

درس اول : هندسه تحلیلی

یاد آوری و تکمیل معادله خط :

* می دانیم از هر دو نقطه متمایز تنها یک خط راست عبور می کند .

با داشتن مختصات ۲ نقطه از خط می توان معادله آن خط را نوشت .

برای این کار ابتدا شیب خط را که برابر است با نسبت جا به جایی عمودی به جا به جایی افقی پیدا می کنیم

* معادله خطی که شیب آن m و عرض از مبدأش h باشد به فرم $y = mx + h$ می باشد .

نکته ۱: شیب خط گذرا از دو نقطه A و B برابر است با $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

مثال ۱: معادله خطی که از نقاط $A = (5, 7)$ و $B = (3, 1)$ عبور می کند بنویسید .

حل : شیب خط $m_{AB} = \frac{7-1}{5-3} = 3$ می شود پس معادله خط به صورت $y = 3x + h$ است حال مختصات

یکی از دو نقطه A یا B را در معادله بدست آمده قرار می دهیم

$$7 = 3(5) + h \Rightarrow h = -8$$

در نتیجه معادله خط به صورت $y = 3x - 8$ است .

نکته ۲: روش دوم نوشتن معادله خطی که دو نقطه از آن را داریم

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال ۲: معادله خطی را بنویسید که از نقاط $A = (3, 0)$ و $B = (1, -2)$ عبور کند .

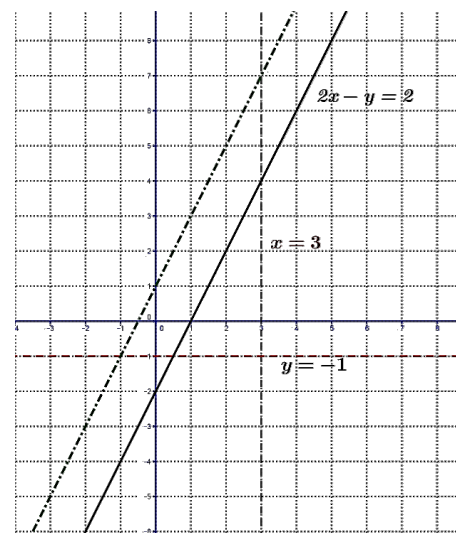
نکته ۳: وقتی معادله خط را داشته باشیم با انتخاب دو مقدار دلخواه بجای x دو مقدار برای y محاسبه می کنیم در نتیجه مختصات دو نقطه از خط را داریم پس می توانیم نمودارش را رسم کنیم .

مثال ۳) نمودار هر یک از خط های زیر را رسم کنید .

الف) $-2x + y = 6$ ب) $y = \frac{-3}{2}x + 1$

مثال ۴: نمودار خط های زیر را رسم کنید .

الف) $y = 2x + 1$ ب) $2x - y = 2$ پ) $y = -1$ ت) $x = 3$



همانطور که ملاحظه می کنید که دو خط $2x - y = 2$ و $y = 2x + 1$ با هم موازیند .

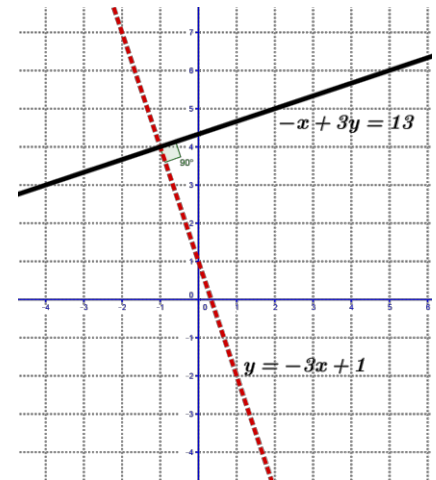
دلیل این است که دو خط برابر است .

مثال ۵) معادله خطی را بنویسید که با خط $y = 5 + 3x$ موازی باشد و از $A = (1, 4)$ عبور کند .

نکته ۴: نقاط هر خط قالب خط را به خود می گیرند

مثال ۶) اگر نقطه (a, b) روی خط $2x + 3y - 1 = 0$ باشد $b =$

تمرین ۱) نمودار خط های $-x + 3y = 13$ و $y = -3x + 1$ در شکل زیر رسم شده اند. ملاحظه می کنید برهم شیب آنها شیب آنها هم است .



تمرین ۲) خط l به معادله $y = mx + (m - 1)$ بر خط $\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$ عمود است . خط l از کدام نقطه عبور می کند ؟

- ۱) $(-1, 0)$ ۲) $(1, 3)$ ۳) $(2, 1)$ ۴) $(2, 4)$

* دو خط با هم موازیند هرگاه شیب آنها برابر باشد.

* دو خط غیر موازی با محورهای مختصات برهم عمودند هرگاه حاصل ضرب شیب های آنها -1 شود .

(یعنی شیب یکی قرینه و معکوس شیب دیگری است)

تمرین ۳) دو خط به معادله $-2x + (-m + 1)y = 2$ و $y = (m - 4)x - 1$ مفروضند مقدار m را طوری بدست آورید که :

الف) دو خط موازی باشند

ب) برهم عمود باشند

تمرین ۴) یکی از خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ برخط گذرنده از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(8, 3)$ عمود است، معادله آن خط کدام است؟

$$2y - 3x = -5 \quad (۳) \quad 3y + 2x = 4 \quad (۱)$$

$$3y - 2x = -5 \quad (۴) \quad 2y + 3x = 1 \quad (۲)$$

نکته ۵

۱) اگر دو نقطه $A = (x_A, y_A)$ و $B = (x_B, y_B)$ هم طول باشند یعنی $x_A = x_B$ آنگاه فاصله آنها برابر $AB = |y_A - y_B|$ است.

۲) اگر دو نقطه $A = (x_A, y_A)$ و $B = (x_B, y_B)$ هم عرض باشند یعنی $y_A = y_B$ آنگاه فاصله آنها برابر $AB = |x_A - x_B|$ است.

۳) اگر $A = (x_A, y_A)$ و $B = (x_B, y_B)$ دو نقطه دلخواه باشند آنگاه فاصله آنها برابر

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \text{ است.}$$

۴) فاصله نقطه $D = (x_D, y_D)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OD = \sqrt{x_D^2 + y_D^2}$$

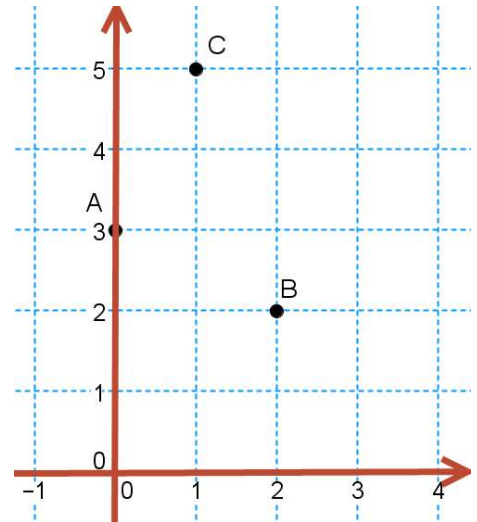
فاصله دو نقطه

تمرین ۵) نقاط $A = (1, 4)$ و $B = (5, 4)$ و $C = (5, 7)$ مفروض اند:

اگر این سه نقطه رئوس مثلثی باشند نوع مثلث را مشخص کنید.

تمرین ۶ نقاط $A = (0, 3)$ و $B = (2, 2)$ و $C = (1, 5)$ سه رأس یک مثلث هستند نوع مثلث را معلوم کنید محیط آن چند است ؟ فاصله نقطه C تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید .

حل:

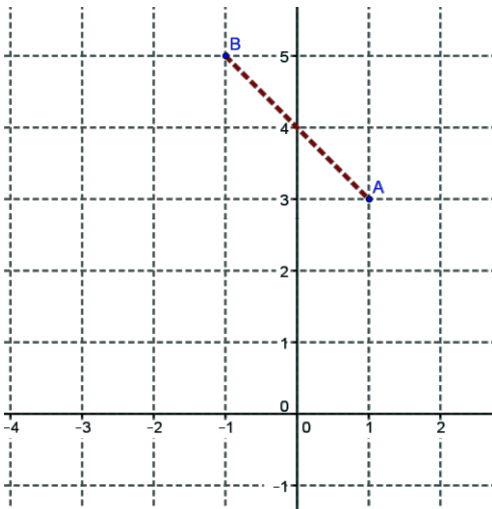


تمرین ۷ مربع $ABCD$ در ناحیه اول و دوم صفحه مختصات قرار دارد و

$A = (1, 3)$ و $B = (-1, 5)$ دو رأس آن هستند :

الف) شیب خط AD و معادله آن را بنویسید .

ب) اگر $C = (-3, 3)$ باشد مختصات D را بیابید .



نکته ۶ : مختصات نقطه وسط یک پاره خط

اگر $A = (x_A, y_A)$ و $B = (x_B, y_B)$ دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند مختصات نقطه وسط این دو نقطه برابر $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ در این حالت نقطه A قرینه نقطه B نسبت به نقطه M می گوییم .

مثال ۷) مختصات نقطه وسط دو نقطه $A = (3, -2)$ و $B = (4, 8)$ را بیابید .

تمرین ۸) قرینه نقطه $C = (2, 5)$ نسبت به نقطه $E = (0, -3)$ چه نقطه ای است ؟

تمرین ۹) نقطه $F = (5, -4)$ وسط پاره خط بین دو نقطه A و $B = (7, -2)$ است مختصات نقطه A چیست ؟

تمرین ۱۰) معادله عمود منصف پاره خط AB که در آن $A(0, 1)$ و $B(6, 3)$ است را بنویسید.

تمرین ۱۱) مختصات سه رأس مثلثی $A = (1, 9)$ و $B = (3, 1)$ و $C = (7, 11)$ را در نظر بگیرید و آن را در دستگاه مشخص کنید .

الف) مختصات M ، نقطه وسط ضلع BC را مشخص کنید .

ب) طول میانه AM را محاسبه کنید و معادله خطی که این میانه بخشی از آن است را بنویسید .

تمرین ۱۲ چهار نقطه $A = (-1, 3)$ و $B = (8, 6)$ و $C = (3, 11)$ و $D = (-6, 8)$ را در صفحه مختصات مشخص کرده و نشان دهید که وسط پاره خط AC بر وسط پاره خط BD منطبق است. چهارضلعی $ABCD$ چه نوع چهارضلعی است؟

نکته ۶) در هر متوازی الاضلاع

تمرین ۱۳ نقاط $A = (0, 0)$ و $B = (2, 4)$ و $C = (6, 0)$ سه رأس یک متوازی الاضلاع هستند.

مختصات رأس چهارم آن متوازی الاضلاع را حساب کنید. (سه جواب) 😊

نکته ۷: قرینه نقطه (x_1, y_1)

نسبت به	میشه
خط $y = m$	$(x_1, 2m - y_1)$
خط $x = k$	$(2k - x_1, y_1)$
محور طول ها	$(x_1, -y_1)$
محور عرضها	$(-x_1, y_1)$
مبدا مختصات	$(-x_1, -y_1)$
نیمساز ربع اول و سوم	(y_1, x_1)
نیمساز ربع دوم و چهارم	$(-y_1, -x_1)$

تمرین ۱۴) قرینه نقطه $A = (2, 3)$ را نسبت به هر یک از خط های زیر معین کنید .

الف) محور x ها

ب) محور y ها

پ) نیمساز ربع اول و سوم

ت) خط $x = 4$

ث) خط $y = 1$

ج) خط $y = 2x - 3$

نکته ۸ : فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه $A = (x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ می شود :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۸) فاصله نقطه $A(2, 3)$ از خط $y = -3x - 11$ را به دست آورید .

حل : ابتدا خط را به فرم $3x + y + 11 = 0$ می نویسیم سپس

$$d = \frac{|3 \times 2 + 3 + 11|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

تمرین ۱۵) یکی از اضلاع مربعی برخط $x + y - 3 = 0$ واقع است ،

اگر $A(3, 6)$ یکی از رئوس این مربع باشد ، مساحت آن را به دست آورید .

