

تست مفهوم تابع

الياسى

۱. نمودار تابع خطی f با شیب مثبت، از نقطه‌ی $(2, -1)$ می‌گذرد. اگر $(f(-1))^2 + 2f(-4) = 23$ باشد، نمودار f با محورهای

مختصات تشکیل چه مساحتی می‌دهد؟

$$\frac{25}{2} (4)$$

$$\frac{35}{4} (3)$$

$$5 (2)$$

$$\frac{25}{4} (1) \quad \checkmark$$

$$f \text{ خطی} \Rightarrow f(x) = ax + b$$

از $(2, -1)$ می‌گذرد

$$b = -1 - 2a \quad (*)$$

$$f(-1) = -a + b$$

$(*)$

$$f(-1) = -3a - 1$$

$$f(-4) = -4a + b \xrightarrow{(*)} f(-4) = -6a - 1$$

جای‌گذاری در رابطه

$$\rightarrow (-3a - 1)^2 + 2(-6a - 1) = 23 \xrightarrow{\text{اتحاد و ساده}} 9a^2 - 6a - 24 = 0$$

حل معادله
ریشه‌ها

$$a = 2, -\frac{4}{3} \xrightarrow{\text{شیب} > 0} a = 2$$

$(*)$

$$\rightarrow b = -1 - 4 = -5 \Rightarrow f(x) = 2x - 5$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |pq| = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2}\right)(5) = \frac{25}{4}$$

۲. اگر $f = \{(-1, 3), (0, 5), (1, a)\}$ تابعی خطی و $g = \{(-1, b), (c, 4), (2, 2)\}$ همانی باشد، آن گاه دامنه‌ی تابع

$$y = \sqrt{(a-3)x + bc} \text{ کدام است؟}$$

$$(-\infty, \frac{1}{2}] \text{ (۴)}$$

$$[1, +\infty) \text{ (۳)}$$

$$(-\infty, 1] \text{ (۲)}$$

$$[\frac{1}{2}, +\infty) \text{ (۱)}$$

$$f = \{(-1, 3), (0, 5), (1, a)\} \xrightarrow{\text{تابع خطی}} 5 + 2 = a \Rightarrow a = 7$$

$$g \Rightarrow g(-1) = -1 = b, g(c) = c = 4$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری}} y = \sqrt{4x - 4}$$

$$\xrightarrow{\text{دامنه}} 4x - 4 \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 4 \Rightarrow x \geq 1$$

۳. یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد و حجم تانکر را بر حسب r به صورت $V(r) = 2\pi r^2 f(r)$ بنویسیم، $f(3)$ کدام است؟

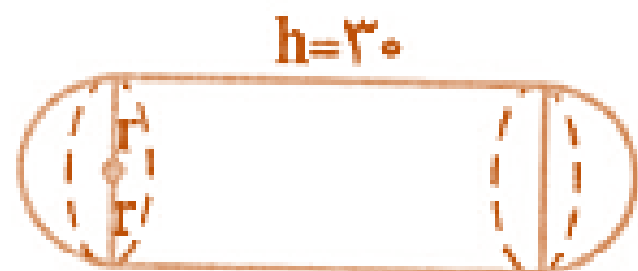
۱۷ (۴)



۳۳ (۳)

۱۵ (۲)

۲۳ (۱)



دو نیم کره روی هم تشکیل یک کره را می دهند، بنابراین حجم تانکر برابر است با مجموع حجم یک کره و یک استوانه:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \underset{30}{h} = \frac{4}{3}\pi r^3 + 30\pi r^2 = 2\pi r^2 \left(\frac{2}{3}r + 15 \right) \xrightarrow[\text{مقایسه با } V(r)=2\pi r^2 f(r)]{} f(r) = \frac{2}{3}r + 15$$

$$\Rightarrow f(3) = \frac{2}{3} \times 3 + 15 = 17$$

۴. هرگاه رابطه‌ی $f = \{(1, -1), (2, 4), (2, a^2 - 3a), (a+2, 3), (a-1, 5), (3, b)\}$ تابع باشد، دامنه‌ی کدام تابع زیر $\mathbb{R}$ است؟

$$y = \frac{1}{ax + b} \quad (۴)$$

$$y = \frac{1}{(a-5)x^2 + b} \quad (۳)$$

$$y = \frac{1}{ax^2 + b} \quad (۲) \quad \checkmark$$

$$y = \frac{1}{ax^2 - b} \quad (۱)$$

$$\underbrace{(2, 4), (2, a^2 - 3a)}_{x \text{ یکسان}} \Rightarrow a^2 - 3a = 4$$

$$a = -1, 4$$

$$a = -1 \xrightarrow{\text{در تابع}} (a+2, 3) = (1, 3)$$

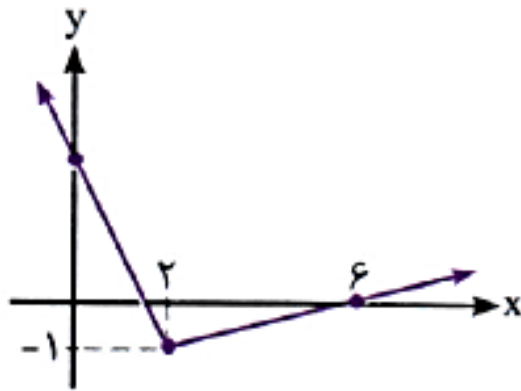
f تابع نمی‌شود $\xrightarrow[\text{در } f]{\text{با وجود } (1, -1)}$

$$a = 4 \Rightarrow \underbrace{(a-1, 5), (3, b)}_{x \text{ یکسان}} \Rightarrow (3, 5), (3, b) \Rightarrow b = 5$$

این مقادیر در گزینه‌ی ۲ نتیجه می‌دهد
مخرجش هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

$$y = \frac{1}{4x^2 + 5}$$

۵. نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر $f(f(10)) = 9$ باشد، حاصل $f(-4)$ کدام است؟



۵۷ (۱)

۵۸ (۲)

۵۹ (۳) ✓

۶۰ (۴)

$$x \geq 2: \underbrace{A(6, 0), B(2, -1)}_{\text{روی تابع خطی}} \xrightarrow{\text{شیب}} m = \frac{0 - (-1)}{6 - 2} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی خط}} y - 0 = \frac{1}{4}(x - 6)$$

$$f(10) = 1 \Rightarrow f(f(10)) = f(1) = 9$$

$$x < 2 \Rightarrow \begin{cases} (1, 9) \\ (2, -1) \end{cases} \xrightarrow[\text{چپ}]{\text{معادله‌ی شاخه‌ی}} y + 1 = -1 \cdot (x - 2)$$

$$\Rightarrow f(-4) = 59$$

۶. اگر f تابع همانی و g تابعی ثابت باشد و داشته باشیم $\frac{3f^2(1) - 4g(3)}{2f(2) + 1} = 3$ ، آن گاه مقدار $g(0)$ کدام است؟

-3 (۱) ✓
 3 (۲)
 4 (۳)
 -4 (۴)

f تابعی همانی است، یعنی $f(x) = x$

g تابعی ثابت است، یعنی $g(x) = k$

$$\Rightarrow \frac{3 \times 1^2 - 4 \times k}{2 \times 2 + 1} = 3$$

$$\Rightarrow 3 - 4k = 15$$

$$\Rightarrow k = -3 \Rightarrow g(0) = k = -3$$

۷. هرگاه $f(\tan x) = \sin x + 2 \cos x$ باشد، حاصل $f(3)$ کدام می تواند باشد؟

$$\frac{\sqrt{10}}{2} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$2\sqrt{10} \quad (3)$$

$$\sqrt{10} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{4} \quad (1)$$

$$f(\tan x) = \sin x + 2 \cos x$$

$$\tan x = 3$$



$$\Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$f(3) = \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۸. نمودار تابع $f(x) = a + \sqrt{2x+b}$ از نقاط $(2, -1)$ و $(-2, -3)$ می‌گذرد. اگر محل تلاقی تابع f را با $g(x) = -3$ نقطه‌ی A

بنامیم. OA کدام است؟

$$\sqrt{13} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\sqrt{12} \quad (3)$$

$$\sqrt{11} \quad (2)$$

$$\sqrt{10} \quad (1)$$

$$f(x) = a + \sqrt{2x+b} \xrightarrow[\text{صدق بده}]{(2, -1)} -1 = a + \sqrt{4+b} \quad (*)$$

$$(-2, -3) \xrightarrow{\text{روی تابع}} -3 = a + \sqrt{-4+b}$$

حکم

$$2 + \sqrt{b-4} = \sqrt{b+4}$$

$$\xrightarrow[b \geq 4]{\text{به توان 2}} 4 + 4\sqrt{b-4} + b - 4 = b + 4 \Rightarrow \sqrt{b-4} = 1 \Rightarrow b = 5$$

$$b = 5$$

$$\xrightarrow{(*)} -1 = a + 3 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow f(x) = -4 + \sqrt{2x+5}$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی با } y=-3} -3 = -4 + \sqrt{2x+5} \Rightarrow \sqrt{2x+5} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان 2}} 2x+5 = 1 \Rightarrow x = -2$$

$$A(-2, -3) \Rightarrow OA = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

۹. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 2x + 2a & x \geq 2 \\ \sqrt{4 + ax} & x < 2 \end{cases}$ داریم $f(0) = 2f(\frac{5}{2})$. تابع f چند ریشه دارد؟

۳ (۴)

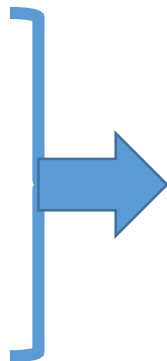
۲ (۳)

۱ (۲) ✓

(۱) هیچ

$$f\left(\frac{5}{2}\right) \xrightarrow{\text{شاخه‌ی بالا}} 2\left(\frac{5}{2}\right) + 2a = 5 + 2a$$

$$f(0) \xrightarrow{\text{شاخه‌ی پایین}} \sqrt{4 + 0} = 2$$



$$\xrightarrow[\text{در رابطه}]{\text{جایگذاری}} 2 = 2(5 + 2a)$$

$$5 + 2a = 1 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

$$2x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{حل}} x = 2 \xrightarrow{x \geq 2} \checkmark$$

$$\sqrt{4 - 2x} = 0 \xrightarrow{\text{حل}} x = 2 \xrightarrow{x < 2} \times$$

۱۰. اگر $f(x) = (ax + 3)(b - x) + 3x^2$ تابعی ثابت، همچنین g و h تابعی همانی باشند به طوری که $g(-3) = 12 - 5c$ و

$h(x) = \frac{2x}{dx + e}$ ، در این صورت حاصل $a + b + c + d + e$ کدام است؟ $(D_f = D_g = \mathbb{R})$

۹ (۴) ✓

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

$$f(x) = (ax + 3)(b - x) + 3x^2$$

$$\xrightarrow[\text{است}]{f \text{ ثابت}} f(x) = \underbrace{(-a + 3)x^2}_0 + \underbrace{(ab - 3)x}_0 + 3b$$

$$-a + 3 = ab - 3 = 0 \Rightarrow a = 3, b = 1 \Rightarrow f(x) = 3$$

$$g(-3) = 12 - 5c \xrightarrow{\text{همانی } g} 12 - 5c = -3 \Rightarrow c = 3$$

$$h(x) = \frac{2x}{dx + e} \xrightarrow{\text{همانی } h} e = 2 \text{ و } d = 0$$

$$a + b + c + d + e = 9$$

دامنه و برد تابع، تساوی دو تابع

۱. تابع $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$ با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

$$y = \frac{2x^2 - 5x + 3}{(x-1)^2} \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$y = \frac{2x^2 + x - 3}{(x-1)^2} \quad (۳)$$

$$y = \frac{4x^2 - 9}{2x^2 + x - 3} \quad (۲)$$

$$y = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - x} \quad (۱)$$

ابتدا دامنه‌ی تابع داده شده را به دست می آوریم:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

سپس دامنه‌ی گزینه‌های داده شده را بررسی می کنیم:

$$\text{گزینه‌ی «۱»}: x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$\text{گزینه‌ی «۳»}: x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{گزینه‌ی «۴»}: x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{گزینه‌ی «۳»}: \frac{2x^2 + x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$\text{گزینه‌ی «۴»}: \frac{2x^2 - 5x + 3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)^2} = \frac{2x-3}{x-1}$$

عبارت داده شده در صورت سؤال:

$$y = 2 - \frac{1}{x-1} = \frac{2x - 2 - 1}{x-1} = \frac{2x-3}{x-1}$$

بنابراین تابع گزینه‌ی «۴» با عبارت داده شده برابر است.

۲. کدام جفت از توابع زیر با هم برابرند؟

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = \{(0, 0), (1, 0), (-1, 0)\} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)} \\ g(x) = \sqrt{x-1} \times \sqrt{x+2} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f(x) = \log x^2 \\ g(x) = 2 \log x \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f(x) = [x - [x]] \\ g(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 2} \right] \end{cases} \quad (۳)$$


در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴»، دامنه‌ی توابع f و g با هم برابر نیستند ولی در گزینه‌ی «۳» داریم:

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow [x - [x]] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$0 \leq x^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{x^2 + 2} \right] = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) = 0, \quad D = \mathbb{R}$$

۳. هرگاه $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$ و $g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}}$ باشند، آن گاه دامنه‌ی تابع $h(x) = f(x) \times g(x)$ کدام است؟

(۴) $(2, +\infty) - \{3\}$

(۳) $[2, +\infty) - \{3\}$

(۲) $\mathbb{R} - \{-3, 2, 3\}$

(۱) $\mathbb{R} - \{-3\}$



طبق تعریف می‌دانیم که $D_h = D_f \cap D_g$

است، پس:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9} \Rightarrow D_f : \begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ x^2-9 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [2, +\infty) - \{3\} \quad \textcircled{1}$$

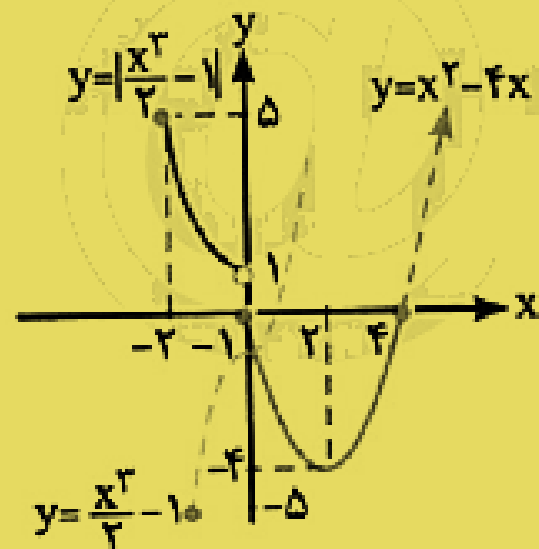
$$g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow D_g : x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\Rightarrow D_g = (2, +\infty) \quad \textcircled{2}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1} \cap \textcircled{2}} D_h = (2, +\infty) - \{3\}$$

$y = x^2 - 4x$ ، سهمی با ریشه‌های صفر و ۴ و رأس

$(2, -4)$ است؛ $-\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ و در محدوده‌ی $[0, 4]$...



تابع $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ فشرده‌شده‌ی

$y = x^2$ و بعد یک واحد به پایین

رفته است! هم‌چنین $y = |\frac{x^3}{2} - 1|$

یعنی قسمت‌های منفی را نسبت به محور x ها قرینه کن!

$$\xrightarrow[\text{روی } y \text{ ها}]{\text{تصویر } f} R_f = [-4, 0] \cup (1, 5] = [-4, 5] - (0, 1]$$

$$\xrightarrow{\text{فرض}} a + b + c + d = -4 + 5 + 1 = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & 0 \leq x \leq 4 \\ |\frac{x^3}{2} - 1| & -2 \leq x < 0 \end{cases} \quad \text{۴. برد تابع}$$

۲(۲) ✓ ۱(۱)

۵. در تابع خطی f ، داریم $D_f = [1, 3]$ و $R_f = [-3, 2]$. مجموع مقادیر ممکن برای $f(2)$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} (4)$$

$$1 (3)$$

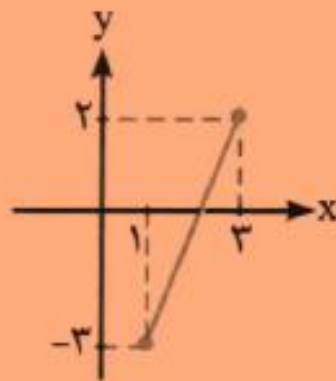
$$-\frac{1}{2} (2)$$

$$-1 (1)$$



$$f(x) = ax + b, a > 0$$

حالت اول:



$$f(3) = 2 \Rightarrow 2 = 3a + b$$

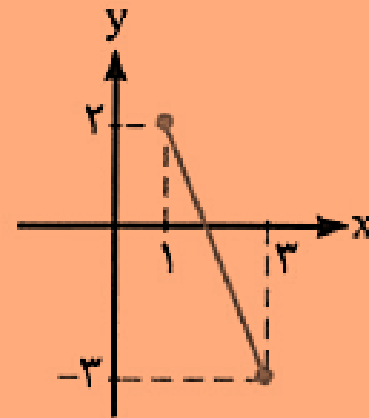
$$f(1) = -3 \Rightarrow -3 = a + b$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = \frac{5}{2}, b = -\frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2} \xrightarrow{x=2} f(2) = 5 - \frac{11}{2} = -\frac{1}{2} (*)$$

$$f(x) = ax + b, a < 0$$

حالت دوم:



$$\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow 2 = a + b \\ f(3) = -3 \Rightarrow -3 = 3a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow 2 = a + b \\ f(3) = -3 \Rightarrow -3 = 3a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = -\frac{5}{2}, b = \frac{9}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$\xrightarrow{x=2} f(2) = -5 + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{(*)} -1$$

۶. برای تابع f با ضابطه $f(x) = -2x^2 + 16ax + 3$ داریم $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ و برد آن $(-\infty, 2m-1)$ است. مقدار am کدام است؟

۴) -۶

۳) -۳



۲) ۳

۱) ۶

نکته: اگر برد تابع درجه‌ی دوم با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ ،

$(-\infty, k)$ یا $(k, +\infty)$ شده باشد (برد از سمت عددی

معلوم، باز باشد!) رأس سهمی در این تابع حذف شده است:



۱) $f(x) = -2x^2 + 16ax + 3 \xrightarrow{\text{رأس}}$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-16a}{2(-2)} = 4a \stackrel{\text{فرض}}{=} -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} (*)$$

۲) $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-8)^2 - 4(-2)(3)}{4(-2)} = 1 \Rightarrow 2m-1=1$

$\Rightarrow m = 1 \xrightarrow{(*)} am = -3$

۷. تابع $f(x) = \sqrt{(a^2 - 9)x^2 + ax + b}$ در بازه‌ی $(-\infty, 4]$ تعریف شده و در تمام اعداد حقیقی غیر از این بازه تعریف نشده است. نقطه‌ی تلاقی f با $g(x) = \sqrt{x}$ در کدام ناحیه است؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول



اگر عبارت درجه‌ی دوم زیر رادیکال، دو ریشه‌ی حقیقی متفاوت داشته باشد، دامنه‌اش بین دو ریشه یا خارج آنهاست و چنانچه ریشه نداشته باشد (یا مضاعف) همواره یک علامت دارد. پس هیچ‌گاه به صورت $(-\infty, 4]$ نمی‌شود! پس عبارت زیر رادیکال، درجه‌ی دوم نبوده

$$a^2 - 9 = (x^2 \text{ ضریب}) = 0 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$a = -3 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} f(x) = \sqrt{-3x + b} \xrightarrow{\text{دامنه}}$$

$$-3x + b \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{b}{3} \xrightarrow[D=(-\infty, 4]}{x \leq 4}$$

$$\frac{b}{3} = 4 \Rightarrow b = 12$$

چرا $a = 3$ قابل قبول نیست.

$$f(x) = \sqrt{-3x + 12} \xrightarrow[g(x) = \sqrt{x}]{\text{تلاقی}} \sqrt{-3x + 12} = \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} -3x + 12 = x \Rightarrow 12 = 4x \Rightarrow x = 3$$

$$g(3) = \sqrt{3} \Rightarrow \text{نقطه‌ی تلاقی} = (3, \sqrt{3}) \xrightarrow{\text{ناحیه}} \text{اول}$$



۹. دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + (a-1)x + 2b + 2}$ به صورت $[-3, 4]$ و دامنه‌ی تابع $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{-cx^2 + 2x + d}$ به صورت $\mathbb{R} - \{a, b\}$ است. حاصل $a + b + d + 3c$ کدام است؟

۷ (۴)

۵ (۳) ✓

۴ (۲)

۳ (۱)

۴ و -۳ ریشه‌های عبارت درجه‌ی دوم زیر رادیکال هستند تا بین دو ریشه یعنی $(-3, 4)$ مخالف علامت a شود، یعنی مثبت شود ...

$$S = -3 + 4 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 1 = -\frac{a-1}{-1} \Rightarrow a = 2$$

$$P = (-3)(4) = \frac{c}{a} \Rightarrow -12 = \frac{2b+2}{-1} \Rightarrow b = 5$$

حالا دامنه‌ی g می‌شود $\mathbb{R} - \{2, 5\}$ و این یعنی ۲ و ۵ ریشه‌های مخرج g هستند:

$$-cx^2 + 2x + d : S = 2 + 5 = -\frac{2}{-c} \Rightarrow c = \frac{2}{7}$$

$$P = 2 \times 5 = \frac{d}{-c} = \frac{7d}{-2} \Rightarrow d = -\frac{20}{7}$$

$$\Rightarrow a + b + d + 3c = 2 + 5 - \frac{20}{7} + \frac{6}{7} = 5$$

۱۰. دامنه‌ی دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 12}$ و $g(x) = \sqrt{a + |2x + b|}$ با هم برابر است. برد تابع $h(x) = |x| + ab$ در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $[6, +\infty)$ (۲) $[7, +\infty)$ (۳) $[-6, +\infty)$ (۴) $[-7, +\infty)$ ✓

$$D_f : x^2 + x - 12 \geq 0$$

$$\xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{ریشه‌ها: } -4, 3} x \leq -4 \text{ یا } x \geq 3 \quad ①$$

$$D_g : a + |2x + b| \geq 0 \Rightarrow |2x + b| \geq -a \xrightarrow{a < 0}$$

$$2x + b \geq -a \text{ یا } 2x + b \leq a$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{-a - b}{2} \text{ یا } x \leq \frac{a - b}{2} \quad ②$$

$$\xrightarrow[D_f = D_g]{②, ①} \frac{-a - b}{2} = 3, \frac{a - b}{2} = -4$$

$$\xrightarrow{\times 2} -a - b = 6, a - b = -8 \xrightarrow{\text{حل دستگاه}}$$

$$a = -7, b = 1 \xrightarrow{\text{جای گذاری}} h(x) = |x| - 7$$

$$\xrightarrow{\min} -7 \xrightarrow{\text{برد}} [-7, +\infty)$$



عملیات جبری روی توابع

۱. $f = \{(2-m, n), (2, \sqrt{m}), (-1, m-2)\}$ تابعی ثابت باشد و $g(x) = \sqrt{4n+2x-x^2}$. آن گاه دامنه‌ی تابع $y = (\frac{f}{g})(x)$

چند عضو دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱) صفر

$$\sqrt{m} = m - 2 \xrightarrow[m \geq 2 (*)]{\text{توان ۲}} m = m^2 - 4m + 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \xrightarrow{(*)} x \\ m=4 \end{cases} \Rightarrow n = \sqrt{m} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f = \{(-2, 2), (2, 2), (-1, 2)\} \\ g(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 4}; D_g = [-2, 4] \end{cases}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = (\{-2, 2, -1\} \cap [-2, 4]) - \{-2, 4\}$$

$$= \{-2, 2, -1\} - \{-2, 4\} = \{2, -1\}$$

دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ دو عضو دارد.

۲. هرگاه $f(x) = \sqrt{3x + x^2 + 13}$ ، $g(x) = \sqrt{(1-a)x^2 + bx + 1}$ و $D_{f+g} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}]$ بوده و دامنه‌ی $y = \frac{f(x)}{f^2(x) - a}$ به صورت $\mathbb{R} - \{c, d\}$ نوشته شده باشد، حاصل $a + b + c + d$ کدام است؟

۵ (۴) ✓

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$D_f: x^2 + 3x + 13 \geq 0 \xrightarrow[\text{و } x^2 \text{ ضریب } > 0]{\Delta = 9 - 52 < 0} \text{همواره مثبت}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \xrightarrow[D_{f+g}]{D_f \cap D_g} \underbrace{\mathbb{R} \cap D_g}_{D_g} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}]$$

ریشه‌های عبارت

$$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{-b}{1-a}, P = (-\frac{1}{2})(\frac{1}{5}) = \frac{1}{1-a} \Rightarrow 1-a = -1.$$

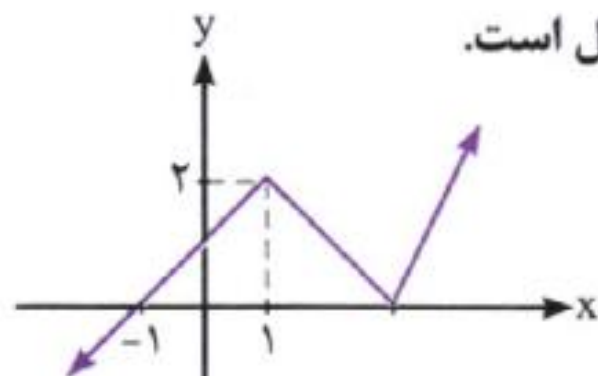
$$\Rightarrow a = 11 \xrightarrow{\text{از } S} \frac{-3}{10} = \frac{-b}{1-11} \Rightarrow b = -3$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری}} y = \frac{f(x)}{f^2(x) - a} = \frac{\sqrt{3x + x^2 + 13}}{3x + x^2 + 2}$$

$$\xrightarrow{\text{دامنه}} 3x + x^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x \neq -2, -1$$

$$a + b + c + d = 11 - 3 - 2 - 1 = 5$$

۳. سهمی f با ریشه‌های -۴ و ۲ از نقطه‌ی $(-۳, ۱۰)$ می‌گذرد و نمودار تابع g به صورت مقابل است.



۲ (۲) ✓
۴ (۴) صفر

حاصل $(\frac{2f+2g^2}{f-g})(-۲)$ کدام است؟

۱ (۱)

۳ (۳)

$$f \xrightarrow[\text{ریشه‌ها: } -۴, ۲]{\text{معادله}} y = a(x-2)(x+4)$$

$$\xrightarrow[\text{صدق بده}]{(-۳, ۱۰)} ۱۰ = a(-۵)(۱) \Rightarrow a = -۲$$

$$\Rightarrow f(x) = -۲(x-2)(x+4) \Rightarrow f(-۲) = -۲(-۴)(۲) = ۱۶$$

$$x < 1 \xrightarrow[\text{با } (-۱, ۰)]{\text{شکل } g \text{ و } (۱, ۲)} m = \frac{۲-۰}{۱-(-۱)} = ۱ \xrightarrow[\text{معادله‌ی خط}]{\text{با } (-۱, ۰)}$$

$$y-۰ = ۱(x+۱) \Rightarrow g(x) = x+۱ \Rightarrow g(-۲) = -۱$$

$$\left(\frac{2f+2g^2}{f-g}\right)(-۲)$$

$$= \frac{2f(-۲) + 2g^2(-۲)}{f(-۲) - g(-۲)} = \frac{۲(۱۶) + ۲(-۱)^2}{۱۶ - (-۱)} = \frac{۳۴}{۱۷} = ۲$$

۴. اگر $f = \{(۴, ۲), (۵, ۴), (۶, ۵), (۷, ۸)\}$ ، $g = \{(۴, ۱) و (۶, ۱), (k, ۸), (-۱, ۱۱), (m, ۷), (n, ۰)\}$ ، $(f + g)(۵) = ۱۱$ و

$(f - g)(۷) = ۸$ باشند، در این صورت $(fg)(m - ۱) + (\frac{f}{g})(n - ۱)$ کدام است؟

۹ (۴

✓ ۷ (۳

۵ (۲

۳ (۱

$$(f + g)(۵) = ۱۱ \Rightarrow \underbrace{f(۵)}_۴ + g(۵) = ۱۱$$

$$\Rightarrow g(۵) = ۷ \xrightarrow{\text{اعضای } g} m = ۵$$

$$(f - g)(۷) = ۸ \Rightarrow \underbrace{f(۷)}_۸ - g(۷) = ۸$$

$$\Rightarrow g(۷) = ۰ \xrightarrow{\text{اعضای } g} n = ۷$$

$$\xrightarrow{\text{جای گذاری}} (fg)(۴) + \frac{f}{g}(۶)$$

$$= f(۴)g(۴) + \frac{f(۶)}{g(۶)} = ۲ \times ۱ + \frac{۵}{۱} = ۷$$

۵. f و g دو تابع چند جمله‌ای هستند به طوری که $(2g - f)(x) = 9x + 15$ و $(3f - 5g)(x) = x^2 - 21x - 40$. در این صورت دامنه‌ی تابع $\frac{f+g}{g}$ کدام است؟

$\mathbb{R} - \{1, 5\}$ (۴)

$\mathbb{R} - \{1, -5\}$ (۳)

$\mathbb{R} - \{-1, 5\}$ (۲)

$\mathbb{R} - \{-1, -5\}$ (۱)



$$2g(x) - f(x) = 9x + 15$$

$$\xrightarrow{\times 3} 6g(x) - 3f(x) = 27x + 45 \quad (1)$$

$$3f(x) - 5g(x) = x^2 - 21x - 40 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) + (2)} g(x) = x^2 + 6x + 5$$

$$D_{\frac{f+g}{g}} : \underbrace{D_f \cap D_g}_{\mathbb{R}} - \{x \mid g(x) = 0\} \xrightarrow[\text{ریشه های } g]{-1, -5}$$

$$\mathbb{R} - \{-1, -5\}$$

۶. هرگاه $f(x) = \frac{x}{2x^2 + (a-2)x - a}$ و $g(x) = \frac{2}{bx^2 - 2bx + 4}$ بوده و $D_{f-g} = \mathbb{R} - \{c\}$ باشد، کمترین مقدار $a + b + c$ کدام است؟

$\begin{matrix} -2 & (1) \\ -3 & (2) \\ -1 & (3) \\ 4 & (4) \end{matrix}$

✓

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{c\}$$

حالت اول: مخرج g هم ریشه‌ی مضاعف ۱ داشته:

$$2x^2 + (a-2)x - a \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفره}} x_1 = 1, x_2 = \frac{-a}{2}$$

$2 + (a-2) - a = 0$

$$\xrightarrow{\substack{D=\mathbb{R}-\{1\} \\ c=1}} -\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2 \text{ و } P = 1 \times 1 = \frac{4}{b} \Rightarrow b = 4$$

حالت دوم: مخرج g درجه ۲ نبوده $b = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

این طوری $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ بوده و دوباره همان نتیجه

حاصل می‌شود... $\min(a + b + c) = (-2 + 0 + 1) = -1$

۷. اگر $f(x) = \sqrt{5-|x|} + \sqrt{3+x}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{1-x}}$ بوده و دامنه‌ی $f+g$ را به فرم $[a, b)$ بنویسیم. $a+b$ کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)



$$D_f : \begin{cases} 5 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5 \\ x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \xrightarrow{\text{اشتراک با بالا}} D_f = [-3, 5] \end{cases}$$

$$D_g : \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با بالا}} D_g = [-2, 1) \end{cases}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-3, 5] \cap [-2, 1) = [-2, 1)$$

$$\xrightarrow[a=1]{a=-2} a+b = -2+1 = -1$$

۸. اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ ، $g(x) = \sqrt{x-m} + a + 1$ ، $D_{fg} = [-2, a]$ و $(f-g)(-1) = 2n+1$ باشند، n کدام است؟

$$-4 \quad (4)$$

$$-3 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$-1 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_f : 3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \\ D_g : x - m \geq 0 \Rightarrow x \geq m \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} D_{fg} = D_f \cap D_g$$

$$\underline{\underline{m \leq 3}} [m, 3] \xrightarrow[\text{فرض}]{[-2, a]} m = -2, a = 3$$

$$\xrightarrow[\text{در } g]{\text{جای گذاری}} g(x) = \sqrt{x+2} + 4$$

$$\begin{aligned} (f-g)(-1) &= f(-1) - g(-1) = \sqrt{4} - (\sqrt{1} + 4) \\ &= 2 - 5 = -3 = 2n + 1 \Rightarrow n = -2 \end{aligned}$$

۹. اگر $(f^2 + g^2)(a) = 34$ و $(f - g)(a) = 8$ باشند، مقدار $(\frac{f}{g})(a)$ کدام است؟

$$-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3} \text{ (۴)}$$

$$-\frac{3}{5}, -\frac{5}{3} \text{ (۳)}$$



$$-\frac{5}{2}, -\frac{2}{5} \text{ (۲)}$$

$$-\frac{8}{5}, -\frac{5}{8} \text{ (۱)}$$

$$f^2(a) + g^2(a) = 34 \xrightarrow{\text{اتحاد}}$$

$$\underbrace{(f(a) - g(a))^2}_{(f-g)(a) = f(a) - g(a) = 8} + 2f(a)g(a) = 34 \xrightarrow{\text{فرض}} 8^2 + 2f(a)g(a)$$

$$(f - g)(a) = f(a) - g(a) = 8$$

$$= 34 \Rightarrow f(a)g(a) = \frac{34 - 64}{2} = -15 \quad (*)$$

$$f(a) - g(a) = 8 \Rightarrow f(a) = g(a) + 8$$

$$\xrightarrow[\text{در } (*)]{\text{جای گذاری}} (g(a) + 8)g(a) = -15$$

$$f(a) - g(a) = 8 \Rightarrow f(a) = g(a) + 8$$

$$\xrightarrow[\text{در } (*)]{\text{جای گذاری}} (g(a) + 8)g(a) = -15$$

$$g(a)^2 + 8g(a) + 15 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{ریشه ها}]{\text{حل معادله}} \begin{cases} g(a) = -3 \Rightarrow f(a) = 5 \\ g(a) = -5 \Rightarrow f(a) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{5}{-3} \text{ یا } \frac{3}{-5}$$

۱۰. هرگاه $f(x) = |x-2|$ و $g(x) = \begin{cases} 5-2x & x > 2 \\ x-1 & x \leq 2 \end{cases}$ ، در این صورت مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع $y = (f-g)(x)$ و محور x ها کدام است؟

$$\frac{7}{6} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{12} \text{ (۳) ✓}$$

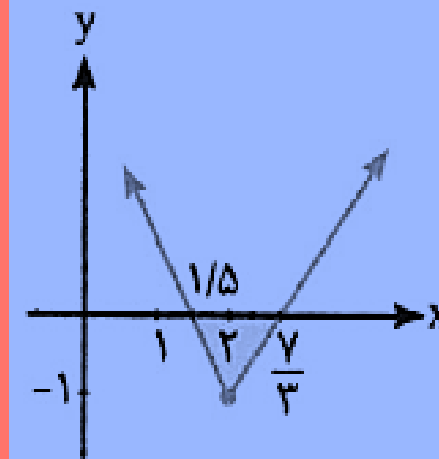
$$\frac{7}{12} \text{ (۲)}$$

$$\frac{5}{6} \text{ (۱)}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x > 2 \\ -x+2 & x \leq 2 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 5-2x & x > 2 \\ x-1 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow (f-g)(x) = \begin{cases} (x-2) - (5-2x) & x > 2 \\ (-x+2) - (x-1) & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} (f-g)(x) = \begin{cases} 3x-7; & x > 2 \\ -2x+3; & x \leq 2 \end{cases}$$



مساحت رنگی $\longrightarrow$

$$S = \frac{\overbrace{\left(\frac{7}{3} - 2\right)}^{\text{قاعده}} \times \overbrace{1}^{\text{ارتفاع}}}{2} = \frac{5}{12}$$

ترکیب توابع

۱. اگر $f(x) = \frac{x}{2} - [\frac{x}{2}]$ ، $g(x) = a2^x + b$ و برد تابع $g \circ f$ به فرم $[0, 3)$ باشد، مقدار $(f \circ g)(b) - (g \circ f)(a - 1)$ کدام است؟

$$\frac{11}{16} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\frac{-5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{15}{16} \quad (2)$$

$$\frac{21}{8} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{2} - [\frac{x}{2}] \xrightarrow{\text{برد خاص}} 0 \leq f(x) < 1 \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } y=2^x}$$

$$2^0 \leq 2^{f(x)} < 2^1 \xrightarrow[a > 0]{\times a} a \leq a 2^{f(x)} < 2a$$

$$(f \circ g)(-3) - (g \circ f)(2) = f(\underbrace{g(-3)}_{-\frac{21}{8}}) - g(\underbrace{f(2)}_0) = \frac{11}{16} - 0 = \frac{11}{16}$$

$$\xrightarrow{+b} a + b \leq \underbrace{a 2^{f(x)} + b}_{g(f(x))} < 2a + b \xrightarrow{\text{مطابقت با فرض}}$$

$$a + b = 0 \text{ و } 2a + b = 3 \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 3 \text{ و } b = -3$$

$$\Rightarrow g(x) = 3 \times 2^x - 3$$



۲. اگر $f = \{(1, 5), (2, 4), (0, -1), (-2, 3), (-4, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{2-x^2}$ باشند، برد تابع $f \circ g$ ، چند عضوی است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \sqrt{2-x^2}\}$$

$2-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2}$

$$\in \{1, 2, 0, \underbrace{-2, -4}_{\text{غیرممکن}}\}$$

چون رادیکال منفی نمی شود، پس:

$$\sqrt{2-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad \textcircled{1}$$

$$\sqrt{2-x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = -2 \times \quad \textcircled{2}$$

$$\sqrt{2-x^2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \textcircled{3}$$

اشتراک این ها با $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ می شود: $x = \pm 1$ یا $\pm\sqrt{2}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\Rightarrow f \circ g = \{(1, 5), (-1, 5), (\sqrt{2}, -1), (-\sqrt{2}, -1)\}$$

$\xrightarrow{\text{برد}} R = \{5, -1\}$

۳. برای $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \left| \frac{2x-4}{x+3} \right|$ دامنه‌ی fog به صورت $(-\infty, b] - \{a\}$ نوشته شده است. $2b-a$ کدام است؟

۲ (۴)



-۴ (۳)

-۲ (۲)

۴ (۱)

$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \neq -3, \left| \frac{2x-4}{x+3} \right| \geq 2\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{D_f : x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2}$

$$\left| \frac{2x-4}{x+3} \right| \geq 2 \xrightarrow{\text{Basic}} \frac{2x-4}{x+3} \geq 2 \text{ یا } \frac{2x-4}{x+3} \leq -2$$

$$\Rightarrow \frac{2x-4}{x+3} - 2 \geq 0 \text{ یا } \frac{2x-4}{x+3} + 2 \leq 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{-10}{x+3} \geq 0$$

$$\text{یا } \frac{4x+2}{x+3} \leq 0 \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{حل نامعادله}} x < -3 \text{ یا } -3 < x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{x \neq -3} D_{fog} = (-\infty, -3) \cup (-3, -\frac{1}{2}]$$

$$= (-\infty, -\frac{1}{2}] - \{-3\}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{2}, a = -3 \Rightarrow 2b - a = -1 - (-3) = 2$$

۴. هرگاه $f = \{(-2, 5), (3, 3), (-1, 4), (2, 6)\}$ و $g = \{(-2, 3), (2, -1), (4, -2)\}$ باشند، آن گاه تابع $\frac{f+g}{f \cap g}$ چند عضو دارد؟

۴ (۴)
۳ (۳)
۲ (۲) ✓
۱ (۱)

$$\begin{cases} f + g = \{(-2, 8), (2, 5)\} \\ f \cap g = \{(-2, 3), (2, 4), (4, 5)\} \end{cases}$$

می دانیم که دامنه ی تابع $\frac{f+g}{f \cap g}$ اشتراک دامنه ی توابع $f + g$ و $f \cap g$ است به شرطی که $f \cap g \neq \emptyset$ باشد، پس:

$$\frac{f+g}{f \cap g} = \left\{ \left(-2, \frac{8}{3}\right), \left(2, \frac{5}{4}\right) \right\}$$



۵. توابع $f(x) = x^2 - x + 5$ و $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ مفروض است. معادله‌ی $gof(x) = 1$ چند ریشه دارد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (۱) فاقد ریشه است.



$$gof(x) = g(f(x)) = 1$$

$$\xrightarrow{f(x)=t \quad (*)} g(t) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2t}{t^2 + 1} = 1 \Rightarrow t^2 + 1 = 2t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \xrightarrow{(*)} f(x) = 1 \Rightarrow x^2 - x + 5 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 16 < 0 \Rightarrow \text{معادله فاقد ریشه است}$$

ع. هرگاه $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ و $(g \circ f)(x) = \frac{2x}{x^3 + 1}$ باشند، آن گاه معادله‌ی $g(x+1) = 1$ چند ریشه دارد؟

۳ (۴) ✓

۲ (۳)

۱ (۲)

(۱) هیچ

$$g(\sqrt[3]{x} + 1) = \frac{2x}{x^3 + 1}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x} + 1 = t}{x = (t-1)^3} \rightarrow g(t) = \frac{2(t-1)^3}{(t-1)^9 + 1} \Rightarrow g(x+1) = \frac{2x^3}{x^9 + 1} \stackrel{\text{فرض}}{=} 1$$

$$2x^3 = x^9 + 1 \xrightarrow{x^3 = k} 2k = k^3 + 1 \Rightarrow k^3 - 2k + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفره}} k = 1$$

اگر $k^3 - 2k + 1$ را بر $k - 1$ تقسیم کنیم، خارج قسمت می‌شود $k^2 + k - 1$ و این یعنی:

$$k^2 + k - 1 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله}} k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x^3 = 1 \text{ یا } \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{تعداد جواب}} 3 \text{ تا}$$

۷. دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[\frac{1}{54}, \frac{1}{6}]$ است. دامنه‌ی $y = f(\frac{1}{2}3^x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴)

۳ (۳)



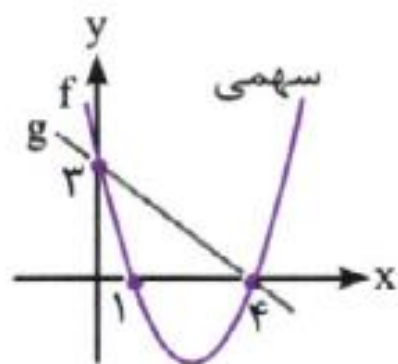
۲ (۲)

۱ (۱)

$$\frac{1}{54} \leq \frac{1}{2}3^x \leq \frac{1}{6} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{54} \leq 3^x \leq \frac{2}{6} \Rightarrow \frac{1}{27} \leq 3^x \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3^{-3} \leq 3^x \leq 3^{-1} \xrightarrow[\text{اکیدا صعودی}]{y=3^x} -3 \leq x \leq -1$$

$$\xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = -3, -2, -1 \xrightarrow{\text{تعداد}} 3$$



۸. شکل زیر نمودار دو تابع f و g را نمایش می دهد. حاصل $f(g(6))$ کدام است؟

$$-\frac{15}{16} \quad (2)$$

$$\frac{165}{16} \quad (4)$$



$$\frac{15}{16} \quad (1)$$

$$-\frac{165}{16} \quad (3)$$

ابتدا ضابطه ی توابع f و g را به دست می آوریم.

g تابعی خطی است که از دو نقطه ی $(0, 3)$ و $(4, 0)$

گذشته است:
 $g(x) = mx + h$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(0) = 0 + h = 3 \Rightarrow h = 3 \\ g(4) = 4m + h = 0 \Rightarrow 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{3}{4}x + 3 \Rightarrow g(6) = -\frac{3}{4} \times 6 + 3 = -\frac{3}{2} \quad (*)$$

نمودار تابع f یک سهمی است که محور x ها را در دو نقطه

به طول های ۱ و ۴ قطع کرده است، پس:

$$f(x) = a(x-1)(x-4) \xrightarrow{(0,3) \in f} a(0-1)(0-4) = 3$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}(x-1)(x-4)$$

$$\Rightarrow f(g(6)) = f(g(6)) \stackrel{(*)}{=} f\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{2} - 1\right) \left(-\frac{3}{2} - 4\right) = \frac{3}{4} \left(-\frac{5}{2}\right) \left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{165}{16}$$

۹. هرگاه $f = \{(-2, 4), (1, 5), (0, 7), (4, 10)\}$ و $g = \{(1, -2), (3, 4), (7, 4), (2, 0)\}$ باشند، کدام گزینه‌ی زیر در مورد

تابع fog نادرست است؟

(۱) صعودی است.

(۳) غیر یک‌به‌یک است.

(۲) برد تابع fog شامل ۳ عضو است.

(۴) اشتراک دامنه‌های fog و f تهی است. ✓

$$\text{fog} = \{(1, 4), (3, 10), (7, 10), (2, 7)\}$$



۱. شکل زیر نمودار تابع $y = f(x-2)$ را نمایش می‌دهد. اگر $g(x) = \frac{2x}{x-3}$ باشد، آنگاه حاصل

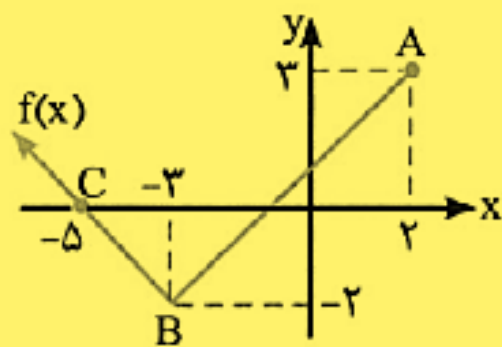
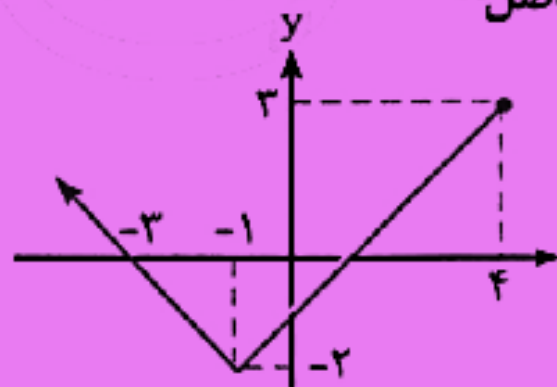
$g \circ f\left(\frac{3}{2}\right) + f \circ g(2)$ کدام است؟

۱-۰ (۱)

۸- (۲)

۱۱- (۳) ✓

۱۲- (۴)



ابتدا نمودار

داده شده را ۲ واحد به سمت

چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار

تابع $f(x)$ به دست آید:

حالا ضابطه‌ی تابع f را به دست می‌آوریم، پس داریم:

$$\begin{cases} A(2, 3) \\ B(-3, -2) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{-2-3}{-3-2} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی AB}} y - 3 = (1)(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

$$\begin{cases} B(-3, -2) \\ C(-5, 0) \end{cases} \Rightarrow m_{BC} = \frac{0+2}{-5+3} = -1$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی BC}} y - 0 = (-1)(x + 5) \Rightarrow y = -x - 5$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; -3 \leq x \leq 2 \\ -x - 5 & ; x < -3 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{2x}{x-3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \circ g(2) = f(g(2)) = f(-4) = -(-4) - 5 = -1 \\ g \circ f\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2} - 3} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -10 \end{cases}$$

تابع یک به یک و وارون

۱. نمودار وارون تابع $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$ ($x \geq -2$) نمودار تابع $g(x) = 4 - \sqrt{2x+26}$ را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. OA کدام است؟ (O مبدأ مختصات است)

۵ (۴) ✓

$\sqrt{5}$ (۳)

$2\sqrt{5}$ (۲)

۴ (۱)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^2 + 8x - 5 = 2(x^2 + 4x) - 5 \xrightarrow{\text{اتحاد}} \\
 f(x) &= 2((x+2)^2 - 4) - 5 = 2(x+2)^2 - 13 \xrightarrow{\text{جابه‌جا کن}} \\
 x &= 2(y+2)^2 - 13 \xrightarrow{y \text{ را پیدا کن}} \frac{x+13}{2} = (y+2)^2 \\
 \Rightarrow |y+2| &= \sqrt{\frac{x+13}{2}} \xrightarrow{y \geq -2} y+2 = \sqrt{\frac{x+13}{2}} \\
 \Rightarrow y &= f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+13}{2}} - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow[\text{با } g]{\text{تلاقی}} 4 - \sqrt{2x+26} &= \frac{\sqrt{x+13}}{\sqrt{2}} - 2 \\
 \Rightarrow 6 - \sqrt{2(x+13)} &= \frac{\sqrt{x+13}}{\sqrt{2}} \\
 \xrightarrow{\times \sqrt{2}} 6\sqrt{2} - 2\sqrt{x+13} &= \sqrt{x+13} \\
 \Rightarrow 3\sqrt{x+13} &= 6\sqrt{2} \\
 \Rightarrow \sqrt{x+13} &= 2\sqrt{2} \xrightarrow{\text{به توان } 2} x+13=8 \Rightarrow x=-5 \\
 \Rightarrow A(-5, g(-5)) &= (-5, 0) \Rightarrow OA = \sqrt{25+0} = 5
 \end{aligned}$$

۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx^2 - 3$ وارون خود را در نقطه‌ی $(2, -1)$ قطع می‌کند. اگر $g(x) = \frac{ax-1}{bx+3}$ باشد، $g^{-1}(-\frac{1}{2})$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲) ✓

۲ (۱)

$$\begin{aligned}
 (2, -1) \in f^{-1} &\Rightarrow (-1, 2) \in f \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} \\
 2 &= a(-1)^2 + b(-1)^2 - 3 \xrightarrow{\text{ساده}} -a + b = 5 \\
 (2, 1) \in f &\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} -1 = a(2)^2 + b(2)^2 - 3 \\
 &\xrightarrow{\text{ساده}} 4a + 4b = 2 \xrightarrow{\div 2} 2a + 2b = 1 \\
 &\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = -\frac{3}{2}, b = \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{در } g} g(x) = \frac{-\frac{3}{2}x - 1}{\frac{7}{2}x + 3} \\
 &= \frac{-3x - 2}{7x + 6} \xrightarrow{\substack{g^{-1}(-\frac{1}{2}) = \alpha \\ g(\alpha) = -\frac{1}{2}}} \frac{-3\alpha - 2}{7\alpha + 6} = -\frac{1}{2} \\
 &\Rightarrow 6\alpha + 4 = 7\alpha + 6 \Rightarrow \alpha = -2
 \end{aligned}$$



۳. قرینه‌ی تابع $f(x) = \frac{2x+a}{x-2b}$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم، تابع $g(x) = \frac{4x-3}{cx+2}$ است. $abcd$ کدام است؟

(۱) ۶

(۲) -۶

(۳) ۳

(۴) -۳



جابه‌جا
وارون
قرینه

$$y^{-1} = \frac{dx - b}{-cx + a} \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$f(x) = \frac{2x+a}{x-2b} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2bx-a}{-x+2} \xrightarrow{\text{مطابقت با فرض}}$$

$$\underbrace{-2b=4}_{b=-2}, a=3, c=-1 \Rightarrow abc = (3)(-2)(-1) = 6$$



۴. اگر رابطه‌ی $f = \{(2, -1), (5, 2a), (3, 4), (2b+1, -2), (2, a^2 - a - 3)\}$ تابعی یک به یک باشد، در این صورت حاصل $a + b$ کدام است؟

۴ (۴)

۱ (۳) ✓

۲ (صفر)

۳ (۱)

$$a = 2 \Rightarrow f = \{(2, -1), (5, 4), (3, 4), (2b+1, -2)\} \times$$

$$a = -1 \Rightarrow f = \{(2, -1), (5, -2), (3, 4), (2b+1, -2)\}$$

$$f: 2b+1=5 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a+b=-1+2=1$$

$$f: 2b+1=5 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a+b=-1+2=1$$

۵. تابع‌های $f(x) = (m+1)x^2 - (3m-1)x + 1$ و $g(x) = |x+m+3|$ روی $(-2, +\infty)$ وارون‌پذیر هستند. حدود m کدام است؟

$$-\frac{1}{7} \leq m \leq -\frac{3}{7} \quad (۴) \quad -1 \leq m \leq -\frac{5}{7} \quad (۳) \quad -1 \leq m \leq -\frac{3}{7} \quad (۲) \quad -1 \leq m \leq -\frac{4}{7} \quad (۱)$$

تابع درجه‌ی دوم بعد از رأس (یا قبل آن) و تابع
قدرمطلق درجه‌ی اول بعد از ریشه‌ی خود (یا قبل آن) وارون‌پذیرند...

$$x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{3m-1}{2m+2} \xrightarrow{(-2, +\infty)} \frac{3m-1}{2m+2} \leq -2$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} \frac{3m-1}{2m+2} + 2 \leq 0 \xrightarrow{\text{ساده}} \frac{7m+3}{2m+2} \leq 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m \leq -\frac{3}{7} \quad (*)$$

اگر $f(x)$ تابعی خطی باشد، روی $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر است، پس

$$-1 \leq m \leq -\frac{3}{7} \quad (**)$$

هم جزو جواب است: $m = -1$

$$\begin{aligned} \text{ریشه در قدرمطلق} & \xrightarrow{(-2, +\infty)} -m-3 \leq -2 \\ \Rightarrow m \geq -1 & \xrightarrow{\cap \text{ با } (**)} -1 \leq m \leq -\frac{3}{7} \end{aligned}$$



۶. هرگاه $f(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x+1}$ باشد، معادله‌ی $f^{-1}(x) = 2x^2 - 1$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



$$f^{-1}(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow f(2x^2 - 1) = x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 1 + 2\sqrt{2x^2}} = x \quad (x \geq 0)$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x^2 - 1 + 2\sqrt{2}|x| = x^2$$

$$\Rightarrow |x|^2 + 2\sqrt{2}|x| - 1 = 0 \xrightarrow{|x|=A} A^2 + 2\sqrt{2}A - 1 = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{12}}{2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{|x|=A \geq 0} |x| = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ یا } \sqrt{2} - \sqrt{3} \xrightarrow{x \geq 0} \text{یک جواب}$$



۷. تابع با ضابطه‌ی $y = (1-m)x^2 + 2mx$ در بازه‌ی $[-2, 3]$ یک به یک است. برای m چند مقدار طبیعی یک رقمی وجود دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲) ✓

(۱) هیچ

کافیه رأس سهمی در این بازه نباشد!

$$y = (1-m)x^2 + 2mx \xrightarrow{\text{رأس}} x_S = -\frac{b}{2a}$$

$$= \frac{-2m}{2-2m} = \frac{m}{m-1}$$

$$\textcircled{۱} \quad \frac{m}{m-1} \geq 3 \Rightarrow \frac{m}{m-1} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{-2m+3}{m-1} \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < m \leq \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{۲} \quad \frac{m}{m-1} \leq -2 \Rightarrow \frac{m}{m-1} + 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{3m-2}{m-1} \leq 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین عبارت}} \frac{2}{3} \leq m < 1$$

اجتماع این دو محدوده می‌شود: $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right] - \{1\}$ و در این محدوده عدد طبیعی وجود ندارد!

اما به ازای $m=1$ سهمی نداریم! و خط $y=2x$ حاصل می‌شود که در هر بازه‌ای یک به یک است ...!

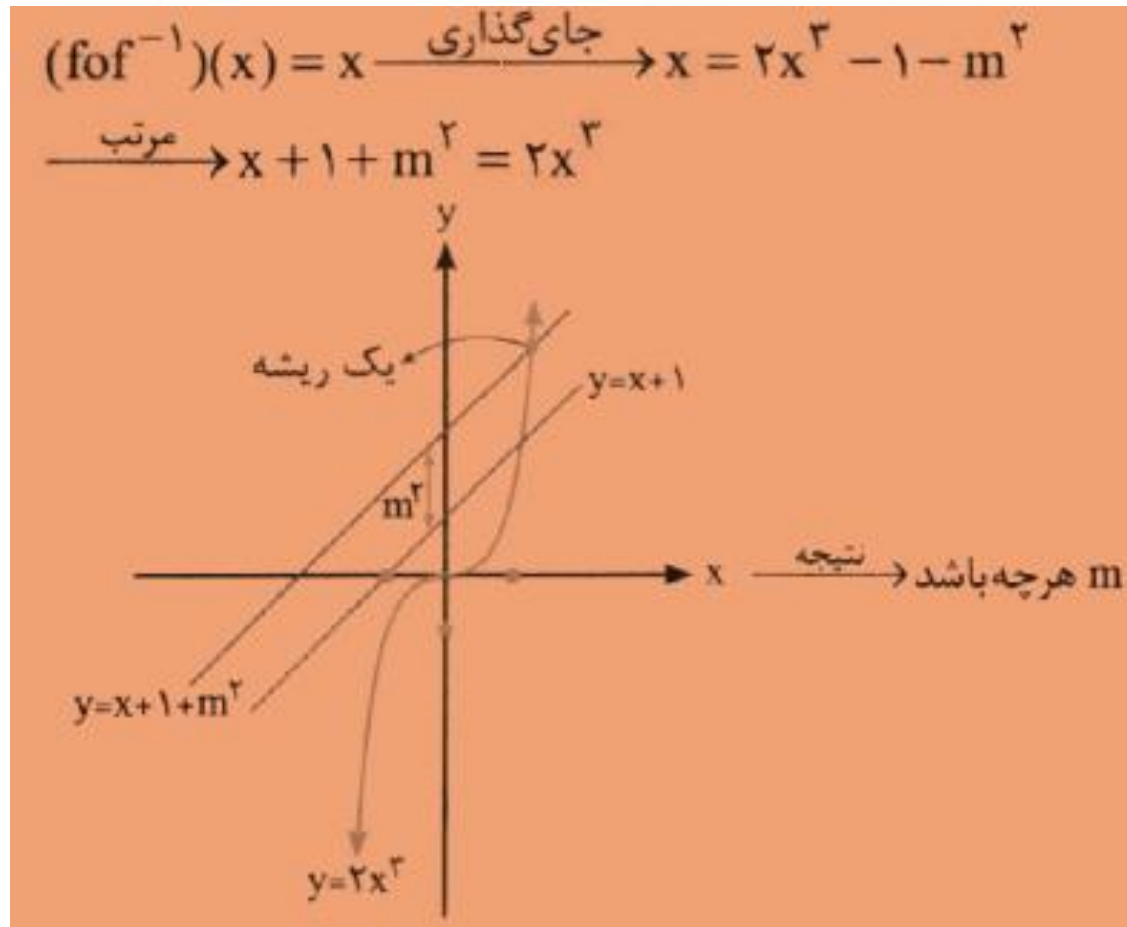
۸. هرگاه $f(x) = 2x^2 - 5x$ و معادله $(f \circ f^{-1})(x) = 2x^2 - 1 - m^2$ تنها یک ریشه داشته باشد، حدود m کدام است؟

$\mathbb{R} - [-1, 3]$ (۴)

$[-1, 3]$ (۳)

$[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ (۲)

$\mathbb{R}$ (۱)



۹. اگر توابع f و g به عنوان ماشین، به صورت $x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow x$ باشند و $g(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1$ باشد، آن گاه حاصل $f(x) + f(-x)$ کدام است؟

$$-3x^2 (4)$$

$$-3x^2 + 2 (3)$$

$$-6x^2 + 2 (2) \checkmark$$

$$-3x^2 + 6x (1)$$

با توجه به ماشین داده شده، نتیجه می گیریم که

توابع f و g وارون هم هستند، یعنی: $f(x) = g^{-1}(x)$

$$g(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2} + 1 \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ با } y}$$

$$x = \sqrt[3]{y-2} + 1 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{y-2} \Rightarrow (x-1)^3 = y-2$$

$$\Rightarrow y = (x-1)^3 + 2 = g^{-1}(x) \Rightarrow f(x) = (x-1)^3 + 2$$

$$\Rightarrow f(-x) = (-x-1)^3 + 2$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = (\cancel{x^3} - 3\cancel{x^2} + 3\cancel{x} - 1 + 2)$$

$$+ (-\cancel{x^3} - 3\cancel{x^2} - 3\cancel{x} - 1 + 2) = -6x^2 + 2$$

۱۰. توابع f و g روی $\mathbb{R}$ یک به یک هستند. اگر $f(x+1) = (2a^x + 1)g(2x-1)$ و $f^{-1}(21) = -\frac{1}{2}$ و $g^{-1}(7) = -4$ باشند، حاصل $f^{-1}(3g(-1))$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) ۳

(۱) ۱ 

$$f^{-1}(21) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 21$$

$$x+1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{در رابطه}} f\left(-\frac{1}{2}\right) = (2a^x + 1)g(-4)$$

$$g^{-1}(7) = -4 \Rightarrow g(-4) = 7$$

$$\xrightarrow{\text{عددگذاری کن}} 21 = (2a^x + 1)(7) \Rightarrow 2a^x + 1 = 3 \Rightarrow a^x = 1$$

$$x = 0 \xrightarrow{\text{در رابطه}} f(1) = 3g(-1)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(3g(-1)) = \underbrace{f^{-1}(f(1))}_{(f^{-1} \circ f)(1)} = 1$$

رسم نمودار توابع معروف و انتقال آن‌ها

۱. نمودار تابع $f(x) = 2x^3 + x + 1$ را ۲ واحد به سمت راست و b واحد به سمت بالا منتقل کرده و نمودار حاصل را $g(\frac{2x}{3} - 1)$

نامیده‌ایم. اگر $g(3) = \frac{-b-1}{3}$ باشد، مقدار b کدام است؟

-۲۰۰ (۴)

-۱۵۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

-۱۰۰ (۱) ✓

$$f(x) = 2x^3 + x + 1 \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}}$$

$$f(x-2) = 2(x-2)^3 + (x-2) + 1 \xrightarrow{b \text{ واحد به بالا}}$$

$$f(x-2) + b = 2(x-2)^3 + (x-2) + 1 + b$$

$$g\left(\frac{2x}{3} - 1\right) = 2(x-2)^3 + x - 1 + b$$

$$\xrightarrow[\frac{2x}{3} - 1 = 3]{\frac{2}{x=6}} g(3) = 2(6-2)^3 + 6 - 1 + b \stackrel{-b-1 \text{ فرض}}{=} \frac{-b-1}{3}$$

$$\Rightarrow 133 + b = \frac{-b-1}{3} \xrightarrow{\times 3} 399 + 3b = -b - 1$$

$$\Rightarrow 4b = -400 \Rightarrow b = -100$$

۲. نقطه‌ی $(3, -1)$ روی نمودار $g(x) = f(x+1)$ و نقطه‌ی $(k, 3)$ روی نمودار تابع $h(x) = 1 - 2f(1 - \frac{x}{3})$ قرار دارند. با کدام انتقال، تابع h می‌تواند از مبدأ مختصات بگذرد؟ (تابع f یک به یک است.)

۲ (۹ واحد به راست و ۳ واحد به پایین) ✓

$$y = h(x+9) + 3 \quad (1)$$

۴ (۹ واحد به چپ و ۳ واحد به پایین)

$$y = h(x-9) + 3 \quad (3)$$

$$(3, -1) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} g(3) = f(4) = -1 \quad (*)$$

$$(k, 3) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } h} 3 = 1 - 2f(1 - \frac{k}{3}) \Rightarrow f(1 - \frac{k}{3}) = -1$$

$$\xrightarrow{(*)} 1 - \frac{k}{3} = 4 \Rightarrow k = -9 \Rightarrow h(-9) = 3 \xrightarrow{\text{گذشتن از مبدأ}} (-9, 3)$$

$$y = h(x-9) - 3 \Rightarrow$$

۹ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین

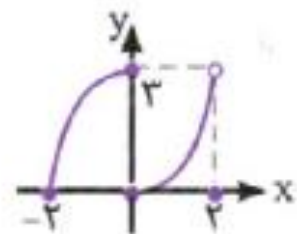
۳. اگر نمودار مقابل، نمایش $y = 3f(\frac{1}{2}x + 1)$ باشد، معادله $f(x+1) = |x|$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

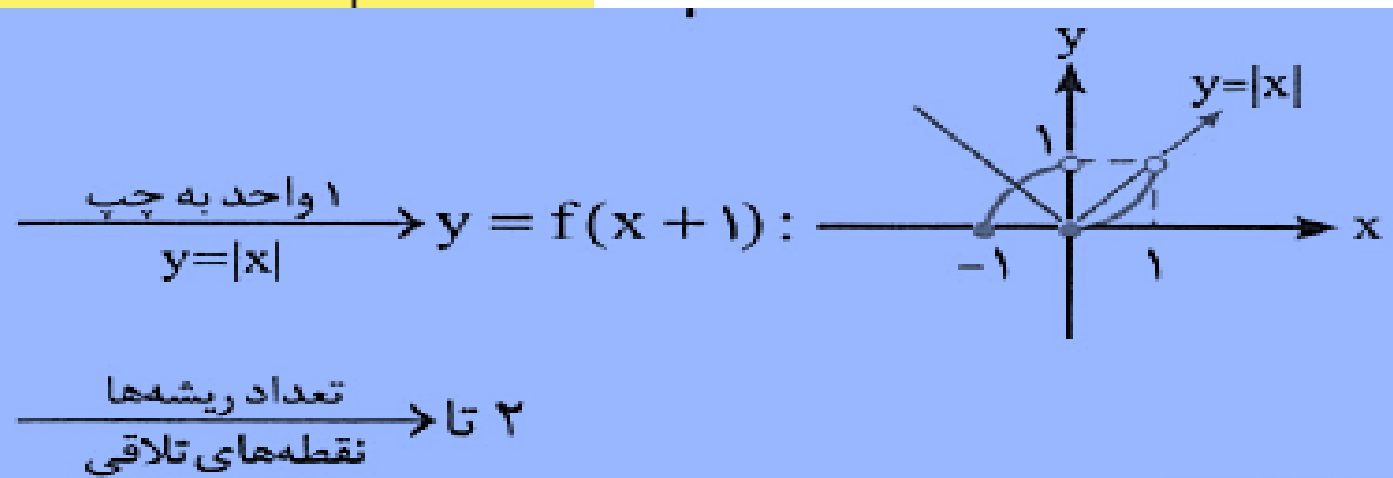
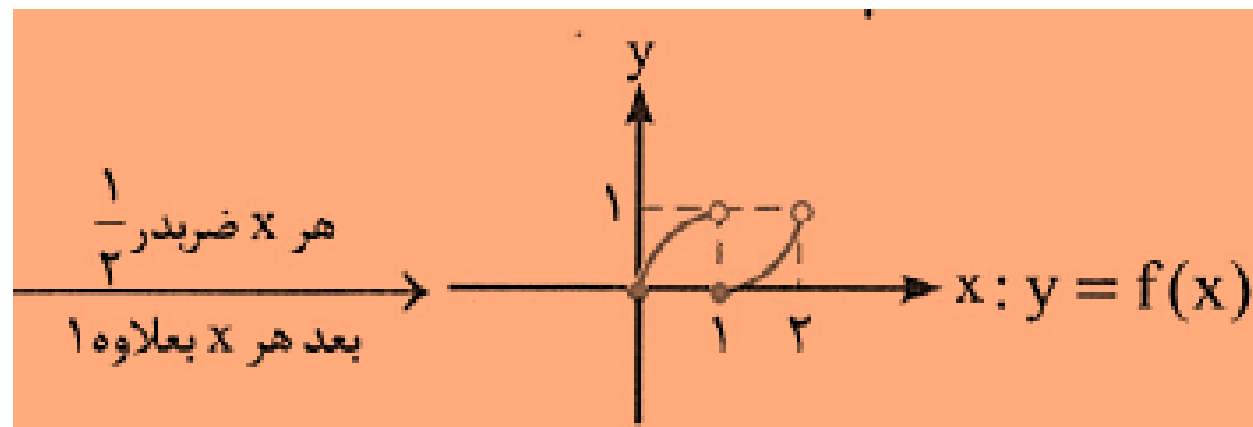
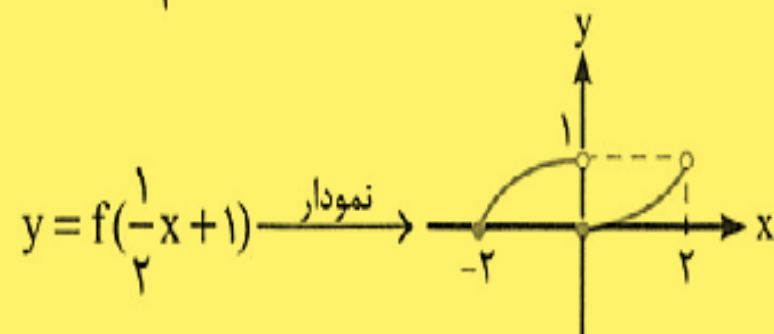
۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)



$$y = 3f\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \xrightarrow{\div 3}$$



۴. قرینه‌ی نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

$$\frac{3}{2} (۴)$$

$$۱ (۳) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2} (۲)$$

$$-۲ (۱)$$

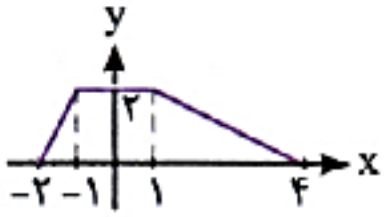
$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y_1 = \sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow[\text{x های مثبت}]{\text{دو واحد به طرف}} y_2 = \sqrt{2-x}$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی با نیمساز ربع ۱ و ۳}} \underbrace{\sqrt{2-x} = x}_{(*)} \xrightarrow[\text{توان دو}]{\text{توان دو}} 2-x = x^2 \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, -2 \xrightarrow[\text{(*)}]{x > 0} x = 1$$

۵. شکل مقابل، نمودار تابع $y = f(x-1) + 1$ است. مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ و محور x ها چقدر است؟



۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

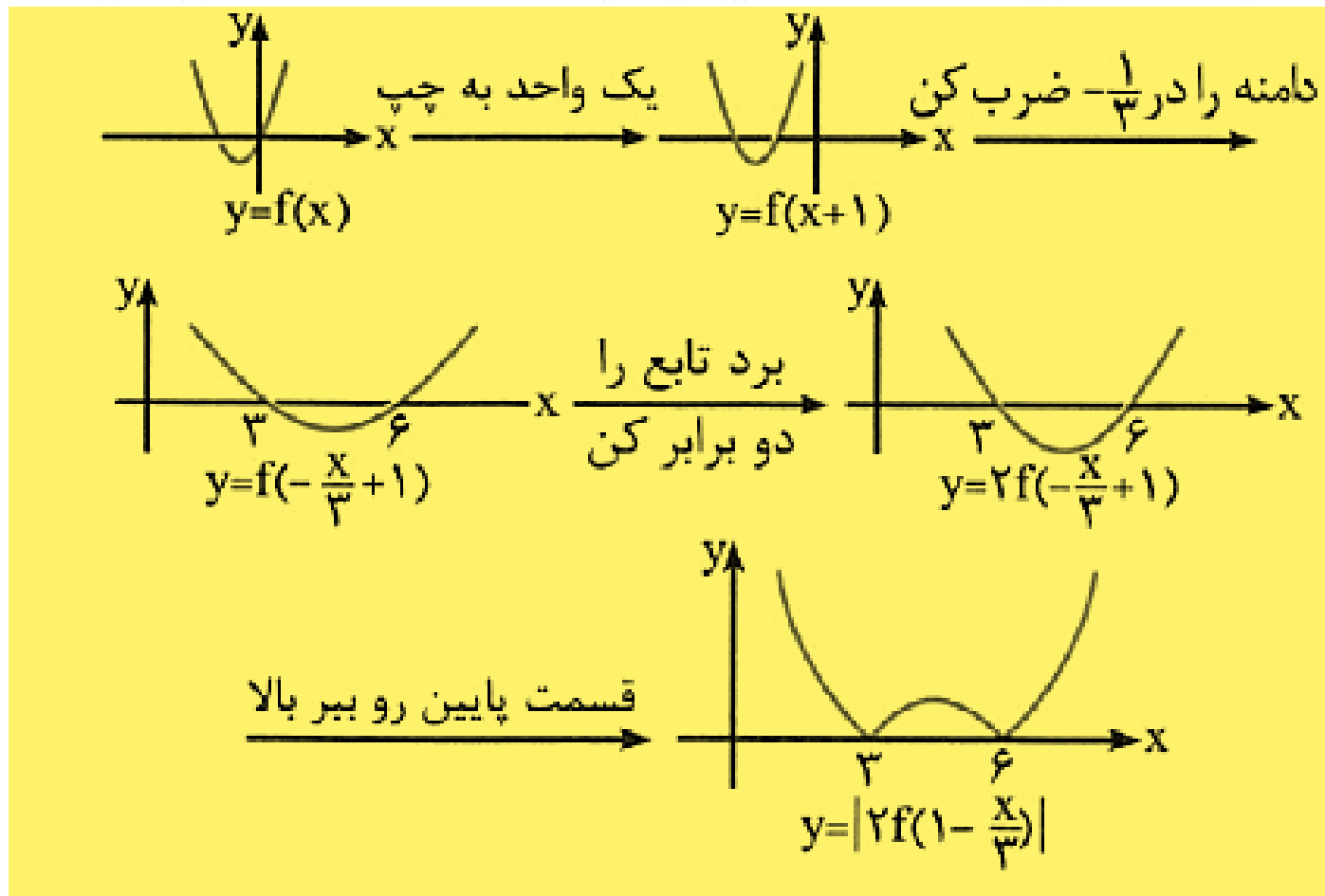
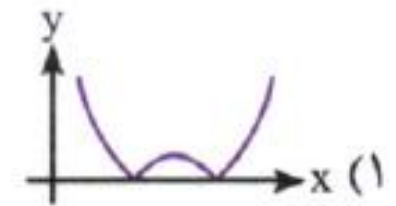
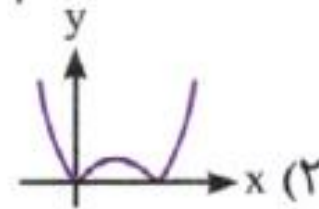
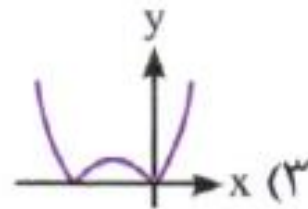
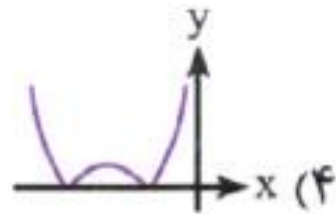


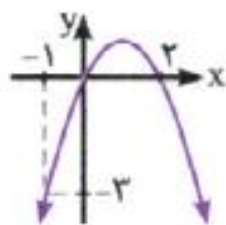
۸ (۲)

۶ (۱)



۶. هرگاه $f(x) = x^2 + x$ باشد، آن گاه نمودار تابع $y = |2f(1 - \frac{x}{3})|$ به کدام گزینه شبیه است؟





۷. نمودار مقابل مربوط به تابع $y = f(2x - 1)$ است. عرض رأس سهمی $y = 2f(1 - x) + 3$ کدام است؟

(۴) (۱, ۵)

(۳) (۰, ۹)

(۲) (۱, ۱)

(۱) (۰, ۵)



$$\text{در سهمی} \xrightarrow[\text{ریشه‌ها: } ۰, ۲]{\text{معادله}} y = a(x - ۰)(x - ۲)$$

$$\xrightarrow[\text{صدق بده}]{\text{از } (-۱, -۳) \text{ می‌گذرد}} -۳ = a(-۱)(-۱ - ۲) \Rightarrow a = -۱$$

$$\xrightarrow{\text{سهمی}} y = -x(x - ۲) = -x^2 + ۲x \xrightarrow{\text{رأس}} -\frac{b}{2a} = ۱$$

$$\xrightarrow[\text{سهمی}]{\text{عرض}} y = ۱ \Rightarrow S(۱, ۱) \xrightarrow[\text{xها ضربدر ۲ و بعد منهای ۱}]{f(2x-1) \Rightarrow f(x)}$$

$$(2(1) - 1, 1) = \underbrace{(1, 1)}_{f(x) \text{ در}} \xrightarrow[(\alpha, \beta) \Rightarrow (\frac{\alpha-1}{-1}, 2\beta+3)]{f(x) \Rightarrow 2f(1-x)+3} (0, 5)$$



۸. اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، دامنه‌ی تابع $y = \frac{f(3-x)}{f(2x)}$ کدام است؟

(۲) $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

(۱) $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

(۴) $[0, \frac{3}{2}]$

(۳) $[0, \frac{3}{2})$ ✓

$$D_f = [-3, 3] \Rightarrow \begin{cases} D_{f(3-x)} = [\frac{3-3}{-1}, \frac{-3-3}{-1}] = [0, 6] (*) \\ D_{f(2x)} = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \xrightarrow{\text{اشتراک با } (*)} \\ D_y = [0, \frac{3}{2}] \end{cases}$$

$$f(3) = 0, f(-3) = 0 \xrightarrow{x \div 2} f(\frac{3}{2}) = 0, f(-\frac{3}{2}) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ی مخرج}} D_y = [0, \frac{3}{2}] - \{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\} = [0, \frac{3}{2})$$



۹. نمودار تابع $y = -f(x)$ به صورت مقابل است. مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع

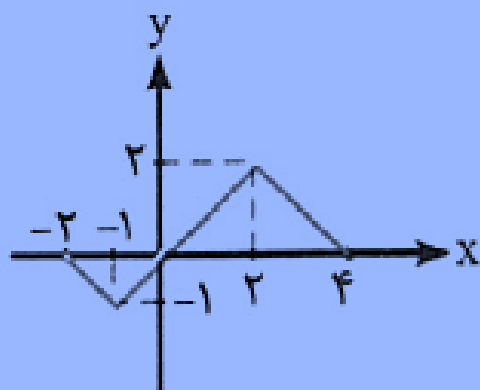
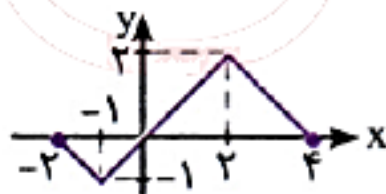
$y = |f(x+1)| + 1$ و محور x ها کدام است؟

۹ (۱)

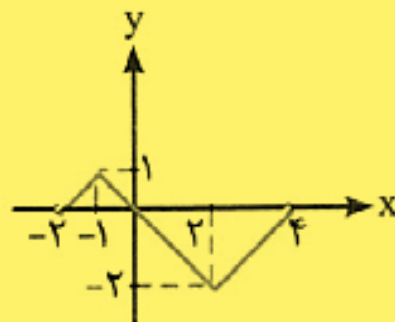
۱۰ (۲)

۱۱ (۳) ✓

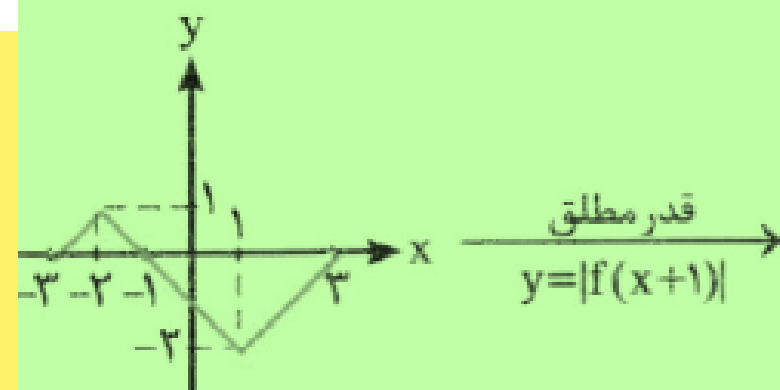
۱۲ (۴)



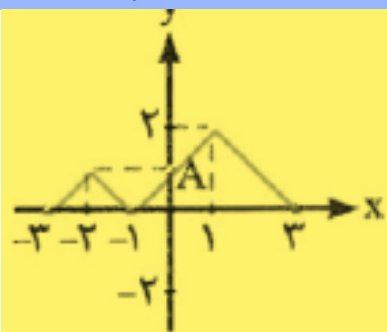
تقارن نسبت به x ها
 $y = f(x)$



یک واحد به چپ
 $y = f(x+1)$

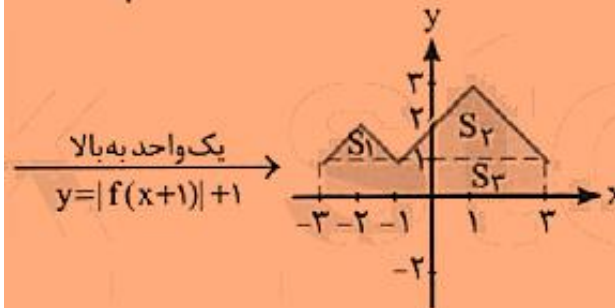


قدر مطلق
 $y = |f(x+1)|$



$$y = \frac{2 - 0}{1 - (-1)}(x + 1) = x + 1$$

تلاقی با محور y ها $\rightarrow A(0, 1)$



$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{4 \times 2}{2} + 1 \times 6 = 11$$

۱۰. شکل مقابل نمودار تابع $g(x) = f(3x - 2)$ است. اگر $y = f(x)$ را رسم کنیم، دو نمودار در

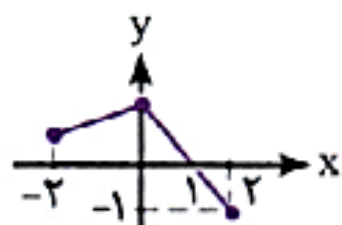
چند نقطه تلاقی دارند؟

(۱) هیچ

(۲) ۱

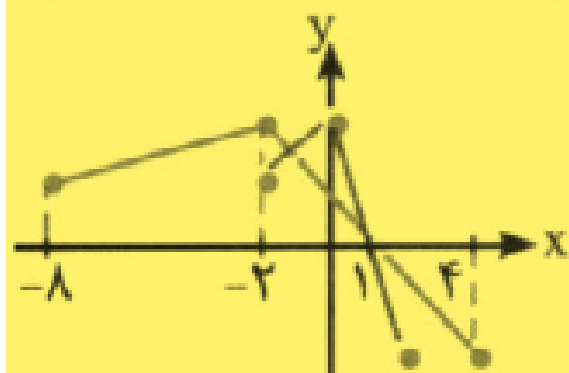
(۳) ۲ ✓

(۴) ۳



$$f(3x - 2) \Rightarrow f(x)$$

$$(\alpha, \beta) \Rightarrow (3\alpha - 2, \beta)$$



تلاقی تا ۲ →

توابع چند جمله‌ای، توابع صعودی و نزولی

۱. تابع $f = \{(5, 10), (-1, m^2), (3, m^2 - 3m), (0, 4)\}$ برای m های بازه‌ی (a, b) صعودی است. بیشترین مقدار $b - 2a$

کدام است؟

$$\sqrt{29} - 3(4)$$

$$4(3)$$

$$3(2)$$

$$\sqrt{29} - 4(1)$$

x را به ترتیب کم به زیاد مرتب می‌کنیم تا

همین ترتیب برای y ها برقرار شود! (صعودی)

$$f = \{(-1, m^2), (0, 4), (3, m^2 - 3m), (5, 10)\}$$

$$\xrightarrow{\text{صعودی}} m^2 \leq 4 \leq m^2 - 3m \leq 10$$

$$m^2 \leq 4 \Rightarrow |m| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq m \leq 2 \quad (1)$$

$$m^2 - 3m \geq 4 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 \geq 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{matrix} 4, -1 \end{matrix}$$

$$m \geq 4 \text{ یا } m \leq -1 \xrightarrow{\text{با (1)}} -2 \leq m < -1 \quad (2)$$

$$m^2 - 3m \leq 10 \Rightarrow m^2 - 3m - 10 \leq 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها:}} \begin{matrix} -2, 5 \end{matrix} -2 \leq m \leq 5 \xrightarrow{\text{اشتراک با (2)}} -2 \leq m \leq -1$$

$$\Rightarrow b - 2a = (-1) - 2(-2) = -1 + 4 = 3$$



۲. نمودار تابع $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ از کدام نواحی دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

(۴) دوم

(۳) چهارم

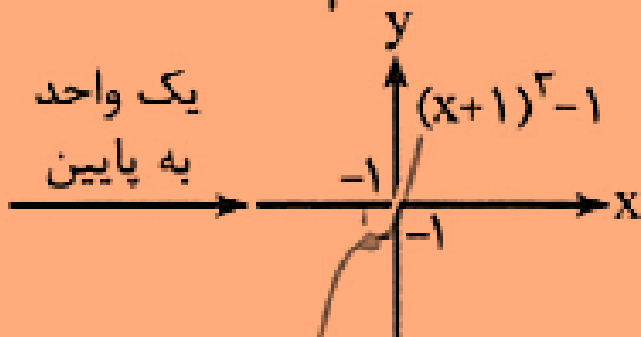
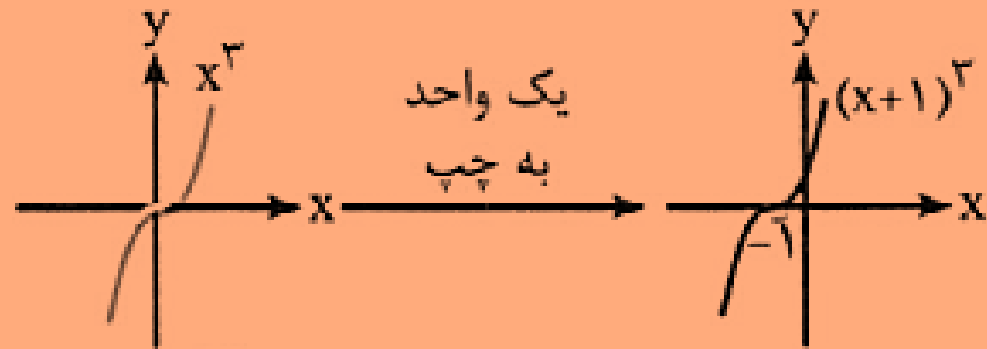
(۲) اول و سوم

(۱) دوم و چهارم

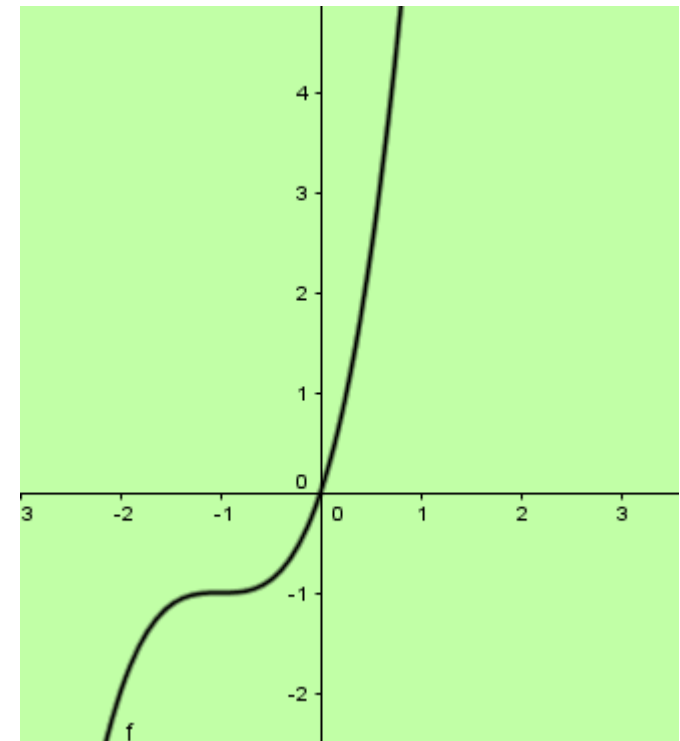


با توجه به اتحاد $(x+1)^3$ داریم:

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x = (x+1)^3 - 1 \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$$



پس نمودار تابع از نواحی دوم و چهارم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.



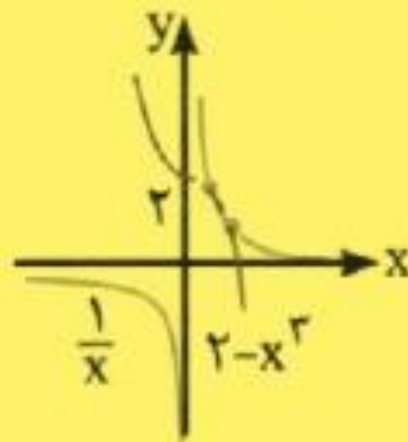
۳. کدام گزینه در مورد $\frac{1}{x} = 2 - x^3$ درست است؟

(۱) فقط یک ریشه‌ی مثبت دارد.

(۳) دو ریشه‌ی مثبت دارد.

(۲) فقط یک ریشه‌ی منفی دارد.

(۴) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.



کافی است نمودار دو تابع

$\frac{1}{x}$ و $2 - x^3$ را در یک دستگاه مختصات
رسم کنیم:

همان‌طور که از شکل پیداست، این دو تابع در دو نقطه در
سمت راست مبدأ یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی معادله‌ی

$\frac{1}{x} = 2 - x^3$ دو ریشه‌ی مثبت دارد.



۴. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} + m & ; x \geq 0 \\ (6-2m)x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$ اکیداً صعودی است. چند جواب صحیح برای m وجود دارد؟

۶ (۱) ۳ (۲) ✓ ۴ (۳) ۵ (۴)

۱ شاخه‌ی پایین: $y = (6-2m)x + 1$

اکیداً صعودی $\rightarrow 6-2m > 0 \Rightarrow 6 > 2m \xrightarrow{\text{از راست بخوان}} m < 3$
 > 0 شیب

۲ $x = 0$ $\begin{cases} \xrightarrow{\text{بالایی}} \sqrt{4} + m = 2 + m \\ \xrightarrow{\text{پایینی}} 1 \end{cases}$

f اکیداً صعودی $\rightarrow 1 \leq 2 + m \Rightarrow m \geq -1$

اشتراک این دو شرط هم می‌شود $-1 \leq m < 3$ و اعداد صحیح بازه $-1, 0, 1, 2$ هستند!

۵. اگر f تابعی نزولی و با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{f(x^2 - x) - f(3x + 5)}$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 5]$ (۲) $[0, 5]$ (۳) $[0, 1]$ (۴) $[-5, 1]$



$$f(x^2 - x) - f(3x + 5) \geq 0 \Rightarrow \underbrace{f(x^2 - x)}_{x_1} \geq \underbrace{f(3x + 5)}_{x_2}$$

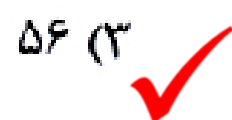
$$\xrightarrow{f \text{ نزولی است}} x^2 - x \leq 3x + 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 1) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 \leq x \leq 5$$

۶. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2(x^{n+1} - 3) + 4$ ، یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی ۶ است. اگر $f(-1) = 2$ باشد، حاصل $f(2)$ کدام است؟

۴) -۳۸

۳) ۵۶



۲) ۸۰

۱) -۴۸

$$f(x) = ax^2(x^{n+1} - 3) + 4 = ax^{n+3} - 3ax^2 + 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{درجه‌ی تابع } f = 6 \Rightarrow n + 3 = 6 \Rightarrow n = 3 \\ f(-1) = a(-1)^6 - 3a(-1)^2 + 4 = 2 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^6 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f(2) = 64 - 3 \times 4 + 4 = 56$$

۷. تابع $f(x) = |x + a| - 1$ در بازه‌ی $[-3, 2]$ یکنواست، حدود a کدام است؟

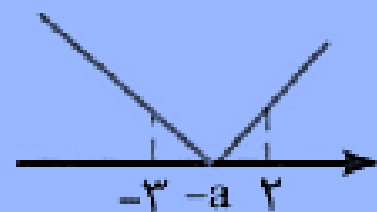
(۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$

(۳) $\mathbb{R} - (-2, 3)$ ✓

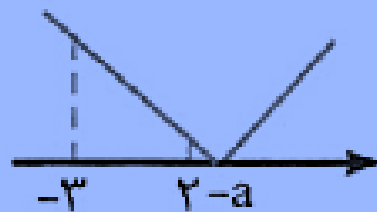
(۲) $[2, +\infty)$

(۱) $[-2, 3]$

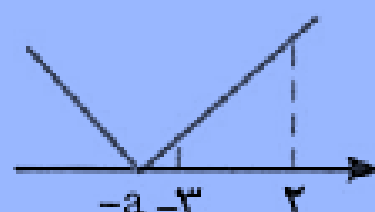
ریشه‌ی داخل قدرمطلق $x = -a$ است و عدد ثابت -1 که به تابع اضافه شده، تأثیری در یکنوا بودن تابع ندارد، بنابراین یکنوا بودن تابع $|x + a|$ را در بازه‌ی $[-3, 2]$ بررسی می‌کنیم. برای این کار سه شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



(۱) غیر یکنوا



(۲) نزولی



(۳) صعودی

با توجه به شکل‌های رسم‌شده، نتیجه می‌گیریم که $-a$ نباید بین -3 و 2 باشد، پس:

$$-3 < -a < 2 \Rightarrow -2 < a < 3 \Rightarrow \text{جواب} = \mathbb{R} - (-2, 3)$$



۸. f تابعی چند جمله‌ای با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} a & x = -1 \\ \frac{x^3 + bx + 2c}{x + c} & x \neq -1 \end{cases}$ بوده و g تابعی اکیداً نزولی است که $g(b) = 0$. دامنه‌ی

$y = \sqrt{g(x)(3c + \frac{a}{2}x - x^2)}$ شامل چند عدد طبیعی یک رقمی است؟

۹ (۴)

۸ (۳) ✓

۷ (۲)

۶ (۱)

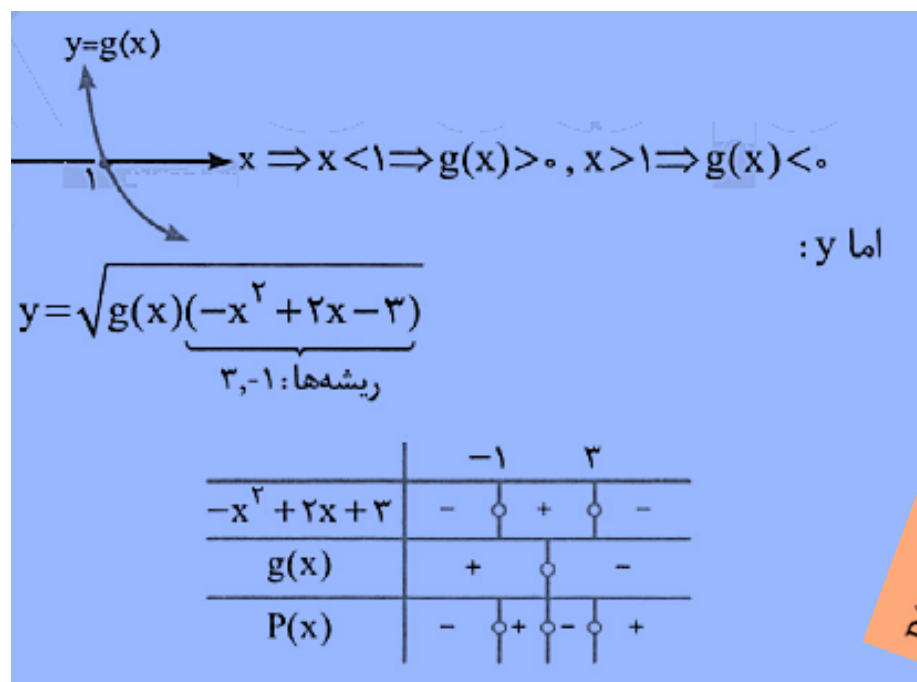
اول کاری می‌کنیم $x = -1$ حفره‌ی پایینی شود (ریشه‌ی مشترک صورت و مخرج) بعد $f(-1)$ را روی حفره می‌گذاریم و تابع می‌شود پیوسته و چند جمله‌ای:

$$x = -1 \begin{cases} \text{در مخرج} \rightarrow -1 + c = 0 \Rightarrow c = 1 \\ \text{در صورت} \rightarrow (-1)^3 + b(-1) + 2 = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

حالا

$$\frac{x^3 + x + 2}{x + 1} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{(x+1)(x^2 - x + 2)}{x + 1} = x^2 - x + 2$$

$$\xrightarrow{x = -1} f(-1) = \underbrace{(-1)^2 - (-1) + 2}_a = 4 \xrightarrow{g \text{ نزولی}} \frac{g(1) = 0}{g(1) = 0}$$



$P(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1] \cup [3, +\infty)$
اعداد طبیعی $\rightarrow \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$ تعداد تا ۸

۹. تابع $f(x) = (m^2 + m - 2)\sqrt{x+1}$ در دامنه‌ی خود نزولی و $g(x) = (\frac{m}{m+3})x^3 - 1$ صعودی است. حدود m کدام است؟

(۴) $[0, \frac{3}{2}]$

(۳) $[0, 1]$



(۲) $[-1, 2]$

(۱) $[0, 2]$

$y = \sqrt{x+1}$ اکیداً صعودی است، پس برای

نزولی شدن f ، باید ضریبش نامثبت باشد:

$$m^2 + m - 2 \leq 0 \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{-2, 1} -2 \leq m \leq 1 \quad (*)$$

اما $y = x^3$ اکیداً صعودی است و برای صعودی بودن g ، باید

ضریبش نامنفی باشد:

$$\frac{m}{m+3} \geq 0 \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{-3, 0} m \geq 0 \text{ یا } m < -3 \xrightarrow[\text{با } (*)]{\cap} 0 \leq m \leq 1$$

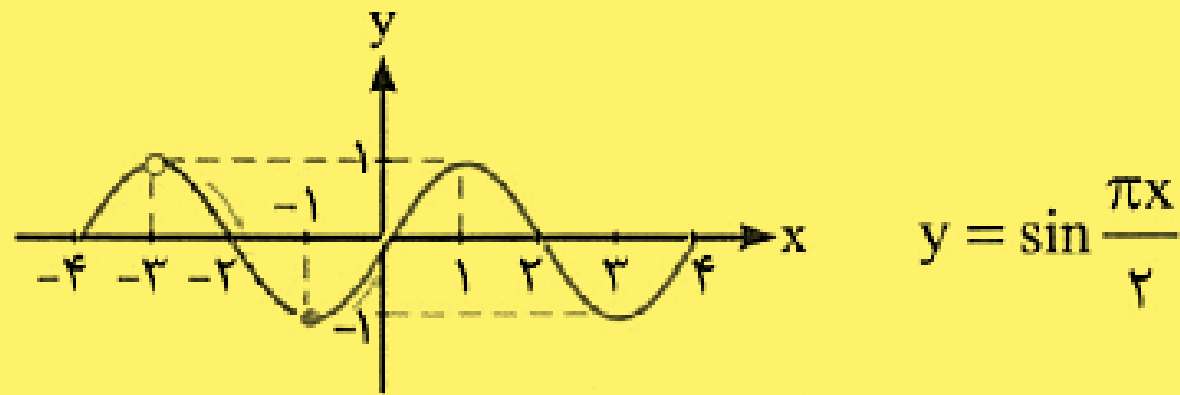
۱۰. تابع $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ در بازه‌ی $(-3, a]$ اکیداً نزولی و تابع $g(x) = \frac{1}{3-x}$ در بازه‌ی $(-\infty, b)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار $a + b$ کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۴ (۱)



طبق شکل، حداکثر مقدار a ، -1 است!

اما $g(x) = \frac{1}{3-x}$ قبل از ریشه‌ی مخرجش و بعد از ریشه‌ی

مخرجش اکیداً صعودی است! آخه $y = 3 - x$ نزولی است، پس

حداکثر مقدار b ، 3 است! $\max(a + b) = -1 + 3 = 2$



09166817602

مدرس ریاضیات الیاسی

