد طبیعی می باشد؟

۴ (۴)

۳

۲ (۲)

۱ (۱)

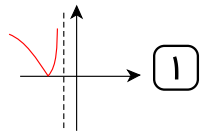
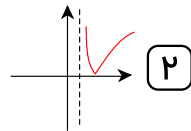
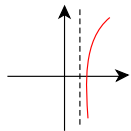
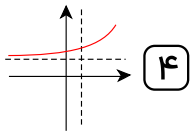
پاسخ: گزینه ۲ نکته: در نامعادلات نمایی داریم:

$$a^x < a^y \Rightarrow \begin{cases} x < y & a > 1 \\ x > y & 0 < a < 1 \end{cases}$$

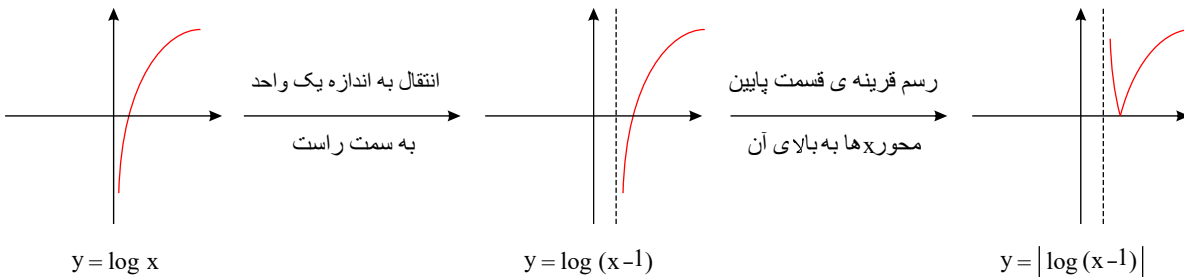
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{x-1} > \frac{8}{100} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{x-1} > \frac{2}{25} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{x-1} > \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 \xrightarrow{\text{جهت عوض می شود}} x-1 < 2 \rightarrow x < 3$$

که جواب نامعادله شامل دو عدد طبیعی می باشد $(x = 1, 2)$.

۹۸. نمودار $y = |\log(x-1)|$ به کدام صورت است؟



پاسخ: گزینه ۲



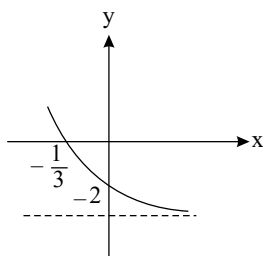
۹۹. شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$ ، کدام است؟

۶۰ (۲)

۵۴ (۱)

۲۸ (۴)

۴۸



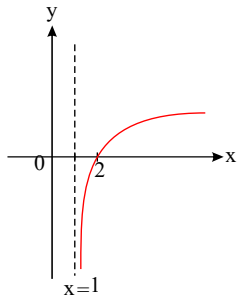
پاسخ: گزینه ۲ دو نقطه داده شده را در تابع $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ صدق می دهیم.

$$\begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = -4 + 2^b \rightarrow 2^b = 2 \rightarrow b = 1$$

$$\begin{cases} -1/3 \\ 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = -4 + 2^{\frac{-1}{3}a+1} \rightarrow 2^{\frac{-1}{3}a+1} = 2^2 \rightarrow -\frac{1}{3}a + 1 = 2 \rightarrow a = -3$$



پس $f(x) = -4 + 2^{-3x+1} \rightarrow f\left(\frac{-5}{3}\right) = -4 + 2^{5+1} = -4 + 64 = 60$



۱۰۰. نمودار تابع $y = \log_p^{(x-a)} + b$ به صورت مقابل است. $a + b$ کدام است؟

۱ ☐ ۲

صفر ☐ ۱

۲ ☐ ۴

-۱

پاسخ: گزینه ۲

$$y = \log_p^{(x-a)} + b \rightarrow x - a > 0 \rightarrow x > a \left\{ \begin{array}{l} D_f = (1, +\infty) \rightarrow x > 1 \end{array} \right\} \rightarrow a = 1$$

$$y(2) = 0 \rightarrow \log_p^{2-a} + b = 0 \rightarrow \log_p^1 + b = 0 \rightarrow 0 + b = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow a + b = 1$$

۱۰۱. اگر x_1 و x_2 جواب های معادله $\log_3^{(9^x+18)} = 2 + x$ باشند، مقدار $|x_2 - x_1|$ کدام است؟

۱ + $\log_3^6$ ☐ ۴

۱ - $\log_3^6$

$\log_3^6$ ☐ ۲

$\log_3^2$ ☐ ۱

پاسخ: گزینه ۱

می دانیم $\log_b^a = c \rightarrow b^c = a$ و $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$ است.

$$\log_3^{(9^x+18)} = 2 + x \rightarrow 3^{(2+x)} = 9^x + 18 \rightarrow 3^2 \times 3^x = (3^2)^x + 18$$

$$\rightarrow 9 \times 3^x = (3^x)^2 + 18 \xrightarrow{3^x=A} 9A = A^2 + 18 \rightarrow A^2 - 9A + 18 = 0$$

$$\rightarrow (A-3)(A-6) = 0 \left\{ \begin{array}{l} A=3 \rightarrow 3^x = 3 \rightarrow x_1 = 1 \\ A=6 \rightarrow 3^x = 6 \rightarrow x_2 = \log_3^6 \end{array} \right.$$

$$|x_2 - x_1| = |\log_3^6 - 1| = |\log_3^6 - \log_3^3| = |\log_3^2| = \log_3^2$$

۱۰۲. اگر $\log_a^x = 3$ ، $\log_b^x = 6$ و $\log_c^x = 12$ باشد، $\log_{abc}^x$ برابر است با

$\frac{12}{7}$ ☐ ۴

$\frac{3}{4}$

۹۶ ☐ ۲

$\frac{1}{96}$ ☐ ۱

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_k^a = \frac{1}{\log_a^k}, \quad \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$$

می دانیم:



$$\begin{cases} \log_a^x = 3 \Rightarrow \log_x^a = \frac{1}{3} \\ \log_b^x = 6 \Rightarrow \log_x^b = \frac{1}{6} \\ \log_c^x = 12 \Rightarrow \log_x^c = \frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} \Rightarrow \log_x^{abc} = \frac{7}{12} \Rightarrow \log_{abc}^x = \frac{12}{7}$$

۱۰۳. اگر $\log_6^3 = 0.8$ باشد، مقدار $\log_{12}^6$ کدام است؟

$$\frac{7}{9} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4}$$

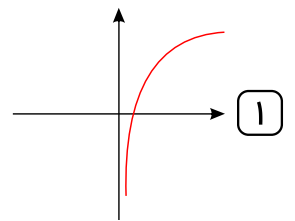
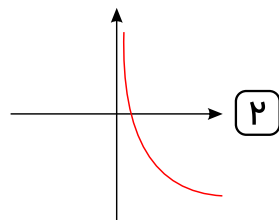
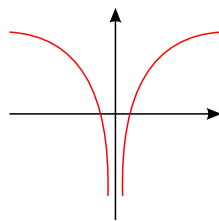
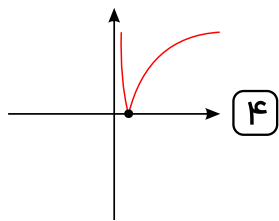
$$\frac{8}{11} \quad (2)$$

$$\frac{13}{18} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم که $\log_k^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^k}$ و $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$ و $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$ است.

$$\log_{12}^6 = \frac{\log_6^6}{\log_6^{12}} = \frac{\log_6^2 + \log_6^3}{\log_6^2 + \log_6^3} = \frac{\log_6^2 + 0.8}{1 + 0.8} = \frac{\frac{1}{2} + 0.8}{1.8} = \frac{1.3}{1.8} = \frac{13}{18}$$

