



۱۴۳. معادله ی $(x^2 + 2)^2 - 4(x^2 + 2) + 3 = 0$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟

- ۴ ☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐

پاسخ: گزینه ۲

$$(x^2 + 2)^2 - 4(x^2 + 2) + 3 = 0 \xrightarrow{x^2 + 2 = A} A^2 - 4A + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (A - 1)(A - 3) = 0 \quad \begin{cases} A = 1 \Rightarrow x^2 + 2 = 1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{ریشه ی حقیقی ندارد} \\ A = 3 \Rightarrow x^2 + 2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

۱۴۴. در معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ حاصل $x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2$ کدام است؟

- ۴۹ ☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۱۲۱ ☐ ۳ ☐ ۹ ☐ ۴ ☐ ۲۵ ☐

پاسخ: گزینه ۱

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

$$x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 = (9 - 2)^2 = 49$$

۱۴۵. اگر $x^2 + 4x + 1 = 0$ باشد. حاصل $(x + 2)^4 + 1$ کدام است؟

- ۴ ☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۹ ☐ ۳ ☐ ۱۰ ☐ ۴ ☐

پاسخ: گزینه ۴

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 - 3 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 3 \Rightarrow (x + 2)^4 = 9$$

$$\Rightarrow (x + 2)^4 + 1 = 9 + 1 = 10$$

۱۴۶. به ازای کدام مقدار m بین ریشه های معادله ی $x^2 - 5mx + 16 = 0$ رابطه ی $x_1^3 = x_2 > 0$ برقرار است؟

$$m = -2 \quad \text{و} \quad m = 2 \quad \text{و} \quad m = 8 \quad \text{و} \quad m = -8$$

$$m = 2 \quad \text{و} \quad m = -2 \quad \text{و} \quad m = 8 \quad \text{و} \quad m = -8$$

پاسخ: گزینه ۳

$$x_1^3 = x_2 \xrightarrow{\text{طرفین را در } x_1 \text{ ضرب می کنیم}} x_1^4 = x_1 x_2 \Rightarrow x_1^4 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1^4 = 16 \Rightarrow x_1 = 2, x_1 = -2$$

که چون ریشه ها مثبت هستند $x_1 = 2$ قابل قبول است، ریشه ی معادله در معادله صدق می کند.

$$x_1 = 2 \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} 4 - 10m + 16 = 0 \Rightarrow m = 2$$

۱۴۷. معادله ی وتر مشترک دو سهمی $y = x^2 - 4x + 5$ و $y = -x^2 + 2x$ کدام است؟

$$y = 2x + 5 \quad \text{و} \quad y = 2x + 5 \quad \text{و} \quad y = 2x + 5 \quad \text{و} \quad y = 2x + 5$$

پاسخ: گزینه ۴ وتر مشترک دو تابع درجه ی دوم، خطی است که محل تلاقی دو منحنی را به هم وصل می کند لذا دو منحنی را برابر هم قرار می



دهیم:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 5 = -x^2 + 2x \Rightarrow 2x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 40 < 0$$

معادله ی تلاقی ریشه ندارد، پس دو منحنی همدیگر را قطع نمی کنند و وتر مشترک ندارند.

۱۴۸. اگر x' و x'' ریشه های معادله ی $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند، حاصل $x'^4 x'' + x''^4 x'$ کدام است؟

۸۰ (۴)

۷۲ (۳)

۶۴ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = 4, \quad x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = 2$$

$$x'^4 x'' + x''^4 x' = x' x'' (x'^3 + x''^3) = x' x'' ((x' + x'')^3 - 3x' x'' (x' + x'')) = 2(64 - 24) = 80$$

۱۴۹. معادله ی $x^4 + 3x^2 = \sqrt{m-1} + 2$ دارای چند ریشه ی حقیقی است؟

ریشه ی حقیقی ندارد (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$x^4 + 3x^2 - \sqrt{m-1} - 2 = 0$$

در معادله ی دو مجذوری فوق چون a و c یعنی 1 و $(\sqrt{m-1} + 2)$ مختلف‌العلامت‌اند، در نتیجه $\frac{c}{a} < 0$ بوده و معادله ی دو مجذوری دو ریشه ی حقیقی قرینه هم خواهد داشت.۱۵۰. در معادله ی درجه ی دوم $x^2 + 3x - 1 = 0$ حاصل $x_1^3 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 - x_2^3$ کدام است؟

۱۶۹ (۴)

۱۶۹ (۳)

۱۳ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{می دانیم:}$$

$$x_1^3 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \right)^3$$

$$= \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \right)^3 = \left(\frac{\sqrt{9 + 4}}{1} \right)^3 = (\sqrt{13})^3 = 13\sqrt{13}$$



۱۵۱. در معادله درجه‌ی دوم $4x^2 + kx = 21$ اگر مجموع ریشه‌ها برابر -2 باشد. ریشه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

$$\frac{-3}{2} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{3}{2} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{7}{2} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{-7}{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$x_1 + x_2 = -2 \rightarrow \frac{-b}{a} = -2 \Rightarrow \frac{-k}{4} = -2 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow 4x^2 + 8x - 21 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 3)(2x + 7) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = -\frac{7}{2}$$

البته برای حل معادله درجه‌ی دوم $4x^2 + 8x - 21 = 0$ می‌توانید از روش دلتا هم استفاده کنید.

۱۵۲. در معادله درجه‌ی دوم $(x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1) = 6$ ، بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad \boxed{4}$$

$$\sqrt{3} \quad \boxed{3}$$

$$2 - \sqrt{3} \quad \boxed{2}$$

$$4 - \sqrt{3} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

۱ را $x-1$ برابر t قرار می‌دهیم.

$$x-1 = t \Rightarrow t^2 + 2\sqrt{3}t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 24}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 6}{2} = -\sqrt{3} \pm 3$$

t بزرگ‌تر به صورت $-\sqrt{3} + 3$ است، لذا داریم:

$$t = -\sqrt{3} + 3 \xrightarrow{t=x-1} x-1 = -\sqrt{3} + 3 \Rightarrow x = 4 - \sqrt{3}$$

۱۵۳. نمودار تابع $y = -3x^2 + 4x - 3$ از کدام نواحی می‌گذرد؟

$$\boxed{4} \text{ سوم و چهارم}$$

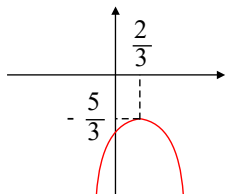
$$\boxed{3} \text{ اول و دوم}$$

$$\boxed{2} \text{ دوم و چهارم}$$

$$\boxed{1} \text{ اول و سوم}$$

پاسخ: گزینه ۴

چون Δ منفی است ($16 - 36 = -20$) سهمی محور x را قطع نمی‌کند و چون ضریب x^2 منفی است دارای Max است پس حتماً از ناحیه‌ی سوم و چهارم می‌گذرد.



۱۵۴. به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های معادله درجه‌ی دوم $2x^2 + (m-1)x = 1$ برابر

$$\frac{13}{4} \text{ است؟}$$

$$\boxed{4} \text{ فقط } -2$$

$$\boxed{3} \text{ } -2, 4$$

$$\boxed{2} \text{ } -3, 4$$

$$\boxed{1} \text{ } 2, -4$$



پاسخ: گزینه ۳ معادله را به صورت $2x^2 + (m-1)x - 1 = 0$ مرتب می‌کنیم.

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{1-m}{2}, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$x'^2 + x''^2 = \frac{13}{4} \rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \frac{13}{4} \rightarrow \frac{(1-m)^2}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

$$\rightarrow \frac{(1-m)^2}{4} = \frac{9}{4} \rightarrow (1-m)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} 1-m = 3 \rightarrow m = -2 \\ 1-m = -3 \rightarrow m = 4 \end{cases}$$

چون $\frac{c}{a}$ منفی است دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم همواره مثبت است و هر دو جواب قابل قبول هستند.

۱۵۵. به‌ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $(2-m)x^2 + 3x + m^2 = 0$ معکوس یکدیگرند؟

- ۱ فقط ۱ ۲ و ۱ ۳ فقط ۲ ۴ ۱ و ۲

پاسخ: گزینه ۱ اگر دو ریشه، معکوس یکدیگر باشند، حاصل‌ضربشان یک است.

$$x'x'' = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{2-m} = 1 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

معادله $m = 1 \rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 > 0$: ق ق

معادله $m = -2 \rightarrow 4x^2 + 3x + 4 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 64 < 0$: غ ق ق

۱۵۶. جواب‌های معادله $\sqrt{2x+5} - 2x = 5$ چگونه است؟

- ۱ یک ریشه‌ی منفی ۲ دو ریشه‌ی منفی
۳ دو ریشه‌ی مثبت ۴ یک ریشه‌ی منفی و یک ریشه‌ی مثبت

پاسخ: گزینه ۲

توان ۲ $\sqrt{2x+5} = 5 + 2x \xrightarrow{2} 2x+5 = 4x^2 + 20x + 25 \rightarrow 4x^2 + 18x + 20 = 0$

$$\rightarrow 2x^2 + 9x + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 81 - 80 = 1 \rightarrow x = \frac{-9 \pm 1}{4} = -2, -\frac{5}{2}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا در معادله‌ی اصلی (اولیه) صدق می‌کنند.

