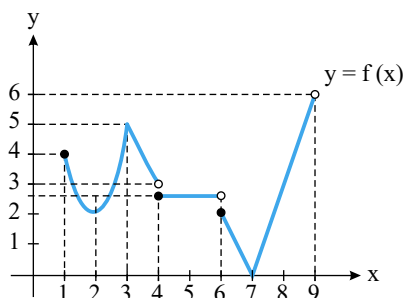




اصلان الیاسی



۱- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟

(الف) نقاط $x = 1$ و $x = 9$ نقاط بحرانی تابع محسوب می‌شوند.

(ب) تابع هم دارای ماکزیمم مطلق و هم دارای مینیمم مطلق است.

(ج) تابع دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است.

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲

پاسخ: گزینه ۲ چون تابع f در بازه $[1, 9]$ تعریف شده است، پس $x = 9$ در دامنه تابع قرار ندارد، پس این نقطه، نقطه بحرانی تابع محسوب نمی‌شود. بنابراین گزاره «الف» صحیح نیست.

گزاره «ب» نادرست است، زیرا تابع در نقطه $x = 7$ دارای مینیمم مطلق است و مقدار مینیمم مطلق آن برابر صفر است اما تابع f ماکزیمم مطلق ندارد، زیرا نقطه‌ای که عرض مربوط به آن از عرض سایر نقاط بیشتر باشد، قابل معرفی نیست.

گزاره «ج» صحیح است، زیرا تابع در بازه $(4, 6)$ تابعی ثابت است و بنابراین مشتق تابع در تمامی نقاط این بازه برابر صفر است، یعنی تابع در این بازه دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است.

در نتیجه یک گزاره از گزاره‌های داده‌شده صحیح هستند.

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(x^2 - 1)^3 + (x^4 + 2)^2}{3x^2(x^3 + 4)^2}$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ حد هر چند جمله‌ای در $x \rightarrow \pm\infty$ برابر با حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(x^2 - 1)^3 + (x^4 + 2)^2}{3x^2(x^3 + 4)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(x^2)^3 + (x^4)^2}{3x^2(x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \times x^6 + x^8}{3x^2 \times x^6} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^8}{3x^8} = \frac{2}{3}$$

۳- چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(الف) اگر تابع $f + g$ در نقطه $x = a$ حد داشته باشد، آنگاه توابع f و g نیز در $x = a$ حد دارند.

(ب) اگر تابع $f + g$ در نقطه $x = a$ حد نداشته باشد، آنگاه توابع f و g نیز در $x = a$ حد ندارند.

(ج) اگر توابع f و g در نقطه $x = a$ حد نداشته باشند آنگاه تابع $f \cdot g$ در $x = a$ حد ندارد.

(د) اگر تابع f در نقطه $x = a$ حد نداشته باشد ولی تابع g در $x = a$ حد داشته باشد آنگاه $f \cdot g$ در $x = a$ حد ندارد.

(ه) اگر توابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند، آنگاه تابع $f \circ g$ نیز در $x = a$ حد دارد.

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) هیچ

پاسخ: گزینه ۱ مثال نقض گزاره (الف) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ و $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ در نقطه $x = 0$

مثال نقض گزاره (ب) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ و $g(x) = x + 2$ در نقطه $x = 0$



مثال نقض گزاره (ج) $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$

مثال نقض گزاره (د) $f(x) = [x]$ و $g(x) = x^2$ در نقطه $x = 0$

مثال نقض گزاره (ه) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه $x = \frac{1}{2}$ در این صورت $fog(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}-2} = \frac{x}{1-2x}$ خواهد بود که

در $x = \frac{1}{2}$ فاقد حد است.

تذکر: می‌توانیم برای مثال نقض گزاره‌های «الف» و «ب»، توابع چند ضابطه‌ای نیز مثال بزنیم. به‌عنوان نمونه برای الف اگر توابع

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 4 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 5 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$ مفروض باشند توابع f و g در نقطه $x = 0$ فاقد حد هستند اما تابع $f+g$ در $x = 0$ دارای حد است، زیرا:

$$f+g = \begin{cases} 6 & x \geq 0 \\ 6 & x < 0 \end{cases}$$

۴- تابع $f(x) = \frac{a[x] + [-x + 1]}{x}$ در $x = 2$ حد دارد کدام است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲ برای این که تابع $f(x)$ در $x = 2$ حد داشته باشد باید حد راست و چپ تابع در $x = 2$ برابر باشند.