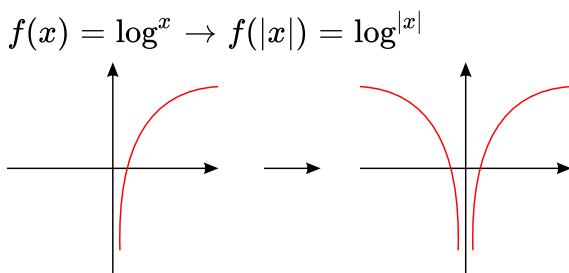
۱۰۴. نمودار $y = \frac{1}{2} \log^{x^2}$ کدام گزینه می‌باشد؟



پاسخ: گزینه ۳ می‌توان تابع را ساده کرد ولی باید دقت نمائیم. دامنه تابع تغییر نکند.

$$y = \frac{1}{2} \log^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2 \log^{|x|} = \log^{|x|}$$

پس نمودار نهایی به شکل زیر می‌باشد:



۱۰۵. اگر $\log_a^x = 1 - 2 \log_a^3$ ، آنگاه لگاریتم x در مبنای $\frac{\sqrt{a}}{3}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$ ، $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$ ، $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$



$$\log_a^x = 1 - 2 \log_a^3 \Rightarrow \log_a^x + \log_a^9 = 1 \Rightarrow \log_a^{9x} = 1 \Rightarrow 9x = a \Rightarrow x = \frac{a}{9}$$

$$\log_{\frac{\sqrt{a}}{3}}^x = \log_{\frac{\sqrt{a}}{3}}^{\frac{a}{9}} = \log_{\frac{\sqrt{a}}{3}}^{\left(\frac{\sqrt{a}}{3}\right)^2} = 2$$

۱۰۶. اگر $A = \sqrt{2} - 1$ ، $B = \sqrt{2} + 1$ حاصل $\log_2(-\sqrt[5]{A^2 - B^2})$ کدام است؟

$-\sqrt{2}$ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ $-\frac{1}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{A^2 - B^2} &= \sqrt[5]{(\sqrt{2} - 1)^2 - (\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt[5]{(2 + 1 - 2\sqrt{2}) - (2 + 1 + 2\sqrt{2})} \\ &= \sqrt[5]{-4\sqrt{2}} = -\sqrt[5]{2^2 \times 2^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt[5]{2^{\frac{5}{2}}} = -(2^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}} = -2^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\log_2(-\sqrt[5]{A^2 - B^2}) = \log_2 \sqrt[5]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

۱۰۷. لگاریتم عددی در مبنای ۹ از لگاریتم عکس مجذور آن در پایه ۹ به اندازه $\frac{4}{5}$ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

81 (۱) 36 (۲) 18 27 (۴)

پاسخ: گزینه ۴

می دانیم: $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$ ، $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

$$\log_9^x = \log_9^{\frac{1}{x^2}} + \frac{4}{5} \rightarrow \log_{3^2}^x = \log_{3^2}^{x^{-2}} + \frac{4}{5} \rightarrow \frac{1}{2} \log_3^x = -\log_3^x + \frac{4}{5}$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \log_3^x = \frac{4}{5} \rightarrow \log_3^x = \frac{8}{15} \xrightarrow{\text{تعریف}} x = 3^{\frac{8}{15}} = 27$$

۱۰۸. اگر $\log_2(x + 10) = \frac{1}{2} \log(x - 2)$ باشد، آنگاه $\log_2^{x+2}$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۱) 3 (۲) $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{4}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$



$$\log(x-2) = \frac{1}{2} \log(x+10) \Rightarrow 2 \log(x-2) = \log(x+10) \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+10)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 - 4x = x + 10 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{غیر قابل قبول است چون جلوی لگاریتم را منفی می‌کند} \\ x = 6 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\log_7^{x+2} \stackrel{x=6}{=} \log_7^8 = \log_7^{2^3} = 3$$

۱۰۹. از معادله $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3)$ مقدار $\log_4(x - 3)$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۱)
 $\frac{3}{2}$
 $\frac{1}{2}$ (۲)
 -1 (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \quad \log_b^N = x \rightarrow b^x = N, \quad \log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

 می‌دانیم:

$$\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3) \rightarrow \log_3(x^2 - 1) - \log_3(x + 3) = 1$$

$$\rightarrow \log_3 \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 3 \rightarrow x^2 - 1 = 3x + 9 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 & \text{ق ق} \\ x = -2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

ولی برای محاسبه $\log_4^{(x-3)}$ جای x فقط می‌توان $x = 5$ را قرار داد.

$$\log_4^{(x-3)} \stackrel{x=5}{=} \log_4^2 = \frac{1}{2}$$

۱۱۰. اگر انرژی آزاد شده در یک زلزله $10^{18} \times 2.5$ ارگ باشد، قدرت آن زلزله چند ریشتر بوده است؟

$$(\log 2 \simeq 0.3, \log E = 11.8 + 1.5M)$$

4.8 (۴)
 4.6
 4.4 (۲)
 4.2 (۱)

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$ و $\log \frac{a}{b} = \log_k^a - \log_k^b$ و $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$ است.

$$E = 2.5 \times 10^{18} \rightarrow \log(2.5 \times 10^{18}) = 11.8 + 1.5M$$

$$\rightarrow \log 2.5 + \log 10^{18} = 11.8 + 1.5M \rightarrow \log\left(\frac{10}{4}\right) + 18 = 11.8 + 1.5M$$

$$\rightarrow (\log 10 - 2 \log 2) + 18 = 11.8 + 1.5M \rightarrow 1 - 2(0.3) + 18 = 11.8 + 1.5M$$

$$\rightarrow 18.4 - 11.8 = 1.5M \rightarrow 6.6 = 1.5M \rightarrow M = 4.4$$



۱۱۱. اگر $\log_3^a = a$ باشد، حاصل $\log_6^{18}$ کدام است؟

$$\frac{2a+1}{a+1} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{a+1}{2a}$$

$$\frac{a+2}{a+1} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{a}{2a+1} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

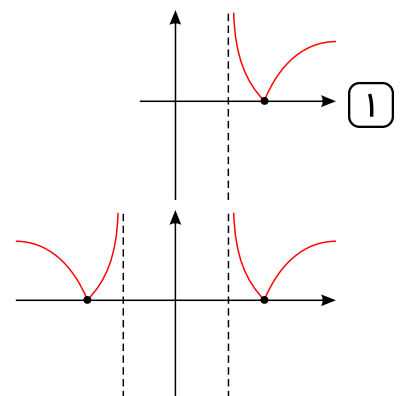
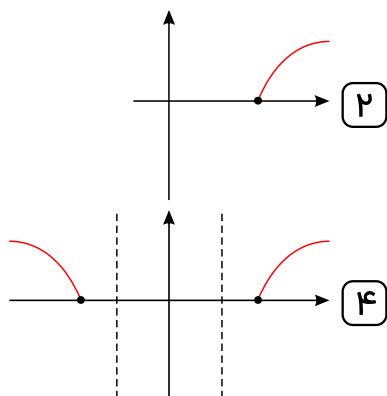
می‌دانیم $\log_k^a = \frac{1}{\log_a^k}$ و $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$ است.

$$\log_6^{18} = \log_6^{(3 \times 6)} = \log_6^3 + \log_6^6 = \log_6^3 + 1 = \frac{1}{\log_3^6} + 1$$