۱۵۷. ریشه‌های کدام معادله از ریشه‌های معادله $\frac{1}{4} = 3x^2 + 5x$ به مقدار $\frac{1}{2}$ بیشتر است؟

۱ $3x^2 - x + 2 = 0$ ۲ $3x^2 + 2x - 2 = 0$

۳ $3x^2 + 2x - 1 = 0$ ۴ $3x^2 + x - 4 = 0$

پاسخ: گزینه ۲ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد به صورت زیر است:

$$a(x-k)^2 + b(x-k) + c = 0$$

کافی است در معادله‌ی $0 = \frac{1}{4} = 3x^2 + 5x - \frac{1}{4}$ را به $x - \frac{1}{2}$ تبدیل کنیم.



$$3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow 3x^2 - 3x + \frac{3}{4} + 5x - \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x - 2 = 0$$

۱۵۸. در صورتی که منحنی تابع $y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{2}$ ، محور x ها را در طرفین محور y ها قطع کند، آنگاه حدود تغییرات a چگونه است؟

$$a > \frac{3}{2} \quad \boxed{۴} \qquad a < \frac{3}{2} \quad \boxed{۳} \qquad 2 < a < 6 \quad \boxed{۲} \qquad a < 2 \text{ یا } a > 6 \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ باید معادله $y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد تا نمودار تابع $y = 2x^2 + ax + a - \frac{3}{2}$ ، محور x ها را در طرفین محور y ها قطع کند. برای آن که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد، لازم و کافی است که $\frac{c}{a} < 0$ ، پس:

$$\frac{a - \frac{3}{2}}{2} < 0 \Rightarrow a - \frac{3}{2} < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$$

۱۵۹. به ازای کدام مقدار k ، مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{k}{x} + \frac{x}{x-3} = 2$ برابر ۷ است؟

$$-2 \quad \boxed{۴} \qquad 2 \quad \boxed{۳} \qquad -1 \quad \boxed{۲} \qquad 1 \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{k}{x} + \frac{x}{x-3} = 2 \Rightarrow \frac{k(x-3) + x^2}{x(x-3)} = 2 \xrightarrow{x \neq 0, 3} kx - 3k + x^2 = 2x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - kx + 3k = 0 \Rightarrow x^2 - (6+k)x + 3k = 0$$

چون مجموع ریشه‌ها برابر ۷ است، بنابراین:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow 7 = -\frac{-(6+k)}{1} \Rightarrow 6+k = 7 \Rightarrow k = 1$$

۱۶۰. اگر خطوط $y = (k+2)x + 3$ و $ky - x - 5 = 0$ معادلات قطرهای یک مربع باشند فاصله‌ی محل تلاقی دو قطر مربع از مبدأ مختصات کدام است؟

$$\sqrt{15} \quad \boxed{۱} \qquad \sqrt{17} \quad \boxed{۲} \qquad \sqrt{18} \quad \boxed{۳} \qquad \sqrt{19} \quad \boxed{۴}$$

پاسخ: گزینه ۲ قطرهای مربع بر هم عمودند پس شیب قطرها عکس و قرینه هم هستند.

$$y = (k+2)x + 3 \rightarrow m = k+2 \quad \xrightarrow[\text{شرط عمود بودن}]{mm' = -1} \frac{k+2}{k} = -1 \rightarrow k+2 = -k = -1$$

$$ky - x - 5 = 0 \rightarrow m' = \frac{1}{k}$$

حال با معلوم بودن k ، معادلات دو خط را نوشته و آنها را با هم تلاقی می‌دهیم.

$$k = -1 \rightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ -y - x - 5 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x = -4, \quad y = -1$$



$$A \left| \begin{smallmatrix} -4 \\ -1 \end{smallmatrix} \right|, O \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right| \rightarrow AO = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

۱۶۱. مینیمم تابع $y = x^2 + 6x + a$ روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد. a کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) -۳

پاسخ: گزینه ۱ کافی است، مختصات نقطه‌ی S را از رابطه‌ی $\begin{vmatrix} -b \\ 2a \\ 4ac-b^2 \\ 4a \end{vmatrix}$ بدست آورده و در خط داده شده صدق دهیم.

$$\begin{vmatrix} -b \\ 2a \\ 4ac-b^2 \\ 4a \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -6 \\ 2 \\ 4a-36 \\ 4 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -3 \\ a-9 \end{vmatrix} \xrightarrow[y=2x+1]{\text{صدق}} a-9 = -6+1 \rightarrow a=4$$

۱۶۲. مساحت مثلثی با رئوس $A(1, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(k, -1)$ برابر ۳ است. مقادیر k کدام‌اند؟

- ۱) ۱ یا -۵ ۲) ۳ یا -۱ ۳) ۳ یا -۳ ۴) -۳ یا ۵

پاسخ: گزینه ۳ هرگاه مختصات سه رأس مثلث ABC را داشته باشیم مساحت مثلث از این رابطه به دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$\rightarrow 3 = \frac{1}{2} |1(3+1) + 2(-1-1) + k(1-3)|$$

$$\rightarrow 6 = |4-4+2k| \rightarrow |2k| = 6 \rightarrow 2k = \pm 6 \rightarrow k = \pm 3$$

۱۶۳. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$ کدام است؟

- ۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x+1 = 4+x-3+4\sqrt{x-3}$$

$$\rightarrow x = 4\sqrt{x-3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 = 16(x-3) \rightarrow x^2 = 16x - 48$$

$$\rightarrow x^2 - 16x + 48 = 0 \rightarrow (x-12)(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=12 & \text{ق ق} \\ x=4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر ۱۶ می‌باشد.

۱۶۴. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2+1} = x+1$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

$$\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2+1} = x+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2x + \sqrt{6x^2+1} = x^2+1+2x$$

$$\rightarrow \sqrt{6x^2+1} = x^2+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 6x^2+1 = x^4+1+2x^2 \rightarrow x^4-4x^2=0$$



$$\rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = 2 \text{ ق ق} \\ x = -2 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر ۲ می‌باشد.

۱۶۵. معادله‌ی $\frac{1}{x^2 - 3x - 2} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x^2 - 3x}$ دارای چند جواب است؟

صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۱ $x^2 - 3x$ را برابر A در نظر می‌گیریم.

$$\frac{1}{A-2} + \frac{1}{A+2} = \frac{1}{A} \xrightarrow{\times A(A+2)(A-2)} A(A+2) + A(A-2) = (A+2)(A-2)$$

$$\rightarrow A^2 + 2A + A^2 - 2A = A^2 - 4 \rightarrow A^2 = -4$$

بنابراین معادله‌ی داده شده دارای جواب نمی‌باشد.

۱۶۶. معادله‌ی $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2+x-2}$ چند ریشه دارد؟

صفر (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2+x-2} \rightarrow \frac{x+1}{x-1} + \frac{2x}{x+2} = \frac{3x^2}{(x+2)(x-1)}$$

$$\xrightarrow{\times (x+2)(x-1)} (x+2)(x+1) + 2x(x-1) = 3x^2 \rightarrow x^2 + x + 2x + 2 + 2x^2 - 2x = 3x^2$$

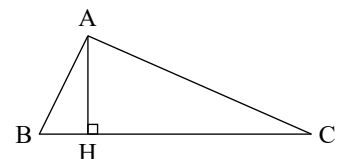
$$\rightarrow 3x^2 + x + 2 = 3x^2 \rightarrow x = -2$$

این جواب غیرقابل قبول می‌باشد زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند.

۱۶۷. اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه راس مثلث ABC باشند، معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC از راس A کدام است؟

$y = x + 3$ (۴) $y = -2x$ (۳) $y = -x + 1$ (۲) $y = -x - 3$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ شکل فرضی روبرو را در نظر بگیرید، در ابتدا شیب ضلع BC را به دست می‌آوریم و چون ارتفاع، بر ضلع BC عمود است پس شیبش عکس و قرینه‌ی شیب ضلع BC است.



$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0 - (-2)}{3 - 1} = 1 \xrightarrow{AH \perp BC} m_{AH} = -1$$

$$AH \text{ ارتفاع: } y - 2 = -1(x + 1) \rightarrow y = -x + 1$$



۱۶۸. حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $1 - x = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ کدام گزینه است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴ می‌توان طرف دوم را با اتحاد مزدوج تجزیه نماییم

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$$

حال می‌توان عامل مشترک جداگانه مساوی صفر قرار دارد و آن را از دو طرف حذف کرد:

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1 \\ \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} \rightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = 1 \rightarrow \sqrt{x} = 0 = x = 0 \\ \sqrt{x} + 1 = -1 \rightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

هر دو ریشه $x = 0$ و $x = 1$ قابل قبول هستند و در معادله صدق می‌نمایند و حاصلضرب ریشه‌ها صفر می‌باشد.

۱۶۹. معادله‌ی $\sqrt{x^4 - x^3 + 9x - 6} + \sqrt{x^3 - 4x} = 0$

- ۱ (۱) یک جواب منفی دارد. ۲ (۲) یک جواب مثبت دارد. ۳ (۳) دو جواب دارد. ۴ (۴) سه جواب دارد.

پاسخ: گزینه ۱ باتوجه به اینکه مجموع دو رادیکال فرجه‌ی زوج که، همواره نامنفی هستند صفر شده است، هم اولی باید صفر باشد هم دومی.

لذا می‌توان ریشه‌های یک بخش را محاسبه کرد و در کل معادله جایگذاری نمود.

$$\sqrt{x^3 - 4x} = 0 \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 2)(x + 2) = 0$$

پس سه ریشه‌ی اولیه وجود دارد $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$.

حال با جایگذاری متوجه می‌شویم که فقط $x = -2$ در معادله صدق می‌نماید.

۱۷۰. اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $\sqrt{x^2 + x} + |x^2 - 1| = 0$ باشد، حاصل $15\alpha^4 - 5\alpha^3$ کدام است؟

- ۱۵ (۱) -۱۵ (۲) ۲۰ (۳) -۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ باتوجه به وجود قدر مطلق و رادیکال با فرجه‌ی زوج که هر دو نامنفی می‌باشند، مجموع دو عبارت نامنفی صفر شده که هم اولی

باید صفر باشد هم دومی، پس:

$$\sqrt{x^2 + x} = 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$|x^2 - 1| = 0 \rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

ریشه‌ی مشترک هر دو معادله $x = -1$ می‌باشد پس $\alpha = -1$ و می‌توان با جایگذاری مقدار جواب نهائی را بدست آورد.

$$15\alpha^4 - 5\alpha^3 \stackrel{\alpha=-1}{=} 15(-1)^4 - 5(-1)^3 = 15 + 5 = 20$$



۱۷۱. معادله‌ی خط $(2k-1)x + (k+3)y + 7 = 0$ به ازاء جميع مقادير k از نقطه‌ی A عبور می‌نماید. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ مختصات کدام است؟

$$\sqrt{7} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt{5} \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به اینکه به ازاء جميع مقادير k از یک نقطه‌ی ثابت عبور می‌نماید، به پارامتر k دو مقدار مختلف اختصاص می‌دهیم:

$$(2k-1)x + (k+3)y + 7 = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2} + 3\right)y + 7 = 0 \rightarrow \frac{7}{2}y = -7 \rightarrow y = -2$$

$$k = -3 \rightarrow (2(-3) - 1)x + 7 = 0 \rightarrow -7x = -7 \rightarrow x = 1$$

پس مختصات $A(1, -2)$ و می‌توان فاصله تا مبدأ را رابطه‌ی طول پاره‌خط محاسبه کرد:

$$|OA| = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

۱۷۲. نقاط $A(0, 6)$ و $B(2, 4)$ مبدأ مختصات سه راس یک مثلث باشد. عمودمنصف ضلع بزرگ‌تر محور y ها را در چه عرضی قطع می‌نماید.

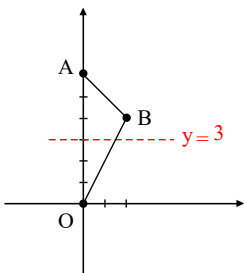
$$x = 2 \quad \text{۴}$$

$$y = 3 \quad \text{۳}$$

$$y = 2 \quad \text{۲}$$

$$x = 3 \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا شکل را رسم می‌نمائیم. با توجه به تصویر ضلع OA بزرگترین ضلع مثلثی باشد و عمودمنصف آن خطی است افقی به ارتفاع ۳. پس معادله‌ی آن به صورت $y = 3$ می‌باشد.



۱۷۳. دو ضلع مربعی منطبق بر خط $3x = 3y + 9$ و $y = x + 2$ می‌باشد. طول قطر مربع چقدر می‌باشد؟

$$\sqrt{5} \quad \text{۴}$$

$$3 \quad \text{۳}$$

$$4 \quad \text{۲}$$

$$5 \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا باید فاصله‌ی دو خط موازی که همان طول ضلع مربع می‌باشد را محاسبه نمائیم.

$$x - y + 2 = 0$$

$$3x - 3y - 9 = 0 \xrightarrow{\div 3} x - y - 3 = 0$$

$$d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\text{قطر } d = \sqrt{2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ضلع}}}{a} = \sqrt{2} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 5$$

حال طول قطر مربع برابر است با:



۱۷۴. دایره‌ای محور y ها را در دو نقطه ۱ و ۵ قطع کرد، و مرکز آن روی نیمساز ناحیه‌ی اول قرار دارد. شعاع دایره کدام است؟

$$\sqrt{14} \quad \boxed{۴}$$

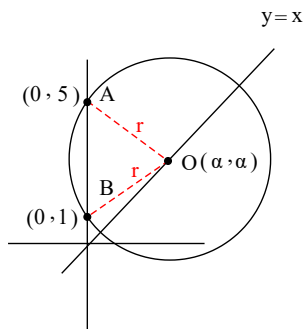
$$۳ \quad \boxed{۳}$$

$$\sqrt{13} \quad \boxed{۲}$$

$$\sqrt{11} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به تصویر رسم شده شعاع را دوبار محاسبه کرده و برابر هم قرار می‌دهیم.



$$OA = OB \rightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\alpha - 5)^2} = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\alpha - 1)^2}$$

$$\alpha^2 + (\alpha - 5)^2 = \alpha^2 + (\alpha - 1)^2 \rightarrow (\alpha - 5)^2 = (\alpha - 1)^2 \rightarrow |\alpha - 5| = |\alpha - 1|$$

$$\begin{cases} \alpha - 5 = \alpha - 1 \rightarrow \text{غ غ ق} \\ \alpha - 5 = -(\alpha - 1) \rightarrow 2\alpha = 4 \rightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

لذا شعاع برابر است با:

۱۷۵. تصویر نقطه‌ی $A(-3, 2)$ بر روی خط $L: 3y - 2x + 1 = 0$ ، نقطه‌ی $B(a, b)$ است. $a + b$ کدام است؟

$$-۲ \quad \boxed{۴}$$

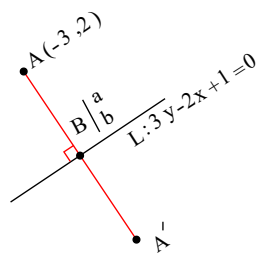
$$-۱ \quad \boxed{۳}$$

$$۲ \quad \boxed{۲}$$

$$۱ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

پاره خط AB بر خط L عمود است.



پس می‌توان گفت:

$$m_{AB} \times m_L = -1 \rightarrow m_{AB} \times \frac{2}{3} = -1 \rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{2}$$

حال می‌توان معادله‌ی AB را نوشت:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{2}, A(-3, 2) \rightarrow y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 3) \xrightarrow{\times 2} 2y - 4 = -3(x + 3)$$

$$\rightarrow 2y + 3x = -5 \quad \text{معادله‌ی } AB$$



برای یافتن مختصات نقطه‌ی B کافیست، محل برخورد خط L و پاره AB را محاسبه نمائیم

$$\begin{cases} 3y - 2x = -1 \\ 2y + 3x = -5 \end{cases}$$

$$9y + 4y = -13 \rightarrow y = -1 \rightarrow x = -1 \rightarrow B(-1, -1)$$

$$a + b = -2$$

۱۷۶. نقطه‌ی $A(-3, 2)$ رأس مربعی است که یک قطر آن منطبق بر خط $y - x = 4$ است. مساحت این مربع کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (4)$$

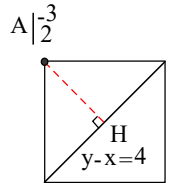
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲. باتوجه به تصویر فاصله‌ی نقطه‌ی A تا قطر مربع نصف طول قطر است. پس کافیست این فاصله را محاسبه نمائیم.

$$\begin{cases} A \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \end{vmatrix} \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$$



$$AH = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(-3) - 1(2) + 4|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \text{طول قطر} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

مربع یک لوزی هم می‌باشد پس با رابطه‌ی لوزی هم می‌توان مساحت را محاسبه کرد.

$$S = \frac{1}{2}(\text{قطر})^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = 1$$

۱۷۷. دو رأس غیر مجاور یک مربع روی خط به معادله $3x - 4y = 1$ قرار دارند. اگر نقطه $(2, 1)$ رأس دیگری از مربع باشد، در این صورت مساحت مربع کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad (4)$$

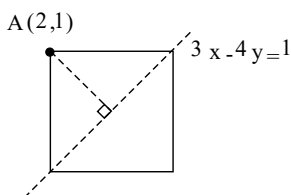
$$\frac{1}{10} \quad (3)$$

$$\frac{2}{25} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

رسم یک تصویر مقدماتی به حل سوال کمک می‌نماید.



با توجه به نمودار، فاصله نقطه A تا خط مورد نظر، نصف طول قطر می‌باشد. برای محاسبه فاصله نقطه از خط معادله را به فرم $3x - 4y - 1 = 0$ نوشته و از رابطه زیر استفاده می‌نماییم.