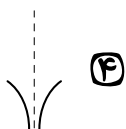
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a[x] + [-x] + 1}{x} = \frac{a[2^+] + [-(2^+)] + 1}{2} = \frac{2a - 3 + 1}{2}$$

$$= \frac{2a - 2}{2} = a - 1$$

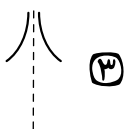
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{a[x] + [-x] + 1}{x} = \frac{a[2^-] + [-(2^-)] + 1}{2} = \frac{a - 2 + 1}{2} = \frac{a - 1}{2}$$

$$\text{پس: } a - 1 = \frac{a - 1}{2} \rightarrow 2a - 2 = a - 1 \rightarrow a = 1$$

۵- اگر $f(x) = \frac{4 \cos 3x + 3}{\sin 2x - 1}$ باشد، نمودار تابع f در اطراف نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ به کدام صورت است؟



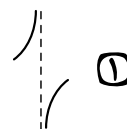
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

پاسخ: گزینه ۴ چون به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ ، مخرج کسر برابر صفر می‌شود، پس کافی است حد تابع را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ محاسبه کنیم.

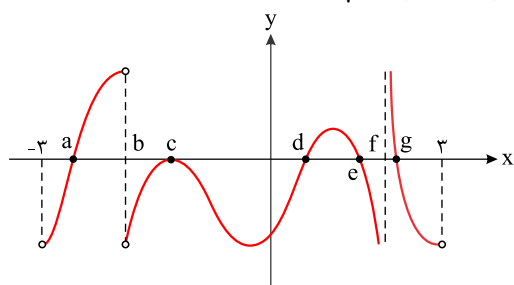
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{4 \cos 3x + 3}{\sin 2x - 1} = \frac{4 \cos \frac{3\pi}{4} + 3}{1 - 1} = \frac{4(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 3}{0^-} = \frac{-2\sqrt{2} + 3}{0^-} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{4 \cos 3x + 3}{\sin 2x - 1} = \frac{4 \cos \frac{3\pi}{4} + 3}{1 - 1} = \frac{4(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 3}{0^-} = \frac{-2\sqrt{2} + 3}{0^-} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

پس حد تابع در $x = \frac{\pi}{4}$ هم از چپ و هم از راست برابر $-\infty$ می شود و بنابراین گزینه «۴» جواب است.

۶- تابع f پیوسته و نمودار مشتق آن به صورت مقابل است. تعداد نقاط بحرانی تابع f در بازه $(-3, 3)$ کدام است؟



۱) ۲

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

پاسخ: گزینه ۴ در نقاط a و c و d و e مقدار مشتق برابر صفر است، لذا این نقاط بحرانی اند. همچنین در نقاط b و f مشتق وجود ندارد، بنابراین نقاط b و f نیز بحرانی هستند. در مجموع ۷ نقطه بحرانی داریم.

۷- حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{2 + x}} - 2}{5x^2 + 2x - 3}$ وقتی که $x \rightarrow -1$ ، کدام است؟

۴) $-\frac{1}{96}$

۳) ۹۶

۲) $-\frac{1}{64}$

۱) ۶۴

پاسخ: گزینه ۲ برای رفع ابهام باید عامل صفرکننده $x + 1$ را در $\frac{0}{0}$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3 + \sqrt{2 + x}} - 2}{5x^2 + 2x - 3} = \frac{0}{0}$ هم صورت و هم مخرج ایجاد کنیم، لذا صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3 + \sqrt{2 + x}} - 2}{5x^2 + 2x - 3} \times \frac{\sqrt{3 + \sqrt{2 + x}} + 2}{\sqrt{3 + \sqrt{2 + x}} + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2 + x} - 1}{(5x^2 + 2x - 3)(\sqrt{3 + \sqrt{2 + x}} + 2)}$$

مجدداً صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\overbrace{(\sqrt{2 + x} - 1)(\sqrt{2 + x} + 1)}^{(x+1)}}{(5x^2 + 2x - 3)(\sqrt{3 + \sqrt{2 + x}} + 2)(\sqrt{2 + x} + 1)} = \frac{1}{(-8)(4)(2)} = \frac{-1}{64}$$

۸- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟

۴) موجود نیست.

۳) ۱

۲) ۰

۱) -۱

پاسخ: گزینه ۳ هرگاه $0 < x < 1$ باشد، آنگاه $x^3 > x$ خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$x^3 > x \Rightarrow x^3 - x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = f(0^+) \Rightarrow \text{باید از ضابطه بالایی استفاده کنیم} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-0} = 1$$



۹- حد کسر $\frac{\cos 2x + [-\sin^2 x]}{\sin^2 x + [\sin^2 x]}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است. ([] نماد جزء صحیح است.)

∞ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

- $\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

هرگاه در محاسبه حد، به براکت برخوردیم، ابتدا آن را تعیین عدد، سپس حاصل حد را می‌یابیم.

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow 0 < \sin^2 x < 1 \Rightarrow \begin{cases} [\sin^2 x] = 0 \\ -1 < -\sin^2 x < 0 \Rightarrow [-\sin^2 x] = -1 \end{cases}$$

می‌دانیم: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x + [-\sin^2 x]}{\sin^2 x + [\sin^2 x]} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2 x - 1}{\sin^2 x} = -2$$

۱۰- اگر حد کسر $\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{ax^n}$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر ۱ باشد حاصل $a + n$ کدام است؟

۲ (۴)

۵ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم: $\lim_{u \rightarrow 0} \sin^n u \simeq u^n$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{ax^n} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x}{ax^n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x}}{ax^n} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x \cdot ax^n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 \times ax^n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} ax^n = x^4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow a + n = 1 + 4 = 5$$

۱۱- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آنگاه حد راست این عبارت در نقطه $x = -2$ کدام است؟

 $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا با کمک قاعده پرتوان و مثبت بودن عبارت درون قدر مطلق خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$



$$\begin{array}{c|ccc} & -2 & +2 & \\ \hline x^2 - 4 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

وقتی $x \rightarrow (-2)^+$ ، $x^2 - 4 < 0$ بوده زیرا

ولذا $|x^2 - 4| = 4 - x^2$ می شود. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4 - x^2}{-x^2 - x + 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-2x}{-2x - 1} = \frac{4}{3}$$

۱۲- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-1}}{2\sqrt{x-1} - \sqrt{9x-1}}$ کدام است؟

∞ (۴)

-۳ (۳)

۰ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ از هریک از عبارات رادیکالی، $\sqrt{x}$ فاکتور می گیریم. لذا می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-1}}{2\sqrt{x-1} - \sqrt{9x-1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{4-\frac{1}{x}})}{\sqrt{x}(2\sqrt{1-\frac{1}{x}} - \sqrt{9-\frac{1}{x}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{4-\frac{1}{x}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{x}} - \sqrt{9-\frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{4}}{2\sqrt{1} - \sqrt{9}} = -3 \end{aligned}$$

راه دوم: قانون پرتوان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-1}}{2\sqrt{x-1} - \sqrt{9x-1}} \xrightarrow{\text{قانون پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{4x}}{2\sqrt{x} - \sqrt{9x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 3\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -3$$

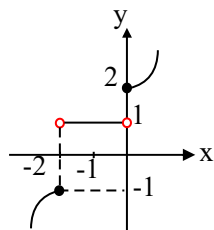
۱۳- با توجه به شکل زیر حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(1 - x^2)$ کدام است؟

۰ (۲)

-۱ (۱)

-۲ (۴)

۱ (۳)



پاسخ: گزینه ۴ با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0^+ : x > 0 &\Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow -2 - x^2 < -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) = f((-2)^-) = -1 \\ x \rightarrow (-1)^- : x < -1 &\Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(1 - x^2) = f(0^-) = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(1 - x^2) = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1 + x^2}}$ ، کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است).

حد ندارد. (۴)

صفر (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+u} \simeq 1 + \frac{u}{n} \quad \text{و} \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos^n u) \simeq \frac{u^2}{2} \times n \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] + [-f(x)] = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos^2 x)}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{1 - \sqrt{1+x^2}} \times \frac{(1 + \sqrt{1+x^2})}{(1 + \sqrt{1+x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3(2 \sin^2 \frac{x}{2}) \times (2)}{1 - 1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \times 2 \times \frac{x^2}{4} \times 2}{-x^2} = 3$$

۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a[x^2] - 3|2x - 2| + 1}{2b + |x + 2|} = \frac{1}{7}$ باشد، آن گاه $a^2 + b^2$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است)

۲۶
۳۶ (۴)

۴ (۳)

۳۵
۴۹ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ حد چپ و راست تابع را در $x = 1$ برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a[x^2] - 3|2x - 2| + 1}{2b + |x + 2|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a[x^2] - 6|x - 1| + 1}{2b + 3} = \frac{1}{7}$$

$$x \rightarrow 1^+ : x > 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \Rightarrow [x^2] = 1 \\ |x - 1| = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a - 6(x - 1) + 1}{2b + 3} = \frac{a + 1}{2b + 3} = \frac{1}{7}$$

$$x \rightarrow 1^- : x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ |x - 1| = -(x - 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(0) + 6(x - 1) + 1}{2b + 3} = \frac{1}{2b + 3} = \frac{1}{7} \Rightarrow 2b + 3 = 7 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a + 1}{7} = \frac{1}{7} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2^2 + 0^2 = 4$$

۱۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{\lambda}) & x < \frac{\pi}{\lambda} \\ m - \sin 2x & x > \frac{\pi}{\lambda} \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{\lambda}$ حد داشته باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\lambda}} f(x)$ کدام است؟

$\sqrt{2} - 1$ (۴)

$-\sqrt{2} + 1$ (۳)

$\sqrt{2} + 1$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به تابع داده شده و انتخاب ضابطه مناسب، حدهای راست و چپ تابع را در $x = \frac{\pi}{\lambda}$ بررسی می‌کنیم:

$$L^- = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{\lambda})^-} \cos(x + \frac{\pi}{\lambda}) = \cos(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{\lambda}) = \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$L^+ = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} (m - \sin 2x) = m - \sin \frac{2\pi}{4} = m - \sin \frac{\pi}{2} = m - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow m - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (m - \sin 2x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} - \sin 2x) = \sqrt{2} - \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} - 1$$

۱۷- اگر حد تابع $f(x) = \frac{ax+b}{x-\sqrt{x+2}}$ وقتی $x \rightarrow 2$ برابر ۸ باشد، مقدار a کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ چون مخرج کسر به ازای $x = 2$ صفر می شود پس باید صورت هم صفر شود تا مبهم صفر صفرم ایجاد شده و پس از رفع ابهام حد تابع عدد ۸ شود.

$$ax+b = 0 \xrightarrow{x=2} 2a+b = 0 \Rightarrow b = -2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{x-\sqrt{x+2}} \times \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(ax-2a)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2) \times 4}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4a}{x+1} = \frac{4a}{3} = 8 \Rightarrow a = 6$$

۱۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^+} \frac{x-1}{2 \sin x - 1}$ کدام است؟

$-\infty$ (۴)

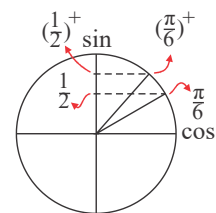
$+\infty$ (۳)

صفر (۲)

$\frac{\pi}{6} - 1$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

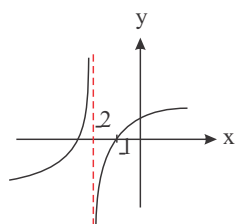
با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^+} \frac{x-1}{2 \sin x - 1} = \frac{\frac{\pi}{6} - 1}{2(\frac{1}{2} + \varepsilon) - 1} = \frac{\frac{\pi}{6} - 1}{1 + 2\varepsilon - 1}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{6} - 1}{0^+} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

۱۹- نمودار تابع f به صورت مقابل است، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (f(x) - [x])$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)



۲ (۲)

-۲ (۱)

$+\infty$ (۴)

$-\infty$ (۳)



پاسخ: گزینه ۳

با توجه به وضعیت نمودار در حوالی $(-2)^+$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (f(x) - [x]) = -\infty - [-2 + \varepsilon] = -\infty - (-2) = -\infty + 2 = -\infty$$

۲۰- مجموع حد راست و چپ تابع $f(x) = [4 \cos x - 4]$ در $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- ① -۴ ② -۵ ③ -۶ ④ -۷

پاسخ: گزینه ۲ وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+$ آن گاه $\cos x = (\frac{1}{2})^-$ و وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-$ آن گاه $\cos x = (\frac{1}{2})^+$ است. (به جز زوایای مرزی، کسینوس با کمانش نسبت معکوس دارد) و توجه کنید عدد صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می آید.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} f(x) &= [4 \times (\frac{1}{2})^-] - 4 = [2^-] - 4 = 1 - 4 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} f(x) &= [4 \times (\frac{1}{2})^+] - 4 = [2^+] - 4 = 2 - 4 = -2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} -5$$

۲۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{[x] - x} \right]$ کدام است؟

- ① -۱ ② ۱ ③ $+\infty$ ④ $-\infty$

پاسخ: گزینه ۴

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{[x] - x} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{1 - x} \right] = \left[\frac{1}{1 - 1^+} \right] = \left[\frac{1}{0^-} \right] = [-\infty] = -\infty$$

۲۲- حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! \times n!}{4((n+1)!)^2}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ ۲ ④ ۴

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! \times n!}{4((n+1)!)^2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)! \times n!}{4(n+1)! \times (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n+1)! \times n!}{4(n+1)! \times (n+1) \times n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{4(n+1)} \xrightarrow{\text{توان بیشتر}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{4n} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۲۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sqrt[3]{x}}{3x + 4\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{-1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{-2}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sqrt[3]{x}}{3x + 4\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}(2\sqrt[3]{x^2} - 2)}{\sqrt[3]{x}(3\sqrt[3]{x^2} + 4)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$



۲۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos 2x - 1}{2 \sin^2 x + \sin x - 1}$ کدام است؟

④ $-\frac{4}{3}$

③ $\frac{4}{3}$

② $\frac{2}{3}$

① $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم که $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos 2x - 1}{2 \sin^2 x + \sin x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2(1 - 2 \sin^2 x) - 1}{2 \sin^2 x + 2 \sin x - \sin x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4 \sin^2 x}{2 \sin x (\sin x + 1) - (\sin x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{(\sin x + 1)(2 \sin x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-(2 \sin x + 1)}{\sin x + 1} = \frac{-(2 \times \frac{1}{2} + 1)}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

۲۵- تابع f خطی و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(2x) - 3}{x - 1} = 4$ است. مقدار $(f - f')(2)$ چقدر است؟ (منظور از f' ، مشتق تابع f است.)

④ -3

③ 3

② -1

① 1

پاسخ: گزینه ۱ اگر تابع f خطی باشد، تابع f^{-1} نیز خطی است. حال دقت کنید که حد داده شده برابر عدد متناهی و حد مخرج صفر است؛ پس حد صورت نیز صفر است:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f^{-1}(2x) - 3) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f^{-1}(2x) = 3 \Rightarrow f^{-1}(2) = 3$$

فرض کنید $f^{-1}(x) = ax + b$ در این صورت:

$$f^{-1}(2) = 3 \Rightarrow 2a + b = 3 \Rightarrow b = 3 - 2a \quad (*)$$

با جایگذاری در حد داده شده داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(2x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2ax + b) - 3}{x - 1} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2ax + 3 - 2a - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2a(x - 1)}{x - 1} = 2a$$

پس:

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{(*)} b = -1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 1$$

ضابطه تابع f را می‌یابیم:

$$y = 2x - 1 \Rightarrow 2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$$

در این صورت:

$$(f - f')(2) = f(2) - f'(2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x+4} & x > 3 \\ 5 & x = 3 \text{ اگر } ۲۶-۱ \\ \frac{x^2+1}{2x} & x < 3 \end{cases}$$

آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)$ کدام است؟

وجود ندارد (۴)

۵ (۳)

 $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا حل عبارت $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right)$ را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{3x-6+7}{x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(3 + \frac{7}{x-2}\right)$$

توجه شود که اگر $x \rightarrow -\infty$ آنگاه $\frac{7}{x-2} \rightarrow 0^-$ و بنابراین $\left(3 + \frac{7}{x-2}\right) \rightarrow 3^-$ از این رو خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(3 + \frac{7}{x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+1}{2x} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

تذکر: همچنین چون تابع $\frac{3x+1}{x-2}$ در $x < 2$ نزولی است، ($ad - bc < 0$) پس هرچه x کوچک‌تر شود، مقدار آن افزایش می‌یابد. یعنی وقتی $x \rightarrow -\infty$ مقدار آن بزرگ‌تر می‌شود، پس از مقادیر کمتر از ۳ به ۳ نزدیک می‌شود.

۲۷- تابع $f(x) = (\sin^2 x - 1)[\cos x]$ در بازه $(0, 2\pi)$ در چند نقطه حد ندارد؟ (علامت جزء صحیح است)

۳ (۴)

۲ (۳)

۰ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ در نقاطی که داخل براکت را به عدد صحیح تبدیل می‌کنند ممکن است حد موجود نباشد. در آن نقاط حد را بررسی می‌کنیم.
در بازه $(0, 2\pi)$:

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+ \text{ یا } (\frac{\pi}{2})^-} (\sin^2 x - 1)[\cos x] = 0 \times 0 = 0 \quad \text{حد موجود است.}$$

$$0 \times -1 = 0$$

$$x = \pi \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} (\sin^2 x - 1)[\cos x] = (-1) \times -1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sin^2 x - 1)[\cos x] = -1 \times -1 = 1 \end{cases} \quad \text{حد موجود است.}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} (\sin^2 x - 1)[\cos x] = 0 \times 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} (\sin^2 x - 1)[\cos x] = 0 \times -1 = 0 \end{cases} \quad \text{حد موجود است.}$$

تابع در تمام نقاط بازه $(0, 2\pi)$ حد دارد.



۲۸- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{(a^2 x^2 - 1)(a^4 x^4 - 1) \cdots (a^{100} x^{100} - 1)}}{a^{49} x^k - 1} = -1$ آنگاه، مقادیر a و k کدام‌اند؟

- ① $k = 51, a = -1$ ② $k = 51, a = 1$ ③ $k = 49, a = -1$ ④ $k = 49, a = 1$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n \cdot (n + 1)$ تا n مجموع n عدد زوج

چون حد تابع در منفی بی‌نهایت خواسته شده است پس از قاعدهٔ پرتوان استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^{2+4+\cdots+100} x^{2+4+\cdots+100}}}{a^{49} x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^{50 \times 51} x^{50 \times 51}}}{a^{49} x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|a^{51} x^{51}|}{a^{49} x^k} = -1$$

واضح است که $k = 51$ است. از طرفی اگر $a = -1$ باشد با توجه به اینکه $x \rightarrow -\infty$ می‌رود عبارت از داخل قدر مطلق مثبت خارج می‌شود و خواهیم داشت $a^2 = -1$ که نادرست است پس $a = 1$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a^{51} x^{51}}{a^{49} x^k} = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \xrightarrow{a > 0} a = 1$$

۲۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x - x^3}}{2x + |4x - 1|}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ 1

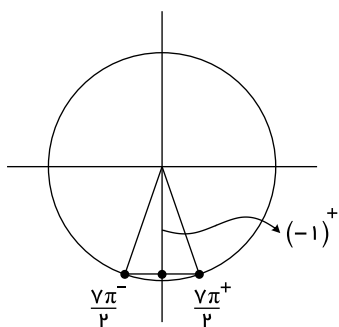
پاسخ: گزینه ۴ حد توابع چندجمله‌ای به ازای $x \rightarrow \pm\infty$ با حد جمله‌ای که بزرگترین درجه (توان) را دارد مساوی است (قضیه پرتوان). بر مبنای قضیه پرتوان، پرتوان‌ترین جملات زیر را دیکال‌ها را تعیین می‌کنیم و به صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x - x^3}}{2x + |4x - 1|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3|x| + x}{2x - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + x}{2x - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-2x} = 1$$

۳۰- مجموع حد چپ و راست تابع $f(x) = \left[\frac{1}{\sin^3(\sqrt{x})} \right]$ در $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- ① صفر ② 2 ③ -4 ④ -1

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی ملاحظه می‌شود که در کمان‌های $\frac{\sqrt{\pi}}{2}^+$ و $\frac{\sqrt{\pi}}{2}^-$ مقدار سینوس اندکی بیشتر از 1 است. بنابراین:



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sin^3 \sqrt{x}} \right] = \left[\frac{1}{\sin^3(\frac{\sqrt{\pi}}{2}^-)} \right] = \left[\frac{1}{((-1)^+)^3} \right] = \left[\frac{1}{(-1)^+} \right]$$

عددی که اندکی بیشتر از 1 است وقتی به توان 3 برسد، بیشتر از 1 خواهد بود و اگر به‌طور غیررسمی به جای آن مثلاً 1.99 قرار دهیم خواهیم داشت.

$$\left[\frac{1}{-0.99} \right] = \left[-\frac{1.00}{99} \right] = -2$$



به طور مشابه به حد راست هم ۲- خواهد شد و مجموع حد راست و چپ ۴- خواهد بود.