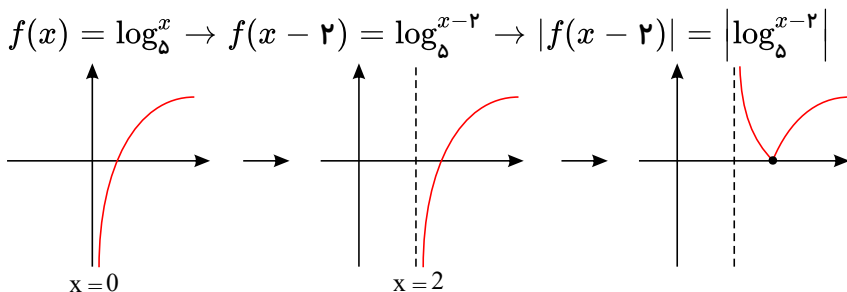
$$= \frac{1}{\log_3^{3 \times 2}} + 1 = \frac{1}{\log_3^3 + \log_3^2} + 1 = \frac{1}{1 + \log_3^2} + 1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} + 1$$

$$= \frac{1}{\frac{a+1}{a}} + 1 = \frac{a}{a+1} + 1 = \frac{2a+1}{a+1}$$

۱۱۲. نمودار تابع $y = |\log_5^{x-2}|$ کدام گزینه است؟



پاسخ: گزینه ۱ ابتدا:



۱۱۳. اگر $\log 2 = k$ ، آن گاه حاصل $A = \frac{1}{2} \log(7 + 2\sqrt{6}) + \log(\sqrt{6} - 1)$ کدام است؟

$$2k \quad \boxed{۴}$$

$$1 - k$$

$$2 - 2k \quad \boxed{۲}$$

$$k \quad \boxed{۱}$$



پاسخ: گزینه ۳

$$\log_k^{a^n} = n \log_k^a, \quad \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \quad \log 5 = 1 - \log 2 \quad \text{می دانیم:}$$

$$A = \frac{1}{2} \log(7 + 2\sqrt{6}) + \log(\sqrt{6} - 1) = \frac{1}{2} \log(\sqrt{6} + 1)^2 + \log(\sqrt{6} - 1)$$

$$= \log(\sqrt{6} + 1) + \log(\sqrt{6} - 1) = \log(\underbrace{(\sqrt{6} + 1)(\sqrt{6} - 1)}_{\text{مزدوج}}) = \log(6 - 1) = \log 5 = 1 - \log 2 = 1 - k$$

$$(\sqrt{6} + 1)^2 = 6 + 1 + 2\sqrt{6} = 7 + 2\sqrt{6} \quad \text{دقت کنید:}$$

$$114. \text{ اگر } A = \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{A}} - \log_{\sqrt{2}}^2 = 3 \log_{\sqrt{2}}^2 \text{ باشد مقدار } \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{A}} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{3}{2} \quad \boxed{4} \quad 1 \quad -1 \quad \boxed{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a \quad \text{می دانیم:}$$

$$3 \log_{\sqrt{2}}^2 - \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{A}} = A \Rightarrow 3 \log_{\sqrt{2}}^2 - \log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{A}} = \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2^{-1}}} = \log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$$

$$115. \text{ حاصل } [\log_3^7] + [\log_7^3] \text{ کدام است؟ (} [] \text{، نماد جزء صحیح است)}$$

$$\circ \quad \boxed{4} \quad 2 \quad 3 \quad \boxed{2} \quad 1 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$3^1 < 7 < 3^2 \Rightarrow \log_3^1 < \log_3^7 < \log_3^3 \Rightarrow 1 < \log_3^7 < 2 \Rightarrow [\log_3^7] = 1$$

$$7^0 < 3 < 7^1 \Rightarrow \log_7^0 < \log_7^3 < \log_7^7 \Rightarrow 0 < \log_7^3 < 1 \Rightarrow [\log_7^3] = 0$$

$$\Rightarrow [\log_3^7] + [\log_7^3] = 1 + 0 = 1$$

۱۱۶. تکثیر گونه‌ای از باکتری‌ها به این صورت است که هر باکتری بعد از مدت زمان یک ربع ساعت به دو قسمت

تقسیم می‌شود. اگر نوع خاصی از یک بیماری با تعداد ۵۰ باکتری شروع شود، پس از گذشت چند ساعت تعداد

باکتری‌های تولیدشده به ۱۲۸۰۰ خواهد رسید؟ (با فرض این که هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نرود.)

$$4 \quad \boxed{4} \quad 16 \quad 2 \quad \boxed{2} \quad 8 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ اندازه توده باکتری پس از t ساعت به صورت زیر محاسبه می‌شود.



$$P(t) = 50 \times 2^{\frac{t}{4}} \rightarrow P(t) = 50 \times 2^{4t}$$

$$12800 = 50 \times 2^{4t} \rightarrow 2^{4t} = \frac{12800}{50} \rightarrow 2^{4t} = 256 \rightarrow 2^{4t} = 2^8 \rightarrow 4t = 8 \rightarrow t = 2 \text{ ساعت}$$

۱۱۷. برد تابع $f(x) = \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3-x} + \sqrt{x-3} + 1)$ کدام گزینه است؟

(۱) $[8, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 8]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $\{8\}$

پاسخ: گزینه ۴ باتوجه به وجود دو عبارت قرینه تعیین دامنه تابع به حل مسئله کمک می نماید.

$$f(x) = \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} + 1)$$

$$(I) x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \quad (II) 3 - x \leq 0 \rightarrow x \leq 3 \quad (I) \cap (II) \rightarrow D_f = \{3\}$$

برای محاسبه کافیت $f(3)$ را محاسبه نمائیم.

$$f(3) = \log_{\sqrt{3}}^1 = \log_{\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

پس می توان گفت:

$$R_f = \{2\}$$

۱۱۸. اگر $\log \frac{1}{a} = 2,124$ باشد آن گاه عدد a^5 بعد از ممیز چند صفر کنار هم دارد؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم: $\log_k^a = n \log_k^a$

$$\log \frac{1}{a} = 2,124 \rightarrow \log a^{-1} = 2,124 \rightarrow -\log a = 2,124 \rightarrow \log a = -2,124$$

$$\text{تعداد صفرهای کنار هم بعد از ممیز} = |\log a^5| + 1 = |5 \log a| + 1 = |5(-2,124)| + 1 =$$

$$= |[-10,62]| + 1 = |-11 + 1| = |-10| = 10$$

اگر a یک عدد اعشاری کمتر از یک باشد تعداد صفرهای کنار هم بعد از ممیز از رابطه ی $|\log a| + 1$ بدست می آید.

۱۱۹. اگر $\log_{x-1}^{3x-1} = 3$ ، آنگاه $\log_{\frac{1}{3}}^{2x+3}$ چقدر است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) -۲

پاسخ: گزینه ۴

می دانیم: $\log_k^a = \frac{n}{m} \log_k^a$, $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$



$$\log_{x-1}^{x-1} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} (x-1)^1 = x-1 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x-1$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ ق ق کند (جلوی لگاریتم را منفی می کند)} \\ x = 3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}^{(3+3)} = \log_{\frac{1}{3}}^9 = \log_{3^{-1}}^{3^2} = -2 \end{cases}$$

۱۲۰. از معادله $\log_3(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}}) = -2$ مقدار x کدام است؟

۲۴ (۴)

۲۷

۸ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ می دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$, $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

دقت کنید که:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{9}}} = x^{\frac{1}{27}}$$

بنابراین:

$$\log_3 \log_3^{x^{\frac{1}{27}}} = -2 \xrightarrow{\text{تعریف}} \log_3^{x^{\frac{1}{27}}} = 3^{-2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{27} \log_3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow \log_3^x = 3 \xrightarrow{\text{تعریف}} x = 3^3 = 27$$

۱۲۱. اگر $\log xy^2 = 2$ و $\log x^2 y = 4$ باشد. حاصل $\log x^2 y^4$ چقدر است؟

۶ (۴)

۸

۲ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$\begin{cases} \log xy^2 = 2 \\ \log x^2 y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \log x + 2 \log y = 2 \\ 2 \log x + \log y = 4 \end{cases} \Rightarrow \log y = 0, \log x = 2$$

$$\log x^2 y^4 = \log x^2 + \log y^4 = 2 \log x + 4 \log y = 4 + 0 = 4$$

۱۲۲. حاصل $\left[\log_6^3 \right] + \left[\log_3^6 \right]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است)

۳ (۴)

۱

۰ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$6^0 < 3 < 6^1 \Rightarrow \log_6^0 < \log_6^3 < \log_6^6 \Rightarrow 0 < \log_6^3 < 1 \Rightarrow [\log_6^3] = 0$$

$$3^1 < 6 < 3^2 \Rightarrow \log_3^1 < \log_3^6 < \log_3^9 \Rightarrow 1 < \log_3^6 < 2 \Rightarrow [\log_3^6] = 1$$

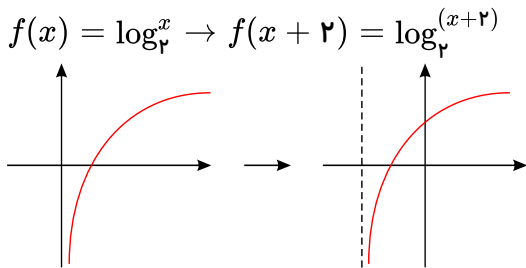
$$[\log_6^3] + [\log_3^6] = 0 + 1 = 1$$



۱۲۳. نمودار $y = \log_p^{|x|+2}$ در کدام بازه نزولی است؟

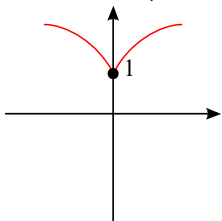
- ☐ ۱ $\mathbb{R}$
 ☐ ۲ $[0, +\infty)$
 ☐ ۳ $(-\infty, 0]$
 ☐ ۴ $[-2, +2]$

پاسخ: گزینه ۳ برای رسم به مراحل زیر توجه نمائید:



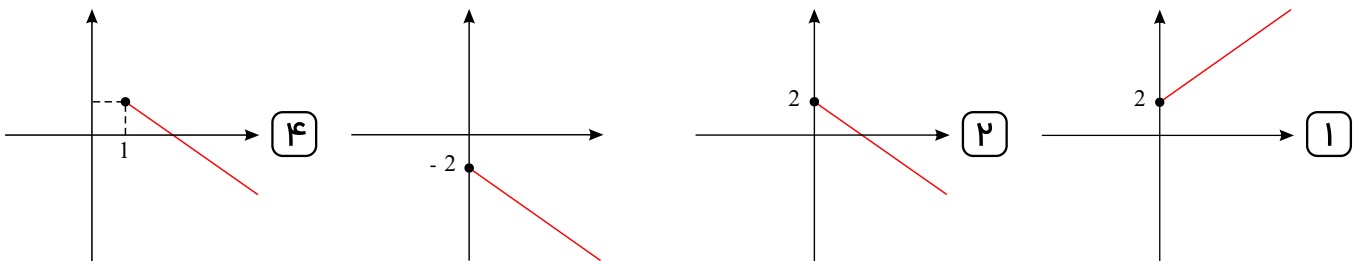
حال $g(x) = \log_p^{(x+2)}$ را فرض کنیم:

$$g(x) = \log_p^{(x+2)} \rightarrow g(|x|) = \log_p^{(|x|+2)}$$



حال سمت چپ نمودار $g(x)$ را حذف کرده و سمت راست را قرینه می‌نمائیم. باتوجه به نمودار تابع در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.

۱۲۴. نمودار $\sqrt[r]{\log^x} = \sqrt[r]{\log^{(2-y)}}$ کدام است؟

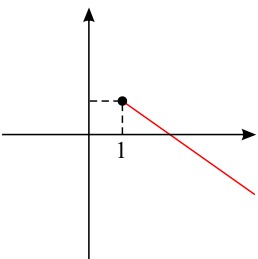


پاسخ: گزینه ۴ برای یافتن نمودار تابع علاوه بر ساده‌سازی نیاز به تعیین دامنه داریم.

$$\sqrt[r]{\log^x} = \sqrt[r]{\log^{2-y}} \xrightarrow{(\cdot)^r} \log^x = \log^{2-y} \rightarrow 2 - y = x \rightarrow y = -x + 2$$

$$\begin{aligned} \log^x &\geq 0 & \log^{2-y} &\geq 0 \\ x &\geq 1 & 2 - y &\geq 1 \\ & & y &\leq 1 \end{aligned}$$

باتوجه به دامنه تعیین شده نمودار را رسم می‌نماییم.





۱۲۵. اگر $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ و $\log_{16}^{2x} + \log_4^y = 1$ ، مقدار y چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

☐ ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
☐ ۲ $\frac{2}{3}$
☐ ۳ $\frac{1}{2}$
☐ ۴ ۲

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = \frac{1}{n} \log_k^a$ ، $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$ ، $\log_b^a = c \rightarrow a = b^c$

$$3^{x-1} + 3^{x+1} = 90 \rightarrow 3^x \times 3^{-1} + 3^x \times 3 = 90 \rightarrow 3^x(3^{-1} + 3) = 90 \rightarrow 3^x\left(\frac{1}{3} + 3\right) = 90$$

$$\rightarrow 3^x\left(\frac{10}{3}\right) = 90 \rightarrow 3^x = \frac{90}{\frac{10}{3}} = 27 = 3^3 \rightarrow x = 3$$

$$\log_{16}^{2x} + \log_4^y = 1 \xrightarrow{x=3} \log_{16}^6 + \log_4^y = 1 \rightarrow \log_{16}^6 + \log_4^y = 1 \rightarrow \frac{1}{2} \log_4^6 + \log_4^y = 1$$

$$\rightarrow \log_4^{\sqrt{6}} + \log_4^y = 1 \rightarrow \log_4^{\sqrt{6}y} = 1 \rightarrow \sqrt{6}y = 4 \rightarrow y = \frac{4}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

۱۲۶. اگر $2^{x-1} + 2^{x+2} = \frac{9}{8}$ ، آن گاه حاصل لگاریتم $|x^3 - 1|$ در پایه‌ی ۳ کدام است؟

☐ ۱ ۱
 ☐ ۲ $\frac{3}{2}$
☐ ۳ $\frac{1}{2}$
☐ ۴ ۲

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$

$$2^{x-1} + 2^{x+2} = \frac{9}{8} \rightarrow 2^x \times 2^{-1} + 2^x \times 2^2 = \frac{9}{8} \rightarrow 2^x(2^{-1} + 2^2) = \frac{9}{8}$$

$$\rightarrow 2^x\left(\frac{1}{2} + 4\right) = \frac{9}{8} \rightarrow 2^x\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{8} \rightarrow 2^x = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 2^{-2} \rightarrow x = -2$$

$$\log_3^{|x^3-1|} = \log_3^{|-8-1|} = \log_3^{|-9|} = \log_3^9 = \log_3^{3^2} = 2$$

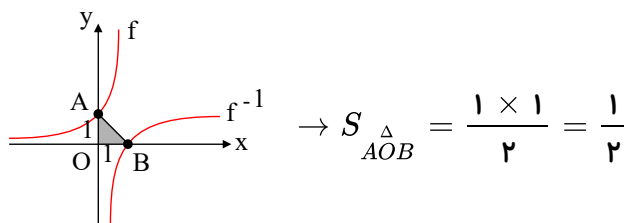
۱۲۷. تابع نمایی $y = 3^x$ محور y ها را در نقطه‌ی A قطع می‌کند معکوس این تابع محور x ها را در نقطه‌ی B قطع می‌کند. مساحت مثلث ABO کدام است؟

☐ ۱ ۲
 ☐ ۲ $\frac{1}{2}$
☐ ۳ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
☐ ۴ $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$y = 3^x \xrightarrow{x=0} y = 3^0 = 1 \rightarrow A|_1$$

چون نقطه‌ی B در معکوس تابع صدق می‌کند پس جای x و y عوض می‌شود یعنی $B|_1$ است.