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) - 4(1) - 1|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \text{قطر} = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$$

مربع یک لوزی هم می‌باشد پس برای محاسبه مساحت می‌توان نوشت:

$$S = \frac{1}{2} (\text{قطر})^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$$

۱۷۸. جواب معادله گویای $\frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = ax^{-1}$ کدام است؟ ($a \neq 0$)

$$\frac{3}{2}a \quad \boxed{4}$$

$$\frac{1}{2}a \quad \boxed{3}$$

$$\frac{2}{3}a \quad \boxed{2}$$

$$\frac{1}{3}a \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا توان منفی را وارون می‌نماییم تا به توان مثبت تبدیل شود.

$$\frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = ax^{-1} \rightarrow \frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$$

با فرض $a \neq 0$ و $x \neq 0$ طرفین را در $x(a-x)$ ضرب می‌نماییم:

$$\frac{x(a-x)}{x(a-x)} \rightarrow x^2 - (a-x)^2 = a(a-x) \rightarrow x^2 - (a^2 - 2ax + x^2) = a^2 - ax$$

$$\rightarrow 3ax - 2a^2 = 0 \rightarrow a(3x - 2a) = 0 \begin{cases} a \neq 0 \\ 3x - 2a = 0 \rightarrow x = \frac{2a}{3} \end{cases}$$

۱۷۹. تعداد و علامت جواب‌های معادله $x + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 2$ چگونه است؟

$$\boxed{2} \text{ فقط یک جواب مثبت}$$

$$\boxed{1} \text{ فقط یک جواب منفی}$$

$$\boxed{4} \text{ فاقد جواب حقیقی}$$

$$\boxed{3} \text{ یک جواب منفی، یک جواب مثبت}$$

پاسخ: گزینه ۳ معادله را حل می‌کنیم و جواب‌های به دست آمده به شرطی مورد قبول‌اند که در معادله اصلی صدق کنند.

$$x + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 2 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 2 - x$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{قابل قبول} \\ x = 2 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

هر دو جواب در معادله اصلی صدق می‌کنند.

۱۸۰. m کدام‌یک از اعداد زیر باشد تا فاصله نقطه $A(-3m, 2m-1)$ از محورهای مختصات به یک اندازه

باشد؟

$$-5 \quad \boxed{4}$$

$$\frac{1}{5} \quad \boxed{3}$$

$$5 \quad \boxed{2}$$

$$-\frac{1}{5} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ فاصله نقطه $A(x, y)$ از محور طول‌ها برابر با $|2m-1|$ و فاصله آن از محور عرض‌ها برابر با $|-3m|$ است پس داریم:



$$\rightarrow \text{فاصله نقطه از دو محور برابر است} \rightarrow |-3m| = |2m - 1| \rightarrow \begin{cases} -3m = 2m - 1 \rightarrow m = \frac{1}{5} \\ -3m = -2m + 1 \rightarrow m = -1 \end{cases}$$

۱۸۱. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت است؟

$$m > 8 \quad \boxed{4} \quad 2 < m < 8 \quad \boxed{3} \quad m < 0 \quad \boxed{2} \quad -1 < m < 0 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > 0$ و $S > 0$ و $P > 0$ باشد.

$$S > 0 \rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow -(m - 2) > 0 \rightarrow m - 2 < 0 \rightarrow m < 2$$

بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند.

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow m + 1 > 0 \rightarrow m > -1 \rightarrow \text{گزینه‌ی دوم حذف می‌شود}$$

بنابراین بدون اینکه شرط $\Delta > 0$ را اعمال کنیم گزینه‌ی اول انتخاب می‌شود.

۱۸۲. خط d و d' بر هم عمودند. خط d محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض $3\sqrt{3}$ قطع کرده است. اگر نقطه $(-\sqrt{3}, -3)$ روی خط d' قرار داشته باشد، عرض نقطه برخورد دو خط کدام است؟

$$\frac{3\sqrt{3} - 8}{4} \quad \boxed{4} \quad \frac{3\sqrt{3} - 6}{4} \quad \boxed{3} \quad \frac{3\sqrt{3} - 4}{4} \quad \boxed{2} \quad \frac{3\sqrt{3} - 2}{4} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ نقطه‌ای به طول ۳ روی محور x ها یعنی: $A(3, 0)$

نقطه‌ای به عرض $3\sqrt{3}$ روی محور y ها یعنی: $B(0, 3\sqrt{3})$



$$\rightarrow m_d = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3\sqrt{3} - 0}{0 - 3} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} \rightarrow \boxed{m_d = -\sqrt{3}}$$

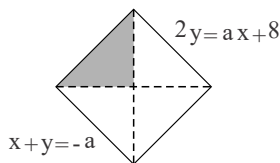
$$\xrightarrow{(3,0) \in d} y - 0 = -\sqrt{3}(x - 3) \rightarrow \boxed{y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}} \leftarrow d \text{ معادله}$$

$$\text{خط } d \text{ و } d' \text{ برهم عمودند} \quad m_{d'} = \frac{-1}{m_d} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{m_{d'} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\xrightarrow{(-\sqrt{3}, -3) \in d'} y - (-3) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - (-\sqrt{3})) \rightarrow y + 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + \sqrt{3})$$

$$\rightarrow y + 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 \rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2} \quad d' \text{ معادله}$$

$$\text{محل برخورد دو خط} : \begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} \\ 3y = \sqrt{3}x - 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} \\ 3y = \sqrt{3}x - 6 \end{cases} \rightarrow \boxed{y = \frac{3\sqrt{3} - 6}{4}}$$



۱۸۳. در مربع شکل زیر، مساحت ناحیه هاشورخورده کدام است؟

$$۱ \quad \boxed{۲}$$

$$۲ \quad \boxed{۱}$$

$$\frac{۱}{۴} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{۱}{۲} \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۳ دو خط $2y = ax + 8$ و $x + y = -a$ دو ضلع روبه‌روی یک مربع هستند و دارای شیب یکسان هستند و فاصله دو خط برابر ضلع مربع است، پس داریم:

$$\begin{cases} x + y + a = 0 \\ ax - 2y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{-2} \neq \frac{a}{8} \rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -2x - 2y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 - (-4)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$S_{\square} = (\sqrt{2})^2 = 2 \rightarrow S_{\text{هاشور خورده}} = \frac{S_{\square}}{4} = \frac{2}{4} \rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}}$$

۱۸۴. فاصله دو خط موازی $y = \frac{a}{6}x + 4$ و $y = -\frac{b}{3}x - 1$ برابر ۳ است. حاصل ab کدام است؟

$$۳۲ \quad \boxed{۴}$$

$$-۳۲ \quad \boxed{۳}$$

$$۱۶ \quad \boxed{۲}$$

$$-۱۶ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ دو خط موازی هستند پس شیب یکسان دارند، یعنی:



$$\frac{a}{6} = -\frac{b}{3} \rightarrow a = -2b$$

فاصله دو خط برابر ۳ است، پس داریم:

$$\frac{a}{6}x - y + 4 = 0, \quad -\frac{b}{3}x - y - 1 = 0$$

$$\rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow 3 = \frac{|4 - (-1)|}{\sqrt{(\frac{a}{6})^2 + (-1)^2}} \rightarrow \sqrt{(\frac{a}{6})^2 + 1} = \frac{5}{3}$$

$$\rightarrow (\frac{a}{6})^2 + 1 = \frac{25}{9} \rightarrow (\frac{a}{6})^2 = \frac{16}{9} \rightarrow (\frac{a}{6})^2 = (\frac{4}{3})^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{6} = \frac{4}{3} \rightarrow a = 8, b = -4 \rightarrow ab = -32 \\ \frac{a}{6} = -\frac{4}{3} \rightarrow a = -8, b = 4 \rightarrow ab = -32 \end{cases}$$

توجه کنید فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می آید.

۱۸۵. اگر دو ضلع مستطیلی بر دو خط به معادلات $4y = 3x - 2$ و $4x + 3y = 6$ قرار داشته باشند و مختصات رأسی از این مستطیل که روی این دو ضلع قرار ندارد، برابر $(3, 3)$ باشد، مساحت این مستطیل کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad \boxed{4}$$

$$3 \quad \boxed{3}$$

$$3\sqrt{3} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{3}{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ دو خط $4y = 3x - 2$ و $4x + 3y = 6$ دارای شیب $\frac{3}{4}$ و $-\frac{4}{3}$ و عمود بر هم هستند. پس فاصله رأس $(3, 3)$ از این دو خط برابر طول و عرض مستطیل است.

$$3x - 4y - 2 = 0 \rightarrow d_1 = \frac{|3(3) - 4(3) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$4x + 3y - 6 = 0 \rightarrow d_2 = \frac{|4(3) + 3(3) - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S = 1 \times 3 = 3 \text{ مساحت مستطیل}$$



۱۸۶. خط $3x = 4y$ بر دایره‌ای به شعاع ۲ واحد که مرکز آن روی خط $x + 2y = 0$ قرار دارد، مماس است. اگر مختصات مرکز دایره $O(a, b)$ باشد، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

۵ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$x + 2y = 0 \rightarrow x = -2y \xrightarrow{\text{نقطه } O(a, b) \text{ روی این خط است.}} O \left| \begin{matrix} -2b \\ b \end{matrix} \right. \quad (1)$$

فاصله نقطه $O \left| \begin{matrix} -2b \\ b \end{matrix} \right.$ از خط $3x - 4y = 0$ برابر شعاع دایره یا ۲ واحد است و داریم:

$$2 = \frac{|3(-2b) - 4(b)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \rightarrow 10 = |10b| \rightarrow b = \pm 1$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 \xrightarrow{(1)} a = -2 \rightarrow a^2 + b^2 = 5 \\ b = -1 \xrightarrow{(1)} a = 2 \rightarrow a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

۱۸۷. اگر $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ، $B(-4, -1)$ و $C(-3, -3)$ ، سه رأس مستطیل $ABCD$ باشند، رأس D مستطیل روی کدام یک از خطوط زیر واقع است؟

$y = 2x - \frac{3}{2}$ (۴)

$y = x + \frac{3}{2}$ (۳)

$6y = 4x - 11$ (۲)

$3y = 4x + 8$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow 1 - 3 = -4 + x_D \rightarrow x_D = 2 \\ y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow \frac{3}{2} - 3 = -1 + y_D \rightarrow y_D = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(2, -\frac{1}{2}\right)$$

اکنون گزینه‌ها را چک می‌کنیم:

گزینه ۱: $3\left(-\frac{1}{2}\right) = 4(2) + 8 \rightarrow -\frac{3}{2} \neq 16$

گزینه ۲: $6\left(-\frac{1}{2}\right) = 4(2) - 11 \rightarrow -3 = -3 \quad \checkmark$

گزینه ۳: $-\frac{1}{2} = 2 + \frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \neq \frac{7}{2}$

گزینه ۴: $-\frac{1}{2} = 2(2) - \frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \neq \frac{5}{2}$



۱۸۸. خط $3x = 4y$ بر دایره‌ای به شعاع ۲ واحد که مرکز آن روی خط $x + 2y = 0$ قرار دارد، مماس است. اگر مختصات مرکز دایره $O(a, b)$ باشد، حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟

۵ (۴)

 $\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

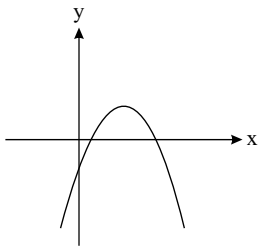
$$x + 2y = 0 \rightarrow x = -2y, \text{ مرکز دایره } O(a, b) \Rightarrow a = -2b \rightarrow O(-2b, b)$$

$$3x = 4y \rightarrow 3x - 4y = 0$$

شعاع دایره = فاصله نقطه $O(-2b, b)$ از خط $(3x - 4y = 0)$

$$\rightarrow 2 = \frac{|3(-2b) - 4(b)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \rightarrow 2 = \frac{|-10b|}{5} \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

$$\rightarrow a = \pm 2 \rightarrow a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$$



۱۸۹. شکل روبه‌رو، نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. کدام گزینه درست است؟

$$ac < 0, ab < 0 \quad (۲)$$

$$ac < 0, ab > 0 \quad (۱)$$

$$ac > 0, ab < 0 \quad (۴)$$

$$ac > 0, ab > 0 \quad (۳)$$

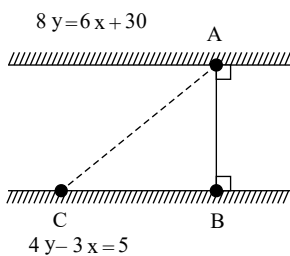
پاسخ: گزینه ۴ دهانه سهمی رو به پایین است یعنی: $a < 0$

سهمی محور y ها را در نقطه‌ای پایین مبدأ مختصات قطع می‌کند، یعنی: $c < 0$

رأس سهمی در ناحیه اول محورهای مختصات است، یعنی: $\frac{-b}{2a} > 0$ و چون $a < 0$ پس: $b > 0$

داریم: $ac > 0, ab < 0$

۱۹۰. شخصی می‌خواهد از نقطه A بالای رودخانه‌ای به نقطه B در پایین رودخانه برود. جریان آب رودخانه، وی را به نقطه C در ۴ کیلومتری نقطه B هدایت می‌کند. نقطه C چقدر از A فاصله دارد؟ (x و y برحسب کیلومتر است).

 $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

۲۰ (۴)

 $4\sqrt{5}$ (۳)

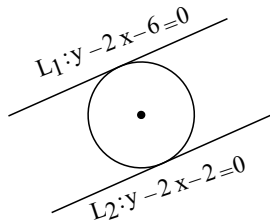
پاسخ: گزینه ۲ ابتدا فاصله دو نقطه A و B را که همان فاصله دو خط موازی $3x - 4y + 5 = 0$ و $3x - 4y + 15 = 0$ است را

به دست می‌آوریم:



$$AB = \frac{|15 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \rightarrow AC^2 = 2^2 + 4^2 \rightarrow AC^2 = 20 \rightarrow AC = 2\sqrt{5}$$



۱۹۱. دایره‌ای مطابق شکل، بر دو خط L_1 و L_2 مماس است. مساحت دایره کدام است؟

$$4\pi \quad \boxed{2}$$

$$\frac{4\pi}{5} \quad \boxed{1}$$

$$\frac{2\pi}{5} \quad \boxed{4}$$

$$5\pi \quad \boxed{3}$$

پاسخ: گزینه ۱ فاصله دو خط L_1 و L_2 برابر قطر دایره است.

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ فاصله دو خط } \frac{|-6 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{شعاع دایره} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S = \pi \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4\pi}{5}$$

۱۹۲. فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

$$(1, 5) \quad \boxed{4}$$

$$(2, 5) \quad \boxed{3}$$

$$(5, -9) \quad \boxed{2}$$

$$(5, -7) \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی از رابطه $x_S = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید و این طول را در تابع قرار می‌دهیم عرض آن به دست می‌آید.

$$-\frac{b}{2a} = -1 \rightarrow 2a = b$$

$$f(-1) = 9 \rightarrow a - b + c = 9 \xrightarrow{b=2a} -a + c = 9$$

$$\left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صنق}} 1 = 9a + 3b + c \xrightarrow{b=2a} 15a + c = 1 \rightarrow \begin{cases} -a + c = 9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$b = -1, c = \frac{17}{2}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$ است که نقطه $\left| \begin{array}{c} 5 \\ -9 \end{array} \right|$ روی این تابع قرار دارد.

۱۹۳. اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + 2x = 16$ ، $y - x = 2$ و $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث در صفحه مختصات کدام است؟

$$6 \quad \boxed{4}$$

$$3\sqrt{3} \quad \boxed{3}$$

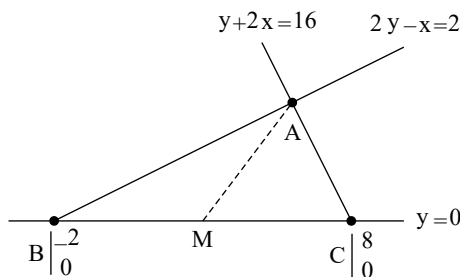
$$5 \quad \boxed{2}$$

$$2\sqrt{5} \quad \boxed{1}$$



پاسخ: گزینه ۲

شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:

خطوط $y + 2x = 16$ و $2y - x = 2$ را تلاقی می‌دهیم تا مختصات نقطه A به دست آید.

$$\times 2 \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \rightarrow 5y = 20 \rightarrow y = 4, x = 6 \rightarrow A \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$BC \text{ وسط } M \begin{vmatrix} \frac{x_B + x_C}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} \end{vmatrix} \rightarrow M \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}, A \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} \rightarrow AM = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

۱۹۴. یکی از اضلاع مربعی برخط $2y + 3x = 1$ واقع است. اگر $A(3, 1)$ یکی از رئوس این مربع باشد، محیط مربع کدام است؟

$$\frac{20\sqrt{13}}{13} \quad \boxed{4}$$

$$80 \quad \boxed{3}$$

$$40 \quad \boxed{2}$$

$$\frac{40\sqrt{13}}{13} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$2y + 3x = 1 \Rightarrow 2y + 3x - 1 = 0$$

$$\text{فاصله } A \text{ از خط داده شده} = \text{طول ضلع مربع} = a \Rightarrow a = \frac{|2 \times 1 + 3 \times 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{محیط مربع} = 4a = \frac{40\sqrt{13}}{13}$$

۱۹۵. خط به معادله $4x - 2y + 8 = 0$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر $M(a, b)$ مختصات نقطه وسط پاره‌خط AB باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

$$3 \quad \boxed{4}$$

$$2 \quad \boxed{3}$$

$$1 \quad \boxed{2}$$

$$\text{صفر} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ فرض می‌کنیم خط $4x - 2y + 8 = 0$ محور x ها را در نقطه A و محور y ها را در نقطه B قطع کند، بنابراین مختصات نقاط A و B عبارت است از:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow -2y + 8 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(0, 4) \\ y = 0 \Rightarrow 4x + 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0) \end{cases}$$



$$AB \text{ وسط پاره خط } = M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 0}{2}, \frac{0 + 4}{2}\right) \Rightarrow M(-1, 2) = M(a, b) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = -1 + 2 = 1$$

۱۹۶. دو ضلع مربعی بر خطوط $4y = 2 - 3x$ و $1 - y = \frac{3x}{4}$ واقع می‌شوند. اندازه قطر مربع کدام است؟

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{5} \quad \boxed{۳}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{5} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱ برای یافتن فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{cases} 4y = 2 - 3x \Rightarrow 4y + 3x - 2 = 0 \\ 1 - y = \frac{3x}{4} \xrightarrow{\times 4} 4 - 4y = 3x \Rightarrow 3x + 4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|-2 - (-4)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

اندازه قطر مربع برابر است با:

$$\text{اندازه قطر} = \sqrt{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

۱۹۷. فاصله نقطه $B(-4, 3)$ از مبدأ مختصات و همچنین از نقطه A واقع بر محور طول‌ها به یک اندازه است. مقادیر ممکن برای طول نقطه A کدام است؟

$$-8 \text{ و } 8 \quad \boxed{۴}$$

$$\text{صفر و } 2 \quad \boxed{۳}$$

$$\text{صفر و } 8 \quad \boxed{۲}$$

$$\text{صفر و } -8 \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱ فاصله نقطه B از مبدأ مختصات و همچنین از نقطه $A(x_A, 0)$ برابر است، بنابراین:

$$OB = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AB = \sqrt{(x_A - (-4))^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{(x_A + 4)^2 + 9} \Rightarrow OB = AB \Rightarrow 5 = \sqrt{(x_A + 4)^2 + 9} \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$

$$25 = (x_A + 4)^2 + 9 \Rightarrow (x_A + 4)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x_A + 4 = 4 \Rightarrow x_A = 0 \\ x_A + 4 = -4 \Rightarrow x_A = -8 \end{cases}$$

۱۹۸. به ازای چند مقدار طبیعی معادله $(m + 6)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

$$\text{بی‌شمار} \quad \boxed{۴}$$

$$5 \quad \boxed{۳}$$

$$2 \quad \boxed{۲}$$

$$\text{صفر} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ شرط این که تابع درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی باشد این است که $\Delta > 0$ باشد، همچنین شرط اینکه تابع درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی مثبت باشد، این است که $P > 0$ و $S > 0$ و باید بین نتایج حاصل از این سه شرط اشتراک بگیریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = 4m^2 - 4(m + 6)(m - 3) = 4m^2 - 4m^2 - 12m + 72 = -12m + 72 > 0 \Rightarrow m < 6$$



$$P > 0 \Rightarrow P = \frac{m-3}{m+6} > 0 \Rightarrow (m < -6) \cup (3 < m)$$

$$S > 0 \Rightarrow S = \frac{2m}{m+6} > 0 \Rightarrow (m < -6) \cup (0 < m)$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{N}} 3 < m < 6 \Rightarrow m = 4, 5$$

۱۹۹. فاصله تمام نقاط روی تابع $y = x^2 - 4x + a$ از محور x ها بیش‌تر از ۵ است. حدود a کدام است؟

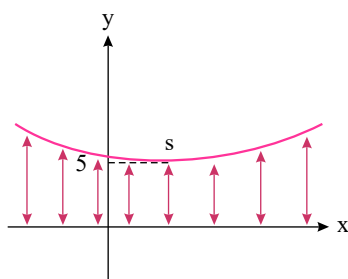
$$a > 9 \quad \boxed{1} \quad a < -2 \quad \boxed{2} \quad -2 < a < 3 \quad \boxed{3} \quad -5 < a < -2 \quad \boxed{4}$$

پاسخ: گزینه ۱

راهنمایی: چون تقعر این تابع روبه بالاست، عرض رأس سهمی بیش‌تر از ۵ است.

ابتدا به شکل زیر دقت کنید:

پس عرض رأس $(-\frac{\Delta}{4a})$ بیش‌تر از ۵ است.



$$-\frac{\Delta}{4a} > 5 \Rightarrow -\frac{16 - 4(1)(a)}{4(1)} > 5 \Rightarrow 4a - 16 > 20 \\ \Rightarrow 4a > 36 \Rightarrow a > 9$$

۲۰۰. محور تقارن سهمی به معادله $y = -x^2 + 6x - k$ سهمی را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع می‌کند. طول

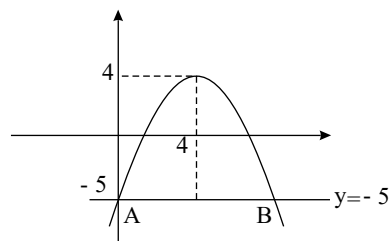
پاره‌خطی که سهمی روی خط $y = -5$ جدا می‌کند، چقدر است؟

$$4 \quad \boxed{1} \quad 5 \quad \boxed{2} \quad 6 \quad \boxed{3} \quad 7 \quad \boxed{4}$$

پاسخ: گزینه ۳ محور تقارن سهمی، آن را در رأس سهمی قطع می‌کند. پس $y = 4$ عرض رأس سهمی است.

$$-\frac{\Delta}{4a} = 4 \Rightarrow -\frac{36 - 4k}{4(-1)} = 4 \Rightarrow 36 - 4k = 16 \Rightarrow 4k = 20 \Rightarrow k = 5$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = -x^2 + 6x - 5$ است که مطابق شکل مقابل در نقاط A و B خط $y = -5$ را قطع می‌کند.



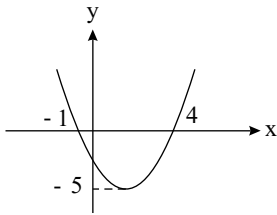
$$-x^2 + 6x - 5 = -5$$

$$x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

بنابراین $AB = 6$ در نتیجه: $x_A = 0$ و $x_B = 6$



۲۰۱. نمودار تابع $f(x) = ax^2 - bx + c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a + b - c$ کدام است؟



$$\frac{12}{5} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{8}{5} \quad \boxed{1}$$

$$\frac{32}{5} \quad \boxed{4}$$

$$\text{صفر} \quad \boxed{3}$$

پاسخ: گزینه ۴ چون $f(-1) = f(4) = 0$ پس ضابطه f را می‌توانیم به صورت $f(x) = k(x+1)(x-4)$ در نظر بگیریم. از طرف دیگر طول رأس سهمی برابر $\frac{3}{2} = \frac{-1+4}{2}$ است و عرض آن برابر -5 است. پس:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -5 \Rightarrow k\left(\frac{3}{2} + 1\right)\left(\frac{3}{2} - 4\right) = -5$$

$$-\frac{25}{4}k = -5 \Rightarrow k = \frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{4}{5}(x+1)(x-4) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{12}{5}x - \frac{16}{5}$$

پس $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{12}{5}$, $c = -\frac{16}{5}$ و در نتیجه:

$$a + b - c = \frac{4}{5} + \frac{12}{5} + \frac{16}{5} = \frac{32}{5}$$

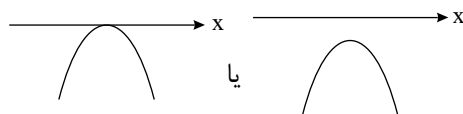
۲۰۲. نمودار تابع $f(x) = (a-2)x^2 - \sqrt{12x} + a$ از ناحیه‌های اول و دوم صفحه مختصات عبور نمی‌کند. مجموعه مقادیر a کدام است؟

$$(-\infty, -1] \cup [3, +\infty) \quad \boxed{2}$$

$$(-\infty, -3] \cup [1, +\infty) \quad \boxed{1}$$

$$(-\infty, -1] \quad \boxed{4}$$

$$(-\infty, +2) \quad \boxed{3}$$



پاسخ: گزینه ۴ نمودار تابع f باید به صورت‌های مقابل باشد:

بنابراین باید ضریب x^2 منفی باشد، یعنی $a < 2$ و $\Delta \leq 0$ (نامثبت) باشد. پس:

$$\Delta = 12 - 4(a-2)a \leq 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 \geq 0 \Rightarrow (a+1)(a-3) \geq 0 \xrightarrow{\text{نقض علامت}} a \leq -1 \text{ یا } a \geq 3$$

$$a \leq -1$$

بنابراین اگر $a \leq -1$ ، آن‌گاه دو شرط بالا برقرار هستند و نمودار تابع f از ناحیه‌های اول و دوم عبور نمی‌کند.

۲۰۳. سهمی $y = mx^2 + (m+1)x - 1$ همواره پایین محور طول‌هاست. به جای m چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟

$$6 \quad \boxed{4}$$

$$5 \quad \boxed{3}$$

$$4 \quad \boxed{2}$$

$$3 \quad \boxed{1}$$



پاسخ: گزینه ۳ برای آنکه سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همواره پایین محور طول‌ها باشد همزمان $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد. داریم:

$$\Delta = (m+1)^2 + 4m = m^2 + 6m + 1 \rightarrow \Delta < 0 \rightarrow m^2 + 6m + 1 < 0$$

$$m^2 + 6m + 1 = 0 \rightarrow m = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow -3 - 2\sqrt{2} < m < -3 + 2\sqrt{2}$$

از طرفی می‌دانیم ضریب x^2 یعنی m نیز باید منفی باشد. بنابراین $m < 0$ بوده و جواب نهایی برای محدوده m برابر است با:

$$(-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}) \cap (-\infty, 0) = (-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2})$$

در بازه موردنظر مقادیر صحیح m برابر است با: $-1, -2, -3, -4, -5$

پس مقدار ۵ صحیح به جای m می‌توان قرار داد.

۲۰۴. اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2mx^2 + 7x + m^2 + 3 = 0$ برابر ۲ باشد. در این صورت مقدار (یا

مقادیر) m کدام است؟

۳ (۲)

۱ (۱)

مقداری برای m وجود ندارد. (۴)

۳ و ۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم ضرب ریشه‌های معادله $2mx^2 + 7x + m^2 + 3 = 0$ برابر ۲ است. بنابراین:

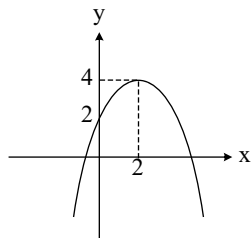
$$\frac{m^2 + 3}{2m} = 2 \rightarrow m^2 + 3 = 4m \rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = 1 & \text{جایگذاری} \\ m = 3 & \text{در معادله} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 32 > 0 \checkmark \\ 6x^2 + 7x + 12 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 288 < 0 \times \end{cases}$$

پس $m = 1$ قابل قبول است.

۲۰۵. نمودار سهمی $y = f(x)$ به صورت زیر است. بزرگترین بازه‌ای که در آن نمودار $y = f(x)$ بالای خط

$2y - x = 0$ قرار می‌گیرد، کدام است؟



(-1, 3) (۲)

(-1, 4) (۱)

$(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۴)

(-2, 3) (۳)

پاسخ: گزینه ۱ چون رأس سهمی $A(2, 4)$ است، پس $y = k(x-2)^2 + 4$ ضابطه سهمی است. اما سهمی از $M(0, 2)$ عبور می‌کند.

به همین جهت $2 = k \times 4 + 4$ و در نتیجه $k = -\frac{1}{2}$ است.

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4$$

حال باید نامعادله $f(x) > \frac{x}{2}$ را حل کنیم:



$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 > \frac{x}{2} \Rightarrow -(x-2)^2 + 8 > x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + x - 8 < 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-4) < 0 \Rightarrow -1 < x < 4$$

بنابراین در بازه $(-1, 4)$ سهمی بالای خط $y = \frac{x}{2}$ است.

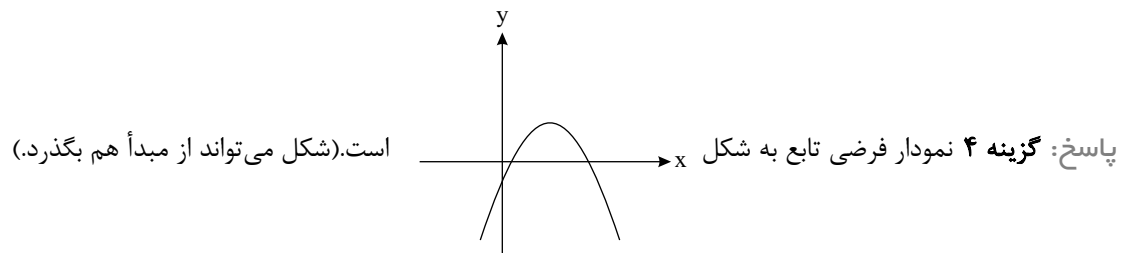
۲۰۶. به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = (2-m)x^2 - 2mx + 1$ فقط از ناحیه دوم نمی‌گذرد؟

$$0 < m < 1 \quad \boxed{2}$$

$$m > 1 \text{ یا } m < -2 \quad \boxed{1}$$

$$\emptyset \quad \boxed{4}$$

$$m > 2 \quad \boxed{3}$$



$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(2-m) > 0 \rightarrow 4m^2 + 4m - 8 > 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 + m - 2 > 0$$

$$\rightarrow (m+2)(m-1) > 0 \rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \text{یا} \\ m < -2 \end{cases} \quad (1)$$

$$a < 0 \rightarrow 2-m < 0 \rightarrow m > 2 \quad (2)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{-(-2m)}{2-m} = \frac{2m}{2-m} > 0 \rightarrow 0 < m < 2 \quad (3)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2-m} > 0 \rightarrow m < 2 \quad (4)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \cap (4) = \emptyset$$

۲۰۷. اتومبیلی مسافت ۱۲۰ کیلومتر را با سرعت ثابت طی کرده است. اگر این اتومبیل سرعت خود را ۱۰ کیلومتر بر ساعت افزایش می‌داد، یک ساعت زودتر این مسافت را طی می‌کرد. سرعت اتومبیل چند کیلومتر در ساعت بوده است؟

$$45 \quad \boxed{4}$$

$$35 \quad \boxed{3}$$

$$40 \quad \boxed{2}$$

$$30 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ فرض می‌کنیم سرعت اتومبیل برابر V کیلومتر در ساعت باشد. در اینجا واحد زمان را ساعت در نظر گرفته‌ایم:

$$\text{زمان حالت اول} = \frac{120}{V}, \quad \text{زمان حالت دوم} = \frac{120}{V+10}$$

طبق صورت سؤال داریم:

$$\frac{120}{V} - \frac{120}{V+10} = 1 \xrightarrow{\times V(V+10)} 120(V+10) - 120V = V(V+10) \Rightarrow V^2 + 10V - 1200 = 0$$

$$\Rightarrow (V-30)(V+40) = 0 \Rightarrow \begin{cases} V = 30 \text{ جواب} \\ V = -40 \text{ غ ق} \end{cases}$$



۲۰۸. اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 2x + 3m = 5$ باشند، به ازای کدام مقدار m رابطه $\frac{\alpha}{4} - 3\beta = 10$ بین ریشه‌های معادله برقرار است؟

$$\frac{-19}{3} \quad \boxed{4}$$

$$-6 \quad \boxed{3}$$

$$6 \quad \boxed{2}$$

$$\frac{19}{3} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$2x^2 - 2x + 3m - 5 = 0$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha}{4} - 3\beta = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 12\beta = 40 \end{cases} \Rightarrow 13\beta = -39 \Rightarrow \beta = -3$$

چون β ریشه معادله است پس در معادله صدق می‌کند:

$$2(-3)^2 - 2(-3) + 3m - 5 = 0 \rightarrow 18 + 6 + 3m - 5 = 0 \rightarrow m = \frac{-19}{3}$$

۲۰۹. نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, 3)$ و $C(2, -3)$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث چقدر است؟

$$4 \quad \boxed{4}$$

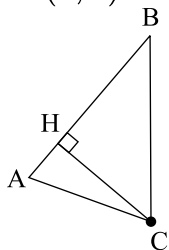
$$8 \quad \boxed{3}$$

$$4\sqrt{5} \quad \boxed{2}$$

$$3\sqrt{5} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا طول پاره خط AB و معادله خط AB را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{matrix} A(-1, -1) \\ B(1, 3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$



$$\left. \begin{matrix} A(-1, -1) \\ B(1, 3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2 \xrightarrow{\text{معادله خط } AB} y = 2x + h \xrightarrow{A(-1, -1)} h = 1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

فاصله نقطه C تا خط AB ، یعنی پاره خط CH ، ارتفاع مثلث ABC است. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{matrix} AB: 2x - y + 1 = 0 \\ C(2, -3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow CH = \frac{|2(2) - (-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

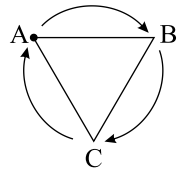
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{8}{\sqrt{5}} = 8$$

راه دوم: نکته: مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} |(x_A y_B - x_B y_A) + (x_B y_C - x_C y_B) + (x_C y_A - x_A y_C)|$$



$$S = \frac{1}{2} |((-3) - (-1)) + ((-3) - (6)) + ((-2) - (3))| = \frac{1}{2} |-16| = 8$$



۲۱۰. معادله $2x^4 - x^2 - 7 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ با فرض $x^2 = t$ داریم:

$$2x^4 - x^2 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow 2t^2 - t - 7 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-7}{2} < 0$$

معادله $2t^2 - t - 7 = 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت دارد. اگر t_1 ریشه منفی و t_2 ریشه مثبت باشد، داریم:

$$x^2 = t_1 < 0 \Rightarrow \text{غیرقابل قبول}$$

$$x^2 = t_2 > 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{t_2}$$

بنابراین معادله ۲ ریشه حقیقی دارد.

۲۱۱. اگر یکی از ریشه‌های معادله $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

-2 (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا با قرار دادن $x = 2$ در معادله داده شده، a را می‌یابیم:

$$x(ax^2 - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4a - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4a - 7 = 1 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله به صورت $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر $x - 2$ آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 5x - 2 \\ -(2x^3 - 4x^2) \\ \hline 3x^2 - 5x - 2 \\ -(3x^2 - 6x) \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2 \\ \hline 2x^2 + 3x + 1 \end{array}$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه دیگر که ریشه‌های معادله درجه دوم داخل پرانتز است، برابر با $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$ می‌شود.



۲۱۲. معادله $\frac{x^2 + ax + 4}{x^2 - 2x - 3} = 0$ فقط یک ریشه دارد. چند مقدار برای a ممکن است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{x^2 + ax + 4}{x^2 - 2x - 3} = 0 \rightarrow x^2 + ax + 4 = 0, \rightarrow x^2 - 2x - 3 \neq 0 \rightarrow (x - 3)(x + 1) \neq 0$$

$$\rightarrow x \neq 3, x \neq -1$$

برای این که معادله یک ریشه داشته باشد، حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- معادله $x^2 + ax + 4 = 0$ یک ریشه داشته باشد، پس باید $\Delta = 0$ باشد و داریم:

$$a^2 - 4(1)(4) = 0 \rightarrow a^2 - 16 = 0 \rightarrow a = \pm 4$$

$$\begin{cases} a = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 = 0 \rightarrow x = -2 \checkmark \\ a = -4 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \checkmark \end{cases}$$

۲- معادله $x^2 + ax + 4 = 0$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x = 3$ باشد و داریم:

$$3^2 + a(3) + 4 = 0 \rightarrow 3a = -13 \rightarrow a = -\frac{13}{3} \rightarrow x^2 - \frac{13}{3}x + 4 = 0$$

$$\rightarrow (x - 3)(x - \frac{4}{3}) = 0 \rightarrow x = 3, x = \frac{4}{3} \rightarrow a = -\frac{13}{3} \text{ قابل قبول است.}$$

۳- معادله $x^2 + ax + 4 = 0$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x = -1$ باشد و داریم:

$$(-1)^2 + a(-1) + 4 = 0 \rightarrow -a + 5 = 0 \rightarrow a = 5 \rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\rightarrow (x + 1)(x + 4) = 0 \rightarrow x = -1, x = -4 \rightarrow a = 5 \text{ قابل قبول است.}$$

۴ مقدار برای a داریم یعنی $\{\pm 4, -\frac{13}{3}, 5\}$

۲۱۳. مجموع مربعات ریشه‌های معادله $(x - 1)^4 + 2x = x^2 + 7$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$(x - 1)^4 + 2x = x^2 + 7 \rightarrow (x - 1)^4 = x^2 - 2x + 1 + 6 \rightarrow (x - 1)^4 = (x - 1)^2 + 6$$

$$(x - 1)^2 = A \rightarrow A^2 = A + 6 \rightarrow A^2 - A - 6 = 0 \rightarrow (A - 3)(A + 2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 3 \rightarrow (x - 1)^2 = 3 \rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \\ A = -2 \rightarrow (x - 1)^2 = -2 \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد.} \end{cases}$$



$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها} = (\sqrt{3} + 1)^2 + (-\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} = 8$$

۲۱۴. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ ، دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

☐ ۱ $m \geq 1$
 ☐ ۲ $m < 2$
 ☐ ۳ $1 \leq m < 2$
 ☐ ۴ هیچ مقدار m

پاسخ: گزینه ۳

برای حل معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ از روش تغییر متغیر بهره می‌گیریم. اگر به‌جای عبارت $\sqrt{x}$ ، t قرار دهیم، داریم:

$$(\sqrt{x})^2 - 2(\sqrt{x}) + m - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 2t + m - 1 = 0$$

برای اینکه معادله داده‌شده در تست، دو جواب متمایز برای x داشته باشد، باید در معادله $t^2 - 2t + m - 1 = 0$ یکی از حالات زیر اتفاق بیفتد:

۱- دارای دو ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد، برای این منظور داریم:

$$\text{شرط وجود دو ریشه مثبت} \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m-1) > 0 \Rightarrow 8 - 4m > 0 \Rightarrow m < 2 \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1} > 0 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \\ -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{-2}{1} > 0 \Rightarrow 2 > 0 \text{ برقرار است} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < m < 2$$

۲- دارای یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت باشد. برای این منظور باید $c = 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ باشد. داریم:

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

حال از اجتماع مقادیر به‌دست‌آمده در (۱) و (۲)، حدود m برابر است با: $1 \leq m < 2$

۲۱۵. در معادله درجه دوم $x^2 + 2x - 4 = 0$ حاصل $x_1^3 - 2x_1^2 + 4x_1$ کدام است؟ x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم هستند.

☐ ۱ -16
 ☐ ۲ 0
 ☐ ۳ 16
 ☐ ۴ -32

پاسخ: گزینه ۴

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -4$$

$$x_1 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1^2 = -2x_1 + 4$$

$$\Rightarrow x_1^3 = -2x_1^2 + 4x_1$$

در عبارت خواسته‌شده به جای x_1^3 عبارت معادل را قرار می‌دهیم:

$$x_1^3 - 2x_1^2 + 4x_1 = -2x_1^2 + 4x_1 - 2x_1^2 + 4x_1 = -2(x_1^2 + x_1^2) + 4(x_1 + x_1)$$

$$= -2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 4(x_1 + x_2) = -2(4 + 8) + 4(-2) = -32$$



۲۱۶. اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور x ها را در دو نقطه، به طول های -۱ و ۳ قطع کند، آن گاه این سهمی محور y ها را در نقطه ای با کدام عرض قطع می کند؟

- ☐ ۱ $\frac{۳}{۴}$
 ☐ ۲ $-\frac{۳}{۴}$
 ☐ ۳ ۳
 ☐ ۴ -۳

پاسخ: گزینه ۱ رأس سهمی روی نیمساز ربع اول $(y = x)$ قرار دارد، بنابراین مختصات آن به صورت $S \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$ است و چون سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول -۱ و ۳ قطع کرده است، طول رأس سهمی دقیقاً وسط -۱ و ۳ است.

$$x_S = \frac{-۱ + ۳}{۲} = ۱ \rightarrow S \begin{vmatrix} ۱ \\ ۱ \end{vmatrix}$$

$$y = a(x - ۳)(x + ۱) \xrightarrow{x=۱} ۱ = a(-۲)(۲) \rightarrow -۴a = ۱ \rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

صدق

$$y = \frac{-۱}{۴}(x - ۳)(x + ۱) \xrightarrow{x=۰} y = \frac{-۱}{۴}(-۳)(۱) = \frac{۳}{۴}$$

توجه کنید اگر یک سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول های x_1 و x_2 قطع کند، می توان معادله آن را به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ نشان داد.

۲۱۷. اگر مجموعه جواب معادله $\frac{m+۱}{۳x} = \frac{۵-x}{۴x-x^2}$ تهی باشد، مقدار m برابر کدام گزینه می تواند باشد؟

- ☐ ۱ صفر
 ☐ ۲ ۱
 ☐ ۳ $\frac{۱۱}{۴}$
 ☐ ۴ $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{m+۱}{۳x} = \frac{۵-x}{۴x-x^2} \rightarrow \frac{m+۱}{۳x} = \frac{x-۵}{x(x-۴)}$$

$$\rightarrow (m+۱)(x-۴) = ۳(x-۵) \rightarrow (m+۱)x - ۴m - ۴ = ۳x - ۱۵$$

$$\rightarrow (m-۲)x = ۴m - ۱۱ \rightarrow x = \frac{۴m-۱۱}{m-۲}$$

از آنجایی که $x = ۰$ و $x = ۴$ مخرج معادله را صفر می کنند، اگر جواب به دست آمده یکی از این اعداد باشد معادله جواب ندارد. پس داریم:

$$x = ۰ \rightarrow ۴m - ۱۱ = ۰ \rightarrow m = \frac{۱۱}{۴}$$

$$x = ۴ \rightarrow \frac{۴m-۱۱}{m-۲} = ۴ \rightarrow ۴m - ۱۱ = ۴m - ۸ \rightarrow -۱۱ = -۸ \rightarrow \text{غیر ممکن}$$

همچنین اگر $m - ۲ = ۰$ باشد، معادله ریشه ندارد، یعنی در حالت $m = ۲$ نیز ریشه وجود ندارد.

۲۱۸. به ازای چند مقدار صحیح a ، تابع درجه ی دوم $y = ax^2 + ۲(a+۲)x + ۲a+۷$ محور x ها را حداقل در یک نقطه قطع می کند؟

- ☐ ۱ ۵
 ☐ ۲ ۶
 ☐ ۳ ۴
 ☐ ۴ بی شمار



پاسخ: گزینه ۱ از آنجا که سهمی، محور x ها را حداقل در یک نقطه قطع می کند، لذا معادله $y = 0$ حداقل یک جواب دارد. لذا $\Delta \geq 0$.
در نتیجه داریم:

$$y = ax^2 + 2(a+2)x + 2a + 7, \Delta \geq 0$$

$$\Delta = 4(a+2)^2 - 4(a)(2a+7) = 4(a^2 + 4a + 4 - 2a^2 - 7a) = 4(-a^2 - 3a + 4) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 3a - 4 \leq 0 \Rightarrow (a-1)(a+4) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq a \leq 1$$

بنابراین مقادیر صحیح قابل قبول برای a برابر است با:

$$a = -4, -3, -2, -1, 1 \Rightarrow 5 \text{ مقدار صحیح}$$

$a = 0$ قابل قبول نیست زیرا در این صورت تابع، به صورت خط در می آید و دیگر سهمی نیست.

۲۱۹. ضلع یک مثلث به مساحت ۶ بر خط به معادله $2y + x = 3$ واقع و یک رأس آن نقطه $(-1, 0)$ است.

اگر ضلع دیگر این مثلث بر محور x ها منطبق باشد، طول میانه وارد بر این ضلع چه قدر است؟

$$\textcircled{4} \quad 5$$

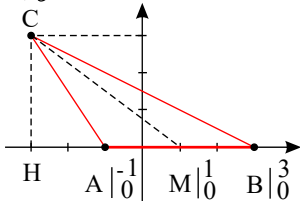
$$\textcircled{3} \quad 3\sqrt{3}$$

$$\textcircled{2} \quad 6$$

$$\textcircled{1} \quad 4\sqrt{2}$$

پاسخ: گزینه ۴ اگر خط به معادله $2y + x = 3$ را با محور x ها تلاقی دهیