

۱. گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 5}{x - 3} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + 5) = 0$$

با توجه به پیوسته بودن تابع f در $x = 3$ نتیجه می‌شود $f(3) = -5$. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - f^2(3)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + f(3)}{x + 3} = f'(3) \times \frac{2f(3)}{6} = 4 \times \frac{-5}{3} = -\frac{20}{3}$$

۲. گزینه ۳

نکته: مشتق تابع $f(x) = g(x)h(x)$ در نقطه $x = a$ که در آن $g(x)$ در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر و $g(a) = 0$ باشد، به صورت $f'(a) = g'(a)h(a)$ است.

فقط از عامل صفرشونده یعنی $(x^3 - 27)$ مشتق می‌گیریم و سپس عددگذاری می‌کنیم.

$$y = (x^3 - 27)(x^3 - 1)(x^3 - 2)(x^3 - 26)(x^3 - 28)$$

$$y' = 3x^2(x^3 - 1)(x^3 - 2) \cdots (x^3 - 28) + \cdots$$

$$y'(3) = 3 \times 9 \times 26 \times 25 \times \cdots \times 1 \times (-1) = -27 \times 26! = -(27!)$$

۳. گزینه ۳

مماس بر منحنی موازی وتر AB است پس مقدار مشتق، مساوی شیب خط AB می‌باشد؛ شیب خط گذرا از AB برابر است با:

$$\frac{\text{اختلاف } y \text{ ها}}{\text{اختلاف } x \text{ ها}} = \frac{6 - 2}{4 - 1} = \frac{4}{3}$$

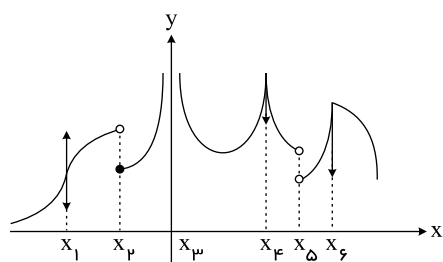
$$y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\sqrt{c} = 3 \Rightarrow c = \frac{9}{4}$$

۴. گزینه ۱ شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول ۵ برابر با شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(-2, 4)$ و $B(4, 22)$ است.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{22 - 4}{4 - (-2)} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow x = 5 \text{ شیب خط مماس در } x = 5$$

$$\Rightarrow f'(5) = 3 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 3$$

۵. گزینه ۳ $A - B$ نقاطی از دامنه است که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست. در نقاط x_1 و x_6 به خاطر وجود مماس قائم، در x_2 به خاطر عدم پیوستگی و در x_4 به خاطر گوشه بودن، مشتق وجود ندارد، یعنی $A - B$ ، ۴ عضوی است.





۶. گزینه ۱

در ابتدا باید بگوئیم، تابع g در $x = 0$ پیوسته است و مشتق چپ و راست دارد.

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(x) - 4[x]}^x}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 4[x]}$$

اکنون توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$ ، بنابراین:

$$g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x) - 4(0)} = \frac{1}{2}$$

$$g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x) - 4(-1)} = \frac{1}{-2 + 4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین } g'(0) = \frac{1}{2}$$

۷. گزینه ۴ $f(2) = g(2)$ ؛ پس می توان نوشت:

$$f(x) \text{ شیب خط تابع } = \frac{0 - 3}{4 - 2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = f'(2) - g'(2) = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3$$

دقت دارید که f' و g' برابر شیب خطوط $y = f(x)$ و $y = g(x)$ است.

۸. گزینه ۳

$$\text{می دانیم: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = f'_-(1)$$

با توجه به تعریف تابع $f(x)$ مشخص است که $f(1) = 1$ است، پس:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = f'_-(1)$$

از ضابطه پایینی

$$\longrightarrow x < 1 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow f'_-(1) = 4(1) = 4$$

استفاده می کنیم

۹. گزینه ۴ از تعریف مشتق استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - ax + a - 1)([x] + [-x]) - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - a + 1)([x] + [-x])}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - a + 1)([x] + [-x]) = (2 - a)(-1) = a - 2 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$f'(1) = a - 2 = 2a \Rightarrow a = -2$$

۱۰. گزینه ۱ در یک همسایگی نقطه $x = \frac{3}{4}$ داریم:

$$[-x] = \left[-\frac{3}{4}\right] = -1 \text{ و } [2x] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$

بنابراین خواهیم داشت:



$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(3x + 1) - 3(x^2 - 1)}{(3x + 1)^2} = \frac{3x^2 + 2x + 3}{(3x + 1)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\left(\frac{9}{16}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3}{\left(3\left(\frac{3}{4}\right) + 1\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{27}{16} + \frac{3}{2} + 3}{\left(\frac{13}{4}\right)^2} = \frac{\frac{99}{16}}{\frac{169}{16}} = \frac{99}{169}$$

۱۱. گزینه ۲

$$f(x) = (x - 4)\sqrt[3]{x + 3}$$

حد خواسته شده را به صورت تعریف مشتق می نویسیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(\delta - h) - 3f(\delta - h) + 2}{h(\delta - h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(\delta - h) - 1)(f(\delta - h) - 2)}{h(\delta - h)}$$

چون $f(\delta) = 1 \times \sqrt[3]{8} = 2$ داریم:

$$= \frac{f(\delta - h) - 2}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\delta - h) - 1}{h} = \frac{2 - 1}{\delta} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\delta + (-h)) - f(\delta)}{h} = -\frac{1}{\delta} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\delta + (-h)) - f(\delta)}{-h}$$

با فرض $-h = t$ داریم:

$$-\frac{1}{\delta} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\delta + t) - f(\delta)}{t} = -\frac{1}{\delta} f'(\delta)$$

$$f(x) = (x - 4)\sqrt[3]{x + 3} \Rightarrow f'(x) = 1 \times \sqrt[3]{x + 3} + \frac{x - 4}{3\sqrt[3]{(x + 3)^2}}$$

$$f'(\delta) = \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = 2 + \frac{1}{3 \times 4} = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$-\frac{1}{\delta} f'(\delta) = -\frac{1}{\delta} \times \frac{25}{12} = -\frac{5}{12}$$