۱۲۸. اگر $3^{2x} - 2 \times 3^x = -1$ و $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[9]{3} = \frac{y}{8}$ باشد، حاصل $\log_{(x+y)}^{5y}$ کدام است؟

۲ (۴)

۴

۱ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

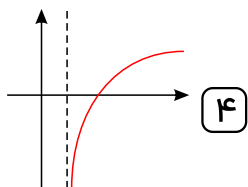
می‌دانیم $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$ است.

$$3^{2x} - 2 \times 3^x = -1 \rightarrow (3^x)^2 - 2 \times (3^x) + 1 = 0 \rightarrow (3^x - 1)^2 = 0 \rightarrow 3^x = 1 \rightarrow x = 0$$

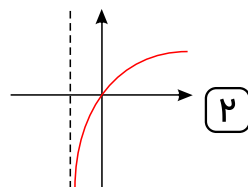
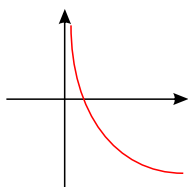
$$\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[9]{3} = \frac{y}{8} \rightarrow \log_{\frac{1}{8}} 3^{\frac{1}{9}} = \frac{y}{8} \rightarrow \log_{\frac{1}{8}} 3^{\frac{1}{9}} = \frac{y}{8} \rightarrow \log_{\frac{1}{8}} 3^{\frac{1}{9}} = \frac{y}{8} \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{y}{8} \rightarrow y = 5$$

$$\log_{(x+y)}^{5y} = \log_{\frac{5}{5}}^{25} = \log_{\frac{5}{5}}^{25} = 2$$

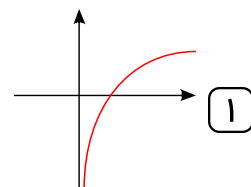
۱۲۹. نمودار $y = \frac{1}{5} \log^{(x-1)^5}$ کدام است؟



(۴)



(۲)

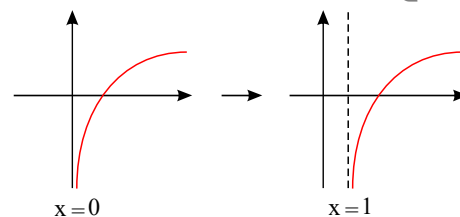


(۱)

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا باید تابع را ساده نمود، فقط دقت داشته باشید دامنه تابع تغییر نکند.

$$y = \frac{1}{5} \log^{(x-1)^5} = \frac{1}{5} \times 5 \times \log^{(x-1)} = \log^{x-1}$$

$$f(x) = \log^x \rightarrow f(x-1) = \log^{(x-1)}$$



x=0

x=1

۱۳۰. اگر $\log_{\frac{1}{2}}^{3x+4} = \log_3 \sqrt[3]{3} - \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{x+1}$ ، آن گاه حاصل $\log_{\frac{1}{8}}^{3x+4}$ کدام است؟

۳ (۴)

۳

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_{\frac{1}{2}}^{3x+4} = \log_3 \sqrt[3]{3} - \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{x+1} \rightarrow \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}^{3x+4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}}^{x+1} \xrightarrow{\times 2} \log_{\frac{1}{2}}^{3x+4} = 3 - \log_{\frac{1}{5}}^{x+1}$$

$$\rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{(3x+4)} + \log_{\frac{1}{5}}^{(x+1)} = 3$$



$$\rightarrow \log_{\delta}^{(6x+1)(x+1)} = 3 \xrightarrow{\text{تعریف}} (6x+1)(x+1) = \delta^3$$

$$\rightarrow 6x^2 + 7x + 1 = 125 \rightarrow 6x^2 + 7x - 124 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -\frac{26}{6} \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow \text{غ ق ق}$$

به ازای $x = -\frac{26}{6}$ ، $\log_{\delta}^{6x+1}$ و $\log_{\delta}^{\sqrt{x+1}}$ تعریف نشده هستند.

$$x = 4 \rightarrow \log_{\delta}^{3x+4} \stackrel{x=4}{=} \log_{\delta}^{16} = \log_{\delta^3}^{16} = \frac{4}{3}$$

۱۳۱. اگر $\log_{\delta}^2 = \frac{5}{8}$ ، آن گاه $\log_{18}^8$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{8}{11}$$

$$\frac{5}{7} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{15}{22} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم که $\log_k^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^k}$ و $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$ ، $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$ است.

$$\log_{18}^8 = \frac{\log_{\delta}^8}{\log_{\delta}^{18}} = \frac{\log_{\delta}^{2^3}}{\log_{\delta}^9 + \log_{\delta}^2} = \frac{3 \log_{\delta}^2}{2 + \log_{\delta}^2} = \frac{\frac{15}{8}}{2 + \frac{5}{8}} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{21}{8}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

۱۳۲. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = (-2a^2 + 5a - 2)x^2 + (1 - a^2)x$ یک تابع نمایی است؟

$$a \text{ هیچ مقدار} \quad \boxed{4}$$

$$2$$

$$\frac{1}{2} \quad \boxed{2}$$

$$-2 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$-2a^2 + 5a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = (1 - \frac{1}{4})x = (-\frac{3}{4})^x \checkmark \\ a = 2 \rightarrow f(x) = (1 - 4)x = (-3)^x \times \end{cases}$$

پایه باید عددی بزرگتر از صفر باشد.

۱۳۳. از معادلات $\log x = 2 \log y - \log 3$ و $9^{y-x} \times 3^{x-3} = 1$ حاصل $x + y$ کدام است؟

$$6 \quad \boxed{4}$$

$$12$$

$$4 \quad \boxed{2}$$

$$3 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$ و $n \log_k^a = \log_k^{a^n}$ است.

$$\begin{cases} \log x = 2 \log y - \log 3 \\ 9^{y-x} \times 3^{x-3} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log x = \log y^2 - \log 3 \\ 3^{2(y-x)} \times 3^{x-3} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log x = \log(\frac{y^2}{3}) \\ 3^{2y-x-3} = 3^0 \end{cases}$$



$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{3} & (1) \\ 2y - x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow 2y - \frac{y^2}{3} - 3 = 0 \rightarrow 6y - y^2 - 9 = 0$$

$$\rightarrow y^2 - 6y + 9 = 0 \rightarrow (y - 3)^2 = 0 \rightarrow y = 3 \xrightarrow{(1)} x = 3$$

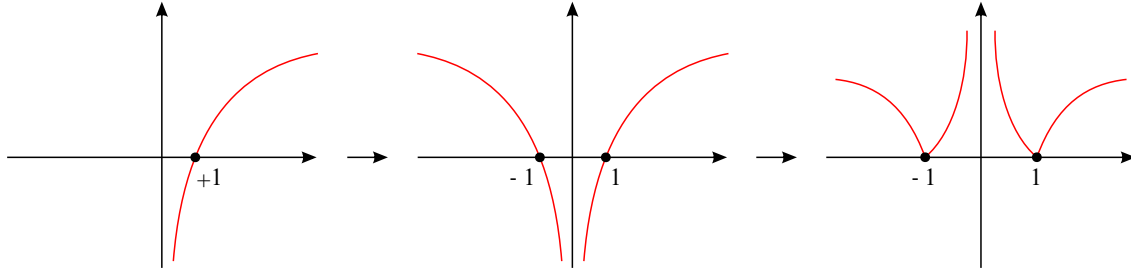
$$\rightarrow x + y = 6$$

۱۳۴. نمودار $y = |\log_3^{|x|}|$ در کدام بازه اکیداً صعودی می باشد؟

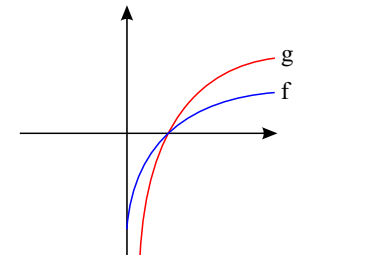
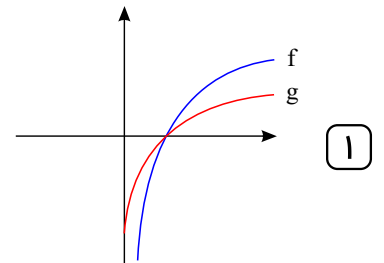
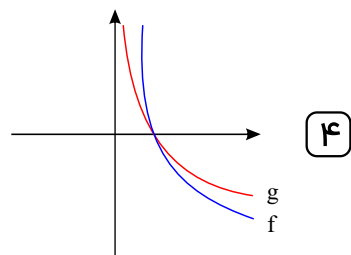
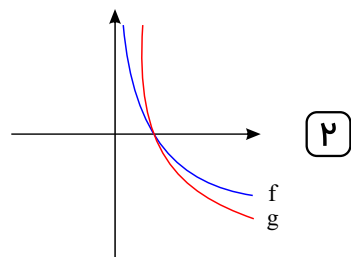
$(-\infty, 1]$ (۱) $(-\infty, -1]$ (۲) $[-1, +1]$ (۳) $[+1, +\infty)$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = \log_3^x \rightarrow f(|x|) = \log_3^{|x|} \rightarrow |f(|x|)| = |\log_3^{|x|}|$$



۱۳۵. در کدام گزینه نمودار دو تابع $f(x) = \log_3^x$ و $g(x) = \log_3^x$ صحیح رسم شده است؟



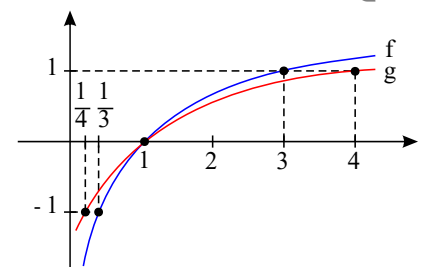
پاسخ: گزینه ۱ برای رسم می توان از روش نقطه یابی استفاده کرد.

$$f(x) = \log_3^x$$

x	$\frac{1}{3}$	۱	۳
y	-۱	۰	۱

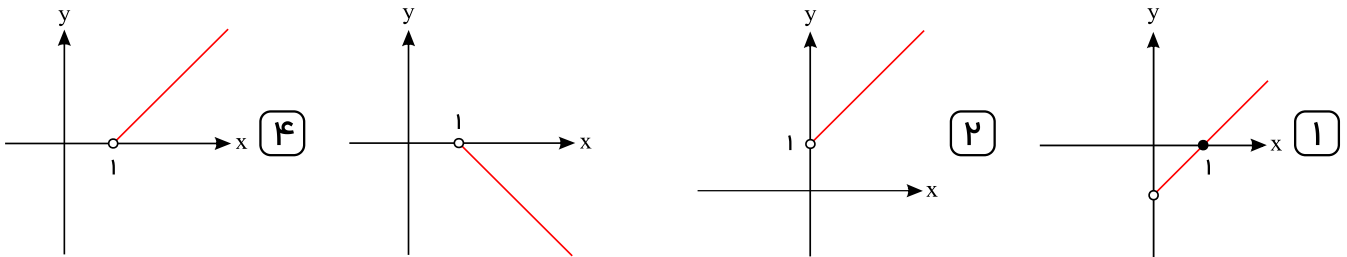
$$g(x) = \log_3^x$$

x	$\frac{1}{4}$	۱	۴
y	-۱	۰	۱



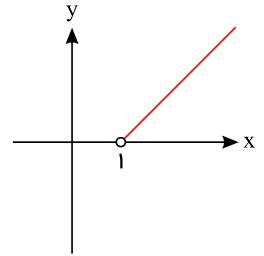


۱۳۶. نمودار تابع $\sqrt[5]{\log_3 y} = \sqrt[5]{\log_3^{(x-1)}}$ کدام است؟



پاسخ: گزینه ۴ ابتدا تابع f را ساده می‌کنیم، با رعایت این نکته که دامنه تابع تغییری نکند.

$$\sqrt[5]{\log_3 y} - \sqrt[5]{\log_3^{(x-1)}} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۵ می‌رسانیم}} \log_3 y = \log_3^{(x-1)} \Rightarrow y = x - 1, \quad \begin{cases} x > 1 \\ y > 0 \end{cases}$$



۱۳۷. اگر تساوی $\log_x^y - 2 \log_x^x = 1$ به ازای $x, y > 1$ برقرار باشد کدام تساوی درست است؟

$xy = 2$ (۴)

$y = \sqrt{x}$

$y = x^3$ (۲)

$y = x^2$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\log_y x = \frac{1}{\log_x^y} \\ \Rightarrow \log_x^y - \frac{2}{\log_x^y} = 1 \xrightarrow{\log_x^y = t} t - \frac{2}{t} = 1 \xrightarrow{\times t} t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow \log_x^y = -1 \Rightarrow x^{-1} = y \Rightarrow y = \frac{1}{x} \\ t = 2 \Rightarrow \log_x^y = 2 \Rightarrow x^2 = y \end{cases}$$

۱۳۸. نمودار تابع $f(x) = \log_2(ax - b)$ با دامنه $(-\infty, 10)$ در نقطه‌ای به طول ۹ محور طول‌ها را قطع

می‌کند. مقدار $\log_{(a+3)}^{(22-b)}$ کدام است؟

$5\sqrt{2}$ (۴)

۵

$2\sqrt{2}$ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ چون نمودار تابع f از نقطه $(9, 0)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(9) = 0 \Rightarrow \log_2^{(9a-b)} = 0 \Rightarrow 9a - b = 1 \Rightarrow b = 9a - 1 \Rightarrow f(x) = \log_2^{(ax-9a+1)}$$

چون دامنه تابع f بازه $(-\infty, 10)$ است، پس دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم و با این بازه برابر قرار می‌دهیم:

$$ax - 9a + 1 > 0 \Rightarrow ax > 9a - 1 \xrightarrow{a < 0} x < \frac{9a - 1}{a} \Rightarrow D_f = (-\infty, \frac{9a - 1}{a})$$

توجه کنید که اگر $a > 0$ آنگاه دامنه تابع به صورت $(\frac{9a - 1}{a}, +\infty)$ خواهد بود که قابل قبول نیست. پس:

$$\frac{9a - 1}{a} = 10 \Rightarrow 9a - 1 = 10a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -10$$



در نتیجه:

$$\log_{(a+3)}^{(22-b)} = \log_7^{22} = 5$$

۱۳۹. مجموع مربعات جواب‌های معادله ی $\log_7^{4x^2+8x+4} = \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2x+8}} + 3$ برابر است با:

۲۹ (۴)

۹

۳۴ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a, \quad \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}, \quad \log_b^N = x \rightarrow N = b^x$$

می‌دانیم:

ابتدا باتوجه به ویژگی‌های لگاریتم، عبارت داده شده را ساده تر می‌کنیم.

$$\log_7^{4x^2+8x+4} = \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2x+8}} + 3 \rightarrow \log_7^{4x^2+8x+4} = \log_7^{(2x+8)^{\frac{1}{2}}} + 3$$

$$\log_7^{4x^2+8x+4} = \log_7^{2x+8} + 3 \rightarrow \log_7^{4x^2+8x+4} - \log_7^{2x+8} = 3$$

$$\rightarrow \log_7^{\frac{4x^2+8x+4}{2x+8}} = 3 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{4x^2+8x+4}{2x+8} = 7^3 = 8$$

$$\Rightarrow 4x^2+8x+4 = 16x+64 \Rightarrow x^2-2x-15=0 \rightarrow (x-5)(x+3)=0 \rightarrow x=5, -3$$

هر دو جواب‌ها قابل قبولند پس مجموع مربعات جوابها، برابر $34 = 25 + 9$ است.

۱۴۰. اگر $\log(2^x + 8) = \log 2 + x \log 2$ ، آنگاه حاصل $\frac{\log_3^x + 3}{\log_3^x + 1}$ برابر کدام است؟

۲ (۴)

۳

 $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_k^{a^n} = n \log_k^a, \quad \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$$

می‌دانیم:

$$\log(2^x + 8) = \log 2 + \log 2^x \rightarrow \log(2^x + 8) = \log 2 \times 2^x \rightarrow \log(2^x + 8) = \log 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow 2^{x+1} = 2^x + 8 \Rightarrow 2^{x+1} - 2^x = 8 \Rightarrow 2^x(2^1 - 1) = 8$$

$$\Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \frac{\log_3^x + 3}{\log_3^x + 1} \xrightarrow{x=3} \frac{1+3}{1+1} = 2$$

۱۴۱. نمودار دو تابع با معادله‌های $y = \log(x^2 - 1)$ و $y = 1 + \log(x + 1)$ یکدیگر را در چند نقطه

قطع می‌کنند؟

۳ (۴)

۲

۱ (۲)

صفر (۱)



پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم: $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$, $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

کافی است دو تابع را تلاقی دهیم.

$$1 + \log(x+1) = \log(x^2-1) \rightarrow \log(x^2-1) - \log(x+1) = 1$$

$$\rightarrow \log \frac{x^2-1}{x+1} = 1 \rightarrow \log \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} = 1 \rightarrow \log(x-1) = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} x-1 = 10 \rightarrow x = 11$$

بنابراین دو تابع در یک نقطه، همدیگر را قطع می‌کنند. (توجه کنید که $x = 11$ چون در دامنه‌ی هر دو تابع قرار دارد، قابل قبول می‌باشد).

۱۴۲. جدول زیر مربوط به یک تابع نمایی است. $a \times b$ کدام است؟

x	-1	0	1	2	b
y	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{2}{5}$	a	$\frac{8}{125}$

۴٫۸ (۴)

۰٫۲۴

۰٫۴۸ (۲)

۰٫۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ در تابع نمایی وقتی ورودی‌ها (x) تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند، خروجی‌ها (y) تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند.

x	-1	0	1	2	$b = 3$
y	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{2}{5}$	$a = \frac{4}{25}$	$\frac{8}{125}$
	$\times \frac{2}{5}$	$\times \frac{2}{5}$	$\times \frac{2}{5}$	$\times \frac{2}{5}$	

پس $a = \frac{4}{25}$, $b = 3$ و $a \times b = \frac{12}{25}$ است.

۱۴۳. حاصل عبارت $\sqrt{49^{\frac{1}{2}} + \log^5 \sqrt{7}}$ کدام است؟

$7\sqrt{5}$ (۴)

$5\sqrt{35}$

$25\sqrt{7}$ (۲)

$5\sqrt{7}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

خواص مورد استفاده:

$$(I) a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}, (II) \log_{b^n}^a = \frac{1}{n} \log_b^a$$

باتوجه به خواص فوق می‌توان نوشت:

$$\sqrt{49^{\frac{1}{2}} \times 49^{\log_5^2}} = \sqrt{49^{\frac{1}{2}} \times 49^{\log_5^2}} = \sqrt{\sqrt{49} \times (5^2)^{\log_5^2}} = \sqrt{7 \times (5^2)^2} = 5^2 \sqrt{7} = 25\sqrt{7}$$

۱۴۴. انرژی یک زلزله $\sqrt{5}$ برابر پس‌لرزه خود می‌باشد. شدت زلزله اصلی و پس‌لرزه چند ریشتر اختلاف دارند؟

($\log^5 = 0.7$)

$\frac{11}{30}$ (۴)

$\frac{7}{30}$

$\frac{13}{30}$ (۲)

$\frac{5}{11}$ (۱)



پاسخ: گزینه ۳ با استفاده از رابطه اصلی داریم:

$$\begin{aligned}\log E_2 &= 11,8 + 1,5M_2 \\ \log E_1 &= 11,8 + 1,5M_1 \\ \log E_2 - \log E_1 &= 1,5(M_2 - M_1) \rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 1,5(M_2 - M_1) \\ \rightarrow 1,5(M_2 - M_1) &= \log \sqrt[5]{5} \rightarrow 1,5(M_2 - M_1) = \frac{1}{2} \log 5 \\ \rightarrow \frac{3}{2}(M_2 - M_1) &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{10} \rightarrow 3(M_2 - M_1) = \frac{5}{10} \rightarrow M_2 - M_1 = \frac{5}{30}\end{aligned}$$

۱۴۵. اگر $\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A$ ، آن گاه حاصل $\log_{\sqrt{e}}^{128}$ کدام است؟

$$\frac{A}{2} \quad \boxed{1} \qquad \frac{A}{4} \quad \boxed{2} \qquad \frac{2}{A} \qquad \frac{4}{A} \quad \boxed{4}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a, \quad \log_k^a = \frac{1}{\log_a^k} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\begin{aligned}A = \log_2 \sqrt[5]{e^2} &= \log_2 e^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log_2 e = A \Rightarrow \log_2 e = \frac{5}{2} A \\ \log_{\sqrt{e}}^{128} &= \log_{e^{\frac{1}{2}}}^{2^7} = 7 \log_{e^{\frac{1}{2}}} 2 = 7 \times \frac{1}{\log_2 e} = \frac{7}{\frac{5}{2} A} = \frac{4}{A}\end{aligned}$$

۱۴۶. نمودارهای دو تابع با معادلات $f(x) = 2 \log_3^{(x-1)^2}$ و $g(x) = 2 + \log_3^{2x^2-3x+1}$ یکدیگر را در چند نقطه قطع می کنند؟

$$\text{صفر} \quad \boxed{4} \qquad 1 \qquad 2 \quad \boxed{2} \qquad 3 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ باید معادله دو تابع f و g را با هم تلافی بدهیم.

$$\begin{aligned}2 \log_3^{(x-1)^2} &= 2 + \log_3^{2x^2-3x+1} \\ \log_3^{(x-1)^2} - \log_3^{2x^2-3x+1} &= 2\end{aligned}$$

می دانیم: $\log_c^a - \log_c^b = \log_c^{\frac{a}{b}}$ لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\log_3^{\frac{(x-1)^2}{2x^2-3x+1}} &= 2 \Rightarrow \log_3^{\frac{(x-1)^2}{(x-1)(2x-1)}} = 2 \Rightarrow \log_3^{\frac{x-1}{2x-1}} = 2 \rightarrow \frac{x-1}{2x-1} = 3^2 = 9 \Rightarrow 18x - 9 = x - 1 \\ \Rightarrow x &= \frac{8}{17} \xrightarrow{\text{ghey}} \text{جزء دامنه نیست}\end{aligned}$$

بنابراین نمودارهای f و g همدیگر را قطع نمی کنند.



۱۴۷. اگر k ریشه معادله $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3x+2} + \log_2^{x-5} = \log_4^{x^2-4x+4} + \log_2^{x+5}$ باشد، حاصل $\frac{2}{\log_{3k+3}^{81}}$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{3}{4} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ می دانیم:

$$\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}, \quad \log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3x+2} + \log_2^{x-5} = \log_4^{x^2-4x+4} + \log_2^{x+5}$$

$$\log_{\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}}^{(3x+2)^{\frac{1}{2}}} + \log_2^{x-5} = \log_{2^2}^{(x-2)^2} + \log_2^{x+5}$$

$$\frac{1}{2} \log_2^{3x+2} + \log_2^{x-5} = \frac{2}{2} \log_2^{x-2} + \log_2^{x+5}$$

$$\log_2^{(3x+2)(x-5)} = \log_2^{(x-2)(x+5)} \Rightarrow (3x+2)(x-5) = (x-2)(x+5)$$

$$3x^2 - 13x - 10 = x^2 + 3x - 10 \rightarrow 2x^2 - 16x = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \times \\ x = 8 \checkmark \end{matrix}$$

$x = 0$ جزء دامنه نیست، پس قابل قبول نیست، $x = 8$ قابل قبول است.

$$k = 8$$

$$\frac{2}{\log_{3k+3}^{81}} = \frac{2}{\log_{27}^{81}} = \frac{2}{\log_{3^3}^{3^4}} = \frac{2}{\frac{4}{3} \log_3^3} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$$

۱۴۸. حاصل $A = \log 10! - \log 9!$ کدام است؟

$$2 \quad \boxed{۴}$$

$$1$$

$$10 \quad \boxed{۲}$$

$$\text{صفر} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\log 10! - \log 9! = \log \frac{10!}{9!} = \log 10 = 1$$

۱۴۹. دامنه تابع $f(x) = \log_a^{(x+b)}$ برابر $(2, +\infty)$ است. اگر $f\left(\frac{7}{3}\right) = -1$ باشد، $a - b$ کدام است؟

$$-5 \quad \boxed{۴}$$

$$5$$

$$-1 \quad \boxed{۲}$$

$$1 \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\left. \begin{matrix} f(x) = \log_a^{(x+b)} \rightarrow x+b > 0 \rightarrow x > -b \\ D_f = (2, +\infty) \rightarrow x > 2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \boxed{b = -2}$$



$$\rightarrow f(x) = \log_a^{(x-2)} , \quad f\left(\frac{7}{3}\right) = -1 \rightarrow -1 = \log_a^{(\frac{7}{3}-2)}$$

$$\rightarrow \log_a^{\frac{1}{3}} = -1 \rightarrow a^{-1} = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{a=3} \rightarrow a-b=5$$

۱۵۰. فاصله نقطه برخورد توابع $f(x) = (0.2)^{2+\sqrt{27}x}$ و $g(x) = (5)^{-\sqrt{3}x}$ از محور طول‌ها، کدام است؟

۵ (۴)

۲

۰٫۲ (۲)

 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ قبل از محاسبه نقطه برخورد، پایه‌ها را ساده‌تر می‌نماییم.

$$f(x) = \left(\frac{2}{10}\right)^{2+\sqrt{27}x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2+\sqrt{27}x} = 5^{-2-\sqrt{27}x}$$

$$g(x) = 5^{-\sqrt{3}x}$$

برای محاسبه نقطه برخورد، دو ضابطه را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$5^{-2-\sqrt{27}x} = 5^{-\sqrt{3}x} \rightarrow -2 - 3\sqrt{3}x = -\sqrt{3}x \rightarrow 2\sqrt{3}x = -2 \rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 5$$

فاصله نقطه برخورد تا محور Xها برابر ارتفاع نقطه برخورد یعنی همان ۵ می‌باشد.

۱۵۱. اگر $9^a = 27\sqrt{3}$ و $\log \sqrt{b} - \log(2-a) = 1$ ، مقدار b است؟

۲۵ (۴)

۲٫۵

۴٫۵ (۲)

۶٫۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$9^a = 27\sqrt{3} \Rightarrow 3^{2a} = 3^3 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{7}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{7}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{4}$$

$$\log \sqrt{b} - \log\left(2 - \frac{7}{4}\right) = 1 \Rightarrow \log \sqrt{b} = \log \frac{1}{4} + \log 10 = \log\left(\frac{10}{4}\right) \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{25}{4} = 6.25$$

۱۵۲. اگر $\log_{\sqrt{2}}^{x^5} + \log_{\sqrt{x}}^{32} = 20$ حاصل $\log_{128}^{3x^2+4}$ کدام است؟

 $-\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$ $-\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a , \quad \log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}$$

بنابراین خواهیم داشت:



$$\log_{\sqrt{2}}^{x^5} + \log_{\sqrt{x}}^{2^2} = 20 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}}^{x^5} + \log_{\frac{1}{x}}^{2^5} = 20$$

$$5 \times 2 \log_2^x + 5 \times 2 \log_x^2 = 20 \rightarrow 10(\log_2^x + \log_x^2) = 20$$

$$\log_2^x + \log_x^2 = 2, \log_2^x = A$$

$$\log_2^x = \frac{1}{\log_x^2} \rightarrow A + \frac{1}{A} = 2 \rightarrow A^2 + 1 = 2A \rightarrow A^2 - 2A + 1 = 0 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \log_2^x = 1$$

$$\rightarrow x = 2 \Rightarrow \log_{128}^{2^5} \xrightarrow{x=2}$$

$$\log_{128}^{16} = \log_{2^7}^{2^4} = \frac{4}{7} \log_2^2 = \frac{4}{7}$$

۱۵۳. اگر $\log 25 = A$ باشد، حاصل $\log(1 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} \log(4 - 2\sqrt{3})$ کدام است؟

$$1 + 2A \quad \boxed{4}$$

$$1 - 2A$$

$$\frac{1 - A}{2} \quad \boxed{2}$$

$$1 - \frac{A}{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ اول: دقت کنید $4 - 2\sqrt{3} = (1 - \sqrt{3})^2$ ، پس:

$$\log(1 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} \log(\sqrt{3} - 1)^2 = \log(1 + \sqrt{3}) + \log(\sqrt{3} - 1)$$

$$= \log(3 - 1) = \log 2$$

دوم: مقدار A را ساده می‌کنیم.

$$A = \log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 \Rightarrow \log 5 = \frac{A}{2}$$

$$\text{سوم: پس } \log 2 = 1 - \log 5 = 1 - \frac{A}{2}$$

۱۵۴. اگر داشته باشیم: $5^{n-1} - 5^{n-2} = 500$ ، در این صورت 3^n کدام است؟

$$27\sqrt{3} \quad \boxed{4}$$

$$243$$

$$81 \quad \boxed{2}$$

$$27 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$5^{n-1} - 5^{n-2} = 500$$

$$\Rightarrow 5 \times 5^{n-2} - 5^{n-2} = 500 \Rightarrow 4 \times 5^{n-2} = 500$$

$$\Rightarrow 5^{n-2} = 125 = 5^3 \Rightarrow n - 2 = 3 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow 3^5 = 243$$