۱۲. گزینه ۴

ابتدا قدرمطلق را در نقطه مورد نظر تعیین علامت می کنیم و سپس از قوانین مشتق استفاده می کنیم:

$$x = \frac{3}{2} \rightarrow y = (x^2 - 1) + (x^2 - 2) - (x^2 - 3) - \dots - (x^2 - 10)$$

$$\rightarrow y' = 2x + 2x - 2x \dots - 2x = 4x - 16x = -12x \rightarrow y'\left(\frac{3}{2}\right) = -12 \times \frac{3}{2} = -18$$

۱۳. گزینه ۳ چون $f'(0) = -\frac{2}{3}$ پس:

خط d_1 با شیب $-\frac{2}{3}$ از نقطه $(0, 0)$ عبور می کند. بنابراین معادله آن به صورت $y = -\frac{2}{3}x$ است. نقطه A با عرض -2 روی این خط است. پس:

$$-\frac{2}{3}x_A = -2 \Rightarrow x_A = 3 \Rightarrow A = (3, -2)$$

از طرف دیگر خط d_1 بر خط d_2 عمود است، پس این خط با شیب $\frac{3}{2}$ از نقطه $A(3, -2)$ می گذرد و معادله آن به صورت زیر است:



$$y - (-2) = \frac{3}{2}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

خط d_1 محور طول‌ها را در نقطه B قطع می‌کند، پس:

$$y_B = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x_B - \frac{13}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3k}{2} = \frac{13}{2} \Rightarrow k = \frac{13}{3}$$

۱۴. گزینه ۴ چون خط d در نقطه‌هایی به طول ۱ و ۲ بر نمودار تابع f مماس است، پس شیب این خط با $f'(1)$ و $f'(-2)$ برابر است. اگر این شیب m باشد، آن‌گاه:

$$m + m = 4 \Rightarrow m = 2$$

از طرف دیگر شیب خط d برابر است با $\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)}$ ، پس:

$$m = \frac{f(1) - 0}{3} \Rightarrow 2 = \frac{f(1)}{3} \Rightarrow f(1) = 6 = b$$

خط d از نقطه $(-2, 0)$ با شیب ۲ عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت زیر است:

$$y - 0 = 2(x + 2) \Rightarrow y = 2x + 4$$

$$\Rightarrow a = 2 \times 0 + 4 = 4$$

در نتیجه حاصل برابر است با:

$$a + b = 10$$

۱۵. گزینه ۴ از معادله مماس به صورت $x + 2y = 5$ متوجه می‌شویم که:

$$f(1) = y(1) = 2$$

$$f'(1) = m = -\frac{1}{2}$$

حال در تابع $g(x) = 2f(2x + 3) - 1$ به ازای $x = -1$ داریم:

$$g(-1) = 2f(1) - 1 = 2(2) - 1 = 3$$

$$g'(-1) = 4f'(2x + 3) \Big|_{x=-1} = 4f'(1) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

پس معادله مماس گذرا از نقطه $B \Big|_{\frac{-1}{3}}$ با شیب ۲-، به صورت $y + 2x = 1$ است.

۱۶. گزینه ۱ ابتدا تابع معکوس را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow y\sqrt{x} - y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow y\sqrt{x} - \sqrt{x} = y + 1 \Rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = y + 1 \Rightarrow x = \left(\frac{y + 1}{y - 1}\right)^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2$$

$$(f^{-1})'(x) = 2\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \times \left(\frac{-2}{(x - 1)^2}\right) \Rightarrow (f^{-1})'(2) = 2 \times 3 \times (-2) = -12$$

۱۷. گزینه ۲ طبق فرمول مشتق تابع مرکب داریم:



$$y' = f'(x)f'(f(x)) \xrightarrow{x=1} y'(1) = f'(1)f'(f(1))$$

مقدار $f(1)$ برابر است با $-6 - 2 = -4$ ، پس داریم:

$$y'(1) = f'(1)f'(-6)$$

ضابطه تابع مشتق f به صورت $f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt{(x+7)^2}}$ است و داریم:

$$f'(1) = \frac{-1}{3\sqrt{8^2}} = -\frac{1}{12}, f'(-6) = -\frac{1}{2}$$

پس مقدار مشتق مورد نظر برابر است با:

$$-\frac{1}{12} \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

۱۸. گزینه ۴ خط $y = -2x + 6$ بر نمودار تابع f در $x = 1$ مماس است، پس $\begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(1) = -2 \end{cases}$ حال داریم:

$$g(3x - 1) = f^2(\sqrt{x}) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow 3g'(3x - 1) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})\right)f(\sqrt{x}) + \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

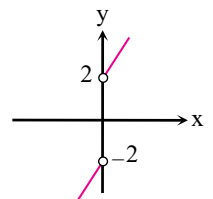
$$\xrightarrow{x=1} 3g'(2) = f'(1)f(1) + \frac{f'(1)}{2\sqrt{f(1)}} \Rightarrow 3g'(2) = -8 + \frac{-2}{4} \Rightarrow g'(2) = -\frac{17}{6}$$

۱۹. گزینه ۱ تابع در $x = 0$ پیوسته است و در یک همسایگی آن داریم:

$$y = \begin{cases} -x^2 + x^3 & x \leq 0 \\ x^2 + x^3 & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -2x + 3x^2 & x \leq 0 \\ 2x + 3x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

y' نیز در $x = 0$ پیوسته است و در یک همسایگی آن داریم:

$$y'' = \begin{cases} -2 + 6x & x < 0 \\ 2 + 6x & x > 0 \end{cases}$$



۲۰. گزینه ۲

می‌دانیم:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

$$g(2x) = f(x^2 - x) \xrightarrow{\text{از دو طرف تساوی مشتق می‌گیریم}} 2g'(2x) = (2x - 1) \cdot f'(x^2 - x)$$

برای رسیدن به g'' ، باید از تساوی اخیر یک بار دیگر مشتق بگیریم:

$$4g''(2x) = 2f'(x^2 - x) + (2x - 1)^2 \cdot f''(x^2 - x)$$



$$x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 4g''(1) = 2f'(-\frac{1}{4}) + 0 \xrightarrow{\text{طبق فرض}} g''(1) = -\frac{3}{2}$$

۲۱. گزینه ۱ ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه مرزی $x = 2$ بررسی می‌کنیم و نیز می‌دانیم به ازای $x < 2$ داریم:

$$|x^2 - 2x| = 2x - x^2 \text{ پس:}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \Rightarrow f(2^-) = 4 - 4 = 0 \\ x > 2 \Rightarrow f(2^+) = 2 + 2a + b \end{cases} \Rightarrow \boxed{2a + b = -2} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & x < 2 \\ x + a & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(2) = -2 \\ f'_+(2) = 2 + a \end{cases} \Rightarrow 2 + a = -2 \Rightarrow a = -4 \xrightarrow{(1)} \boxed{b = 6}$$

در نتیجه داریم:

$$a + b = 2$$

۲۲. گزینه ۱ تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس در $x = 1$ هم مشتق‌پذیر و در نتیجه پیوسته است. شرط پیوستگی به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a\sqrt{x} - b}{x} = a - b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx^2 + ax + 2) = b + a + 2$$

$$a - b = b + a + 2 \rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$$

شرط مشتق‌پذیری به صورت زیر است:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{ax}{2\sqrt{x}} - a\sqrt{x} + b}{x^2} & x > 1 \\ 3bx^2 + a & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = \frac{\frac{a}{2} - a + b}{1} = b - \frac{a}{2} \\ f'_-(1) = 3ab + a \end{cases} \Rightarrow b - \frac{a}{2} = 3b + a \Rightarrow a = -\frac{4b}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{در نتیجه: } a + b = \frac{1}{3}$$

۲۳. گزینه ۳ تابع $y = |2x - a|$ در $x = \frac{a}{2}$ و تابع $y = \sqrt[3]{x + a + 3}$ در $x = -a - 3$ مشتق‌پذیر نیست. پس تابع f در این دو نقطه می‌تواند مشتق‌پذیر نباشد. برای این که تابع f در تمام نقاط مشتق‌پذیر باشد، باید این دو نقطه در دامنه تابع f نباشند. دامنه تابع f بازه $(-2, 2)$ است، پس

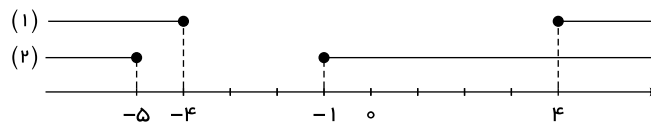


$$\begin{cases} \frac{a}{2} \geq 2 \\ \text{یا} \\ \frac{a}{2} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \quad (1)$$

و

$$\begin{cases} -a - 3 \geq 2 \\ \text{یا} \\ -a - 3 \leq -2 \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty) \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow a \in (-\infty, -5] \cup [4, +\infty)$$



بنابراین a مقادیر $-4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$ و 0 نمی‌تواند باشد.

۲۴. گزینه ۴

مشتق تابع f در $x = 1$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - 1| \sqrt[3]{x - 1} - 0}{x - 1} \\ &\Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^3 - 1) \sqrt[3]{x - 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) \sqrt[3]{x - 1} = 0 \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^3 - 1) \sqrt[3]{x - 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) \sqrt[3]{x - 1} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

در نتیجه $f'(1) = 0$ و در نقطه $(1, 0)$ مماس افقی بر نمودار تابع f رسم می‌شود.

۲۵. گزینه ۲

$$f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

ریشه‌های ساده قدرمطلق نقاط مشتق‌ناپذیر است، پس داریم:

$$x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین تابع در دو نقطه $x = \pm \sqrt{2}$ مشتق‌ناپذیر است.

۲۶. گزینه ۲

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{6 - \frac{-2a}{-3}}{6} = \frac{6 - \frac{2a}{3}}{6} = 1 - \frac{a}{9}$$

برای محاسبه آهنگ آنی (لحظه‌ای) باید از تابع در $x = 4$ مشتق بگیریم.



$$x = 4 \text{ در آهنگ آنی} = \frac{2 \times 2}{2\sqrt{1 + 2 \times 4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

طبق اطلاعات مسئله داریم:

$$1 - \frac{a}{9} + 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{a = 12}$$

۲۷. گزینه ۲ نقطه A را به صورت $(x, \sqrt{x})$ در نظر می‌گیریم. تابع موردنظر به صورت زیر است:

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع برابر مشتق آن است. پس:

$$d'(x) = \frac{-1}{4} \Rightarrow \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -4x + 14 = \sqrt{x^2 - 7x + 16} \Rightarrow 15(x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 3, x = 4$$

پس نقطه A به صورت $(3, \sqrt{3})$ است و فاصله آن تا B برابر است با:

$$d(3) = \sqrt{9 - 21 + 16} = 2$$

۲۸. گزینه ۲ راه حل اول: سرعت متوسط در بازه زمانی $[3, 9]$ برابر است با:

$$\frac{f(9) - f(3)}{9 - 3} = \frac{(3 \times 81 + 4 \times 9 - 2) - (3 \times 9 + 12 - 2)}{6} = \frac{277 - 37}{6} = 40$$

سرعت لحظه‌ای موشک در لحظه $t = a$ برابر $f'(a)$ است. داریم:

$$f'(t) = 6t + 4 \Rightarrow f'(a) = 6a + 4$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$6a + 4 = 40 \Rightarrow a = \frac{36}{6} = 6$$

راه حل دوم: در توابع درجه دوم، آهنگ متوسط تغییر تابع در یک بازه با آهنگ آنی تغییر در وسط آن بازه برابر است. نقطه وسط بازه $[3, 9]$ ، $a = 6$ می‌باشد.

$$29. \text{ گزینه ۱ می‌دانیم: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + k \cdot h) - f(a)}{h} = k \cdot f'(a)$$

در توابع متناوب فاصله بین دو ماکزیمم متوالی یک دوره تناوب است، بنابراین:

$$T = -1 - (-3) = 2 \Rightarrow f(x+2) = f(x) \Rightarrow f(x+2n) = f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x+2n) = f'(x) \quad \text{و} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (I)$$

دوره تناوب f برابر ۲ است، پس $f(6) = f(-6)$. بنابراین:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6 + 5h) - f(-6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6 + 5h) - f(6)}{h} = 5f'(6)$$

بنابراین رابطه (I) داریم:



$$f'(6) = f'(8) = m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 5f'(6) = 5\left(\frac{1}{2}\right) = 2.5$$

۳. گزینه ۳ راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x^2 + 4x - 32} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{(x - 4)(x + 8)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \times \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x + 8} = f'(4) \times \frac{1}{12} = 2$$

$$\Rightarrow f'(4) = 24$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + h}{f(4 + h) - f(4)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + 1)}{f(4 + h) - f(4)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(4 + h) - f(4)} \times \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 1) = \frac{1}{f'(4)} \times 1 = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{24}$$

توجه شود که هر دو عبارت $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h}$ برابر $f'(4)$ هستند.

راه حل دوم: از قضیه هوییتال استفاده می‌کنیم، چرا که حد $\frac{0}{0}$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x^2 + 4x - 32} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'(x)}{2x + 4} = \frac{f'(4)}{12} = 2 \Rightarrow f'(4) = 24$$

$$\xrightarrow{\text{محاسبه حد دوم}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + h}{f(4 + h) - f(4)} \stackrel{HOP}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 1}{f'(4 + h)} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{24}$$

۳۱. گزینه ۴ روش اول: بنابر تعریف مشتق تابع f در نقطه $x = 3$ داریم:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x - \sqrt{x + 1}} - 1}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{x + 1} - 1}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{x + 1}} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)^2 - (x + 1)}{x - 3} \times \frac{1}{(x - 1) + \sqrt{x + 1}} \times \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 3)}{x - 3}$$

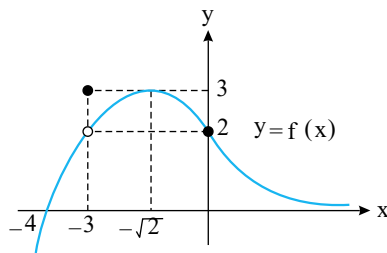
$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{8} = \frac{3}{8}$$

روش دوم: در یک همسایگی $x = 3$ ، تابع f پیوسته و مشتق‌پذیر است و می‌توان ضابطه آن را $y = \sqrt{x - \sqrt{x + 1}}$ در نظر گرفت.



$$y' = \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} \xrightarrow{x=3} y' = \frac{1 - \frac{1}{4}}{2(1)} = \frac{3}{8} \Rightarrow f'(3) = \frac{3}{8}$$

۳۲. گزینه ۱

برای محاسبه $g'(-3)$ باید از تعریف مشتق استفاده کنیم؛ یعنی داریم:

$$\begin{aligned} g'(-3) &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{g(x) - g(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 9)f(x) - 0}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)f(x)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3)f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) \times \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -6 \times 2 = -12 \end{aligned}$$

توجه شود که به دلیل ناپیوستگی تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = -3$ ، باید برای محاسبه $g'(-3)$ حتماً از تعریف ریاضی مشتق استفادهکنیم و همچنین توجه شود که $f(-3) = 3$ ولی $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 2$.۳۳. گزینه ۲ $f(1)$ را در صورت اضافه و کم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \\ 2h = t \rightarrow h = \frac{t}{2} \quad -h = t \rightarrow h = -t & \\ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1+t) - f(1)}{\frac{t}{2}} - \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(1+t) - f(1)}{-t} &= 2f'_+(1) + f'_-(1) = 2(3) + 1 = 7 \end{aligned}$$

۳۴. گزینه ۲ در حد داده شده، حد مخرج صفر و حاصل آن متناهی است؛ پس حد صورت صفر است:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 4 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \xrightarrow{f \text{ پیوسته و مشتق پذیر است}} f(2) = 4$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} = f'(2) \times \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow f'(2) = 4$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{f(2+h)}}{h} \times \frac{2 + \sqrt{f(2+h)}}{2 + \sqrt{f(2+h)}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - f(2+h)}{h \times 4} = -\frac{1}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= -\frac{1}{4} f'(2) = -\frac{1}{4} (4) = -1 \end{aligned}$$



۳۵. گزینه ۲ حد داده شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \frac{f(x) - a}{x - 1} = f(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{a}{2} \times 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = af'(1) = a^2$$

$$\Rightarrow a = \pm 2$$

۳۶. گزینه ۲ با توجه به این که $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$ ، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \times g^2(x)$$

حال داریم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$= \frac{1}{x^2 - (x^2 + 1)} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0$$

$$f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \cdot g^2(x) = 0 \times g^2(x) = 0$$

۳۷. گزینه ۳ ضابطه تابع‌ها را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{(x - 4) + 4\sqrt{x - 4} + 4} = \sqrt{(\sqrt{x - 4} + 2)^2} = |\sqrt{x - 4} + 2| = \sqrt{x - 4} + 2$$

به همین ترتیب در همسایگی $x = 1$ داریم:

$$g(x) = |\sqrt{x - 4} - 2| = \sqrt{x - 4} - 2$$

پس:

$$f(x) + g(x) = 2\sqrt{x - 4} \Rightarrow f'(x) + g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 4}}$$

$$\Rightarrow (f' + g')(1) = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

۳۸. گزینه ۴ ابتدا توجه شود که حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)g(2+h) - f(2)g(2)}{h}$ همان مشتق تابع $(f \cdot g)(x)$ در نقطه $x = 2$

است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)g(2+h) - f(2)g(2)}{h} = (f \cdot g)'(2)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \Rightarrow (f \cdot g)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2)$$



$$f'(x) = 3x^2 - \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x)^2}}, \quad g'(x) = \frac{8}{2\sqrt{8x}} = \frac{4}{\sqrt{8x}}$$

$$f'(2) = 3(2)^2 - \frac{4}{3\sqrt[3]{64}} = 12 - \frac{1}{3} = \frac{35}{3}, \quad g'(2) = \frac{4}{\sqrt{16}} = 1, \quad f(2) = 6, \quad g(2) = 4$$

$$(f \cdot g)'(2) = \frac{35}{3} \times 4 + 1 \times 6 = \frac{140}{3} + 6 = \frac{158}{3}$$

۳۹. گزینه ۳ ابتدا ضابطه تابع f را تا حد امکان ساده می‌کنیم، سپس از ساده شده آن مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{(\sqrt[3]{2x+1})(\sqrt[3]{4x^2} - \sqrt[3]{2x+1} + \frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 2})}{2x^2 - 3x - 2} + \frac{x^2 + 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)(2x+1)} + \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}+2)}{x\sqrt{x}+2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۴۰. گزینه ۱ می‌دانیم که $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ است.

$$f'(a)g(a) = f(a)g'(a) \rightarrow f'(a)g(a) - f(a)g'(a) = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(a) \times g^2(a) = 0$$

حاصل ضرب دو عبارت زمانی صفر است که حداقل یکی از آن‌ها صفر شوند. توجه کنید که به ازای $g(a) = 0$ تساوی صورت سؤال

برقرار نمی‌شود. زیرا $f'(2)g(2) = 0$ است ولی $f(2)g'(2) \neq 0$ است پس حتماً $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = 0$ است.

$$\left(\frac{(x^2-1)(x+1)}{x-2}\right)' = \left(\frac{(x+1)(x-1)(x+1)}{x-2}\right)' = \left(\frac{(x+1)^2(x-1)}{x-2}\right)' = 0$$

$$\rightarrow \frac{[2(x+1)(x-1) + (x+1)^2](x-2) - 1(x+1)^2(x-1)}{(x-2)^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{2(x+1)(x-1)(x-2) + (x+1)^2(x-2) - (x+1)^2(x-1)}{(x-2)^2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} \frac{(x+1)[2(x^2-3x+2) + (x^2-x-2) - (x^2-1)]}{(x-2)^2} = 0$$



$$\rightarrow \frac{(x+1)(2x^2-7x+3)}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

در گزینه‌ها فقط $x = -1$ موجود است.

۴۱. گزینه ۲ توجه کنید که $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$ و در نتیجه:

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$$

بنابراین:

$$k(2x^{\frac{1}{2}})^{2n} - (2x^{\frac{1}{2}})(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}) = 17(x^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$4^n k x^n + x^{-1} = 17x^{-1} \Rightarrow 4^n k x^n = 16x^{-1}$$

پس $n = -1$ و $4^n k = 16$ پس:

$$4^{-1} k = 16 \Rightarrow k = 64 \Rightarrow k - n = 65$$

۴۲. گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x & x \geq 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 5x & x \geq 0 \\ 3x & x \leq 0 \end{cases}$$

پس اگر $x \geq 0$ ، آنگاه:

$$g(x) = 5x \geq 0 \Rightarrow fog(x) = f(5x) = \frac{3}{5} \times 5x = 3x$$

و اگر $x \leq 0$ ، آنگاه:

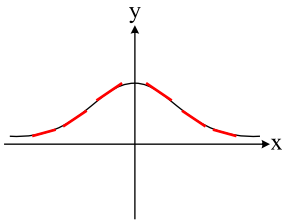
$$g(x) = 3x \leq 0 \Rightarrow fog(x) = f(3x) = 3x$$

پس همواره $y = fog(x) = 3x$ و در نتیجه $y' = 3$.

۴۳. گزینه ۱

$$g'(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{f^2(x)} > 0 \xrightarrow{g'(x) > 0} f(x) - xf'(x) > 0$$

حال با توجه به نمودار تابع f ، معلوم است که $f(x) > 0$. همچنین اگر $x < 0$ ، آن‌گاه $f'(x) > 0$ و اگر $x > 0$ ، آن‌گاه $f'(x) < 0$. زیرا شیب خط مماس‌های رسم شده بر نمودار تابع f در ناحیه دوم مثبت هستند و شیب مماس‌های رسم شده بر نمودار تابع f در ناحیه اول منفی هستند. در ضمن $f'(0) = 0$.



پس داریم:

$$x \geq 0 : xf'(x) \leq 0 \Rightarrow -xf'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) - xf'(x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$$

$$x \leq 0 : xf'(x) \leq 0 \Rightarrow -xf'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) - xf'(x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$$

پس تمام اعداد حقیقی جواب نامعادله $g'(x) > 0$ هستند.

۴۴. گزینه ۱ توجه کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = f'(2) \times \frac{1}{2-1} = f'(2) = -\frac{4}{3}$$

از طرف دیگر مشتق تابع f را در $x = 2$ محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx} (2x+k) - 2\sqrt{x^2+5}}{\frac{d}{dx} \sqrt{x^2+5}}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{\frac{2}{3}(2+k) - 6}{(2+k)^2} = \frac{-\frac{10}{3} + \frac{2}{3}k}{(2+k)^2} = \frac{-4}{3}$$

$$4(k+2)^2 = 10 - 2k \Rightarrow 4k^2 + 34k + 54 = 0 \rightarrow k \text{ مجموع مقادیر } = \frac{-34}{4} = \frac{-17}{2}$$

۴۵. گزینه ۳ توجه کنید که $f(2) = 3$. حال طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(2)}{h-2} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 2} \frac{f(h) - 3}{h-2} = 6 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - 3}{-h} = 6 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - 3}{h} = -6$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 6 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 3}{h} = 6$$

طرفین تساوی‌های بالا را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(2-h) - 3}{h} \times \frac{f(2+h) - 3}{h} \right) = -6 \times 6$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)f(2+h) - 3(f(2-h) + f(2+h)) + 9}{h^2} = -36$$

۴۶. گزینه ۱ صد قدر مطلق وجود دارد که به ازای $x = -\frac{9}{2} = -4.5$ داخل ۵ قدر مطلق اول، منفی و داخل ۹۵ قدر مطلق بعدی

مثبت است.

$$y = \underbrace{|x|}_{-} + \underbrace{|x+1|}_{-} + \underbrace{|x+2|}_{-} + \underbrace{|x+3|}_{-} + \underbrace{|x+4|}_{-} + \underbrace{|x+5|}_{+} + \dots + \underbrace{|x+99|}_{+}$$

$$\rightarrow y = -5x + 95x + \text{یک سری عدد} \rightarrow y' = -5 + 95 + 0 = 90$$



۴۷. گزینه ۱ اگر دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ برهم مماس باشند معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - 3 \\ g(x) = 2x^2 + x + a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی}} \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - 3 = 2x^2 + x + a \rightarrow x^3 + 3x^2 + 6x - 9 = 6x^2 + 3x + 3a$$

$$\rightarrow \boxed{x^3 - 3x^2 + 3x - 9 - 3a = 0} : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

دقت کنید که ریشه‌ی مضاعف در مشتق معادله هم صدق می‌کند.

$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x=1 \rightarrow f(1) = \frac{1}{3} + 1 + 2 - 3 = \frac{1}{3}$$

طول نقطه‌ی تماس عرض نقطه‌ی تماس

۴۸. گزینه ۴

منحنی داده شده و خط $y = x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) را تلاقی می‌دهیم.

$$\begin{cases} ay = x^2 + 5x + 4 \\ y = x \end{cases} \rightarrow ax = x^2 + 5x + 4 \rightarrow \boxed{x^2 + (5-a)x + 4 = 0} : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\Delta = 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac = 0} (5-a)^2 - 16 = 0 \Rightarrow a - 5 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$a = 9 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad \checkmark$$

$$a = 1 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2 \quad \times$$

دقت کنید در ناحیه‌ی اول، x مثبت است.

۴۹. گزینه ۴

$$4y + x = 7 \Rightarrow 4y = -x + 7 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{1}{4}$$

چون خط مماس بر این خط عمود است، پس شیب خط مماس برابر ۴ است، یعنی مشتق برابر ۴ است. بنابراین داریم:

$$\text{شیب خط مماس} = 4 \Rightarrow f'(x) = 4$$

$$f(x) = \frac{5x-2}{3x+6} \Rightarrow f'(x) = \frac{5(3x+6) - 3(5x-2)}{(3x+6)^2} = \frac{36}{(3x+6)^2}$$

$$f'(x) = 4 \Rightarrow \frac{36}{(3x+6)^2} = 4 \Rightarrow (3x+6)^2 = 9 \Rightarrow 3x+6 = \pm 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 : y = \frac{-5-2}{-3+6} = -\frac{7}{3} \Rightarrow A(-1, -\frac{7}{3}) \\ x = -3 : y = \frac{-17}{-3} = \frac{17}{3} \Rightarrow B(-3, \frac{17}{3}) \end{cases}$$

و فاصله این دو نقطه برابر است با:



$$AB = \sqrt{(-3 + 1)^2 + \left(\frac{17}{3} + \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

۵۰. گزینه ۱ هر دو معادله $f(x) = ax + b$ و $g(x) = ax + b$ باید ریشه مضاعف داشته باشند، پس:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow x^2 - 4x = ax + b \Rightarrow x^2 - (a + 4)x - b = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (a + 4)^2 + 4b = 0 \quad (1)$$

$$g(x) = ax + b \Rightarrow x^2 + 2x = ax + b \Rightarrow x^2 - (a - 2)x - b = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (a - 2)^2 + 4b = 0 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $(a - 2)^2 = (a + 4)^2$ و در نتیجه:

$$\begin{cases} a - 2 = a + 4 \\ a - 2 = -a - 4 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow (-1 - 2)^2 + 4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{9}{4}$$

در نتیجه $ab = \frac{9}{4}$

۵۱. گزینه ۱ مشتق تابع در $x = 1$ همان شیب خط مماس است که برابر خواهد بود با:

پس معادله خط مماس و مقدار تابع در $x = 1$ برابر است با:

$$f'(1) = \frac{0 - 1}{a - 0} = -\frac{1}{a}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{a}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{a}x + 1 \Rightarrow f(1) = 1 - \frac{1}{a}$$

حال براساس حد داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{(x - 1)} \times \frac{f(x) + f(1)}{x^2 + x + 1} \right) &= f'(1) \times \frac{2f(1)}{3} \\ &= \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a} \Rightarrow 3a^2 - 16a + 16 = 0 \Rightarrow (3a - 4)(a - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ a = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

۵۲. گزینه ۴ می‌دانیم: $y = f(u) \rightarrow y' = u' \cdot f'(u)$

با مشتق گیری از تساوی داده شده خواهیم داشت:

$$f(x - 1) + 2f(1 - x) = x^2 \Rightarrow f'(x - 1) - 2f'(1 - x) = 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 : f'(-1) - 2f'(1) = 0 \Rightarrow f'(-1) = 2f'(1) \\ x = 2 : f'(1) - 2f'(-1) = 4 \end{cases}$$

$$f'(1) - 2f'(-1) = 4 \rightarrow f'(1) - 2(2f'(1)) = 4 \rightarrow f'(1) - 4f'(1) = 4$$

$$\rightarrow -3f'(1) = 4 \rightarrow f'(1) = \frac{-4}{3}$$

۵۳. گزینه ۳ می‌دانیم $y = (g \circ f)(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g'(f(x))$ است.



$$y = (g \circ f)(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g'(f(x)) \rightarrow y' = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \left(\frac{1(x+1) - 1(x)}{(x+1)^2}\right) g'\left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^3\right)$$

$$\xrightarrow{x=1} y'(1) = 3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)g'\left(\frac{1}{8}\right) \rightarrow y'(1) = \frac{3}{16}g'\left(\frac{1}{8}\right)$$

چون شاخه سمت چپ تابع g حالت خطی داشته و مشتق آن برابر شیب خط است پس $4 = \frac{16}{4} = g'\left(\frac{1}{8}\right)$ است.

$$\text{پس: } y'(1) = \frac{3}{16}(4) = \frac{3}{4}$$

۵۴. گزینه ۱

ابتدا تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم و می‌دانیم:

$$f(x) = 3x + |x| = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{3}{4}x + a|x| = \begin{cases} \left(\frac{3}{4} + a\right)x & x \geq 0 \\ \left(\frac{3}{4} - a\right)x & x < 0 \end{cases}$$

از آنجا که ضابطه‌های توابع f و g در $x = 0$ عوض می‌شود و مشتق‌پذیری تابع $g \circ f$ را در مبدأ مختصات خواسته است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(g \circ f)'(0) \Rightarrow \begin{cases} (g \circ f)'_+(0) = f'_+(0) \times g'(f(0^+)) = (4) \times \left(\frac{3}{4} + a\right) \\ (g \circ f)'_-(0) = f'_-(0) \times g'(f(0^-)) = (2) \times \left(\frac{3}{4} - a\right) \end{cases}$$

باید مشتق چپ و راست در $x = 0$ برابر باشند.

$$(g \circ f)'_-(0) = (g \circ f)'_+(0) \Rightarrow 3 + 4a = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۵۵. گزینه ۲

$$f(x) = \frac{x^2}{16} - 1 \Rightarrow \begin{cases} f(16) = \frac{16^2}{16} - 1 = 15 \\ f'(x) = \frac{2x}{16} = \frac{x}{8} \Rightarrow f'(16) = \frac{16}{8} = 2 \end{cases}$$

حال $g(16)$ و $g'(16)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(2x\sqrt{x}) = \frac{x^2}{16} - 1 \xrightarrow{x=4} g(16) = \frac{4^2}{16} - 1 = 0$$

$$f(x) = g(2x\sqrt{x}) \Rightarrow f'(x) = 2\sqrt{x} \times g'(2x\sqrt{x}) \xrightarrow{f'(x)=\frac{x}{8}} 2\sqrt{x}g'(2x\sqrt{x}) = \frac{x}{8} \xrightarrow{x=4} 2g'(16) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g'(16) = \frac{1}{12}$$

پس داریم:



$$y(x) = (f \cdot g)(x) \Rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$y'(16) = f'(16)g(16) + g'(16)f(16) = 2 \times 0 + \frac{1}{12} \times 15 = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

۵۶. گزینه ۲

می‌دانیم که عبارت $f'(x) \cdot g'(f(x))$ همان مشتق عبارت $g \circ f(x)$ است، پس:

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}} = x \Rightarrow (g(f(x)))' = 1$$

۵۷. گزینه ۲

روش هوییتال: اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ و f' و g' در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

از طرفی می‌دانیم: $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$

$$f(x) = (x+3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{4}(x+3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f'(1-h) - f'(1+h)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-f''(1-h) - f''(1+h)} = \frac{1}{-2f''(1)} = \frac{1}{-2(-\frac{1}{32})} = 16$$

مقدار $f''(1)$ را به صورت زیر حساب کرده‌ایم:

$$f''(1) = -\frac{1}{4}(1+3)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{32}$$

۵۸. گزینه ۲

با توجه به فرض داریم:

$$f(x) = x + 1 + (g(x))^5 \Rightarrow f'(x) = 1 + 5g'(x) \cdot (g(x))^4 (*)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0) = 1 + 5g'(0)(g(0))^4 \xrightarrow{f'(0)=g(0)=1} 1 = 1 + 5g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$$

حال از عبارت $(*)$ مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow f''(x) = 5g''(x)(g(x))^4 + 5g'(x)(4g'(x)(g(x))^3)$$

$$\xrightarrow{x=0} f''(0) = 5g''(0)(g(0))^4 + 20(g'(0))^2(g(0))^3 \xrightarrow{g'(0)=0} f''(0) = 5g''(0)(1)^4 + 20(0)^2(1)^3 = 5g''(0)$$

۵۹. گزینه ۳ می‌دانیم که $y = f(u) \rightarrow y' = u'f'(u)$ است.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h+4) - 2}{h} = \frac{f'(4) - 2}{0} \xrightarrow[\text{این کسر حتماً ۰ بوده که پس از رفع ابهام جانش ۴ شده است}]{\text{این کسر حتماً ۰ بوده که پس از رفع}} f'(4) = 2$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h+4) - 2}{h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(h+4)}{1} = f''(4) \rightarrow f''(4) = 4$$

$$\text{پس: } y = f(x^2) \rightarrow y' = 2x \cdot f'(x^2) \rightarrow y'' = 2f'(x^2) + 2x \cdot f''(x^2) \cdot 2x$$

$$\rightarrow y''(2) = 2f'(4) + 16f''(4) = 4 + 64 = 68$$

۶۰. گزینه ۴

$$g(x) = f(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow g''(8) = -\frac{1}{4(27)} = -\frac{1}{108}$$

۶۱. گزینه ۲ ابتدا $f(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم تا مشتق‌گیری آسان‌تر شود:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 2x^2 + x^2 + 2 - 12}{x^2 + 2} = \frac{x^2(x^2 + 2) + (x^2 + 2) - 12}{x^2 + 2} \\ &= \frac{x^2(x^2 + 2)}{x^2 + 2} + \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} - \frac{12}{x^2 + 2} = x^2 + 1 - \frac{12}{x^2 + 2} = x^2 + 1 - 12(x^2 + 2)^{-1} \end{aligned}$$

حال از تابع دو بار مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = 2x + 12(2x)(x^2 + 2)^{-2} = 2x + 24x(x^2 + 2)^{-2}$$

$$f''(x) = 2 + 24((x^2 + 2)^{-2} - 2(2x)(x^2 + 2)^{-3}x) = 2 + 24((x^2 + 2)^{-2} - 4x^2(x^2 + 2)^{-3})$$

$$\Rightarrow f''(1) = 2 + 24\left(\frac{1}{9} - \frac{4}{27}\right) = \frac{10}{9}$$

۶۲. گزینه ۲

به کمک تعریف مشتق چپ و مشتق راست، داریم:

$$f'_+(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - |x|}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - x}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sqrt{4 - (4 - x)}}{x\sqrt{2 + \sqrt{4 - x}}} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2 + \sqrt{4 - x}}} = +\infty$$

$$f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 + x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{\sqrt{4 - (4 + x)}}{x\sqrt{2 + \sqrt{4 + x}}} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{\sqrt{-x}}{x\sqrt{2 + \sqrt{4 + x}}}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-\sqrt{-x} \sqrt{2} + \sqrt{4+x}} = -\infty$$

۶۳. گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq k \\ 2a & x < k \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \text{ شرط پیوستگی: } ak^2 + bk + c &= 2ak + b \\ (2) \text{ شرط مشتق پذیری: } 2ak + b &= 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow ak^2 + bk + c = 2a$$

$$\xrightarrow{b=2a-2ak} ak^2 + (2a-2ak)k + a - (2a-2ak) = 2a$$

$$\xrightarrow{c=a-b} ak^2 + 2ak - 2ak^2 + a - 2a + 2ak = 2a \Rightarrow -ak^2 + 4ak - 3a = 0 \xrightarrow{\div(-a)} k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} k = 1 \\ k = 3(\max) \end{cases}$$

۶۴. گزینه ۲ تابع در $x = 0$ پیوسته است و در یک همسایگی $x = 0$ داریم:

$$f(x) = |x^2 - x| [0^-] = -|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & ; x \geq 0 \\ -x^2 + x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

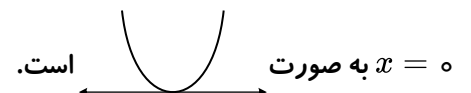
$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ; x > 0 \\ -2x + 1 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(\circ) = -1 \\ f'_-(\circ) = 1 \end{cases} \Rightarrow f'_-(\circ) - f'_+(\circ) = 2$$

۶۵. گزینه ۲ مشتق تابع را در $x = 0$ به دست می آوریم:

$$f'(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{f(x) - f(\circ)}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt{|x|} \sqrt[3]{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$f'_+(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \sqrt[6]{x} = 0$$

$$f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{\sqrt[6]{(-x)^3}}{-\sqrt[6]{(-x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} -\sqrt[6]{-x} = 0$$

بنابراین $f'(\circ) = 0$ و شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = 0$ برابر صفر است در نتیجه نمودار تابع f در همسایگی

۶۶. گزینه ۳ ضابطه $y = |x^2 - 9|$ در ریشه های ساده داخل قدرمطلق یعنی $x = 3$ و $x = -3$ مشتق پذیر نیست. البته $x = 3$ چون نقطه مرزی است، نیاز به بررسی دارد. تابع در $x = 3$ پیوسته است، چون حد چپ و راست آن هر دو برابر صفر هستند، ولی مشتق های چپ و راست برابر نیستند. بنابراین تابع در $x = 3$ هم مشتق ناپذیر است.

دقت کنید که $1 < \frac{1}{x^2 + 1} < 0$ ، چون همواره مخرج از صورت بزرگتر است، پس $[\frac{1}{x^2 + 1}] = 0$ است. بنابراین تابع $[\frac{1}{x^2 + 1}]$



تابعی ثابت و همواره مشتق پذیر است.

۶۷. گزینه ۳ واضح است که تابع f در $x = ۲$ ناپیوسته است و در نتیجه مشتق پذیر نیست.

$$f(۲) = \lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^+} |x - ۳| = ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} |x^۲ - ۱| = ۳$$

از طرف دیگر اگر $x = \alpha$ ریشه ساده چند جمله ای g باشد، تابع $y = |g(x)|$ در $x = \alpha$ مشتق پذیر نیست. پس تابع $y = |x - ۳|$ در $x = ۳$ و تابع $y = |x^۲ - ۱|$ در $x = \pm ۱$ مشتق پذیر نیستند. بنابراین تابع f در چهار نقطه مشتق پذیر نیست.

۶۸. گزینه ۳ در گزینه ۱، تابع f در نقطه $x = -۱$ مشتق پذیر است زیرا عامل ضرب $(x + ۱)$ پشت قدرمطلق وجود دارد. یعنی ضابطه تابع f به صورت $f(x) = (x + ۱)(x + ۲)|x + ۱|$ است که بدیهی است که در کل $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. در گزینه ۲ نیز دامنه تابع مشتق برابر $\mathbb{R}$ است.

زیرا هر دو عبارت صورت و مخرج، همواره مثبت هستند، یعنی نه عبارت زیر رادیکال، امکان منفی شدن دارد و نه عبارت موجود در مخرج می تواند برابر صفر شود، پس تابع f در کل $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است.

در گزینه ۳، تابع f در تمام اعداد صحیح به جز $x = ۰$ ، ناپیوسته و مشتق ناپذیر است یعنی در میان اعداد صحیح، فقط نقطه $x = ۰$ است که به دلیل وجود عامل $x^۳$ پشت جزء صحیح شرایط مشتق پذیری را دارد. پس دامنه تابع f' برابر $\mathbb{R}$ نیست. در گزینه ۴ تابع f در $x = ۱$ پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow ۱^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۱^-} (x^۴ + x) = ۲$$

$$\lim_{x \rightarrow ۱^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۱^+} (۵x - ۳) = ۲, \quad f(۱) = ۲$$

حال برای بررسی مشتق پذیری تابع f داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^۴ + x & ; x \leq ۱ \\ ۵x - ۳ & ; x > ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۴x^۳ + ۱ & ; x < ۱ \\ ۵ & ; x > ۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱) = ۵, \quad f'_-(۱) = ۵$$

تابع در نقطه مشتق پذیر است.

بدیهی است که تابع در سایر نقاط نیز مشتق پذیر است یعنی دامنه تابع مشتق برابر است.

پس فقط گزینه ۳ است که دامنه تابع مشتق آن برابر $\mathbb{R}$ نیست.

۶۹. گزینه ۳

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(۱+h) - f(۱)}{۱+h-۱} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{(۱+h)^۲ - ۲(۱+h) + ۱۷} - \sqrt{۱۶}}{h} = \frac{۱}{۳}$$



$$= \frac{\sqrt{h^2 + 2h + 1 - 2 - 2h + 17 - 4}}{h} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{h^2 + 16} - 4}{h} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3\sqrt{h^2 + 16} - 12 = h$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{h^2 + 16} = 12 + h \xrightarrow{\text{توان } 2} 9(h^2 + 16) = 144 + h^2 + 24h$$

$$\Rightarrow 9h^2 + 144 = 144 + h^2 + 24h \Rightarrow 8h^2 = 24h \xrightarrow{h \neq 0} 8h = 24 \Rightarrow h = 3$$

۷. گزینه ۲ با توجه به شکل داریم:

$$\tan(45^\circ + \alpha) = \frac{\tan 45^\circ + \tan \alpha}{1 - \tan 45^\circ \tan \alpha}$$

$$\frac{y+2}{x} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \times \frac{x}{x} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 + 2x}{x-2} - 2 = \frac{x^2 + 4}{x-2} \Rightarrow y' = 1 - \frac{8}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(6) = 1 - \frac{8}{16} = 0.5$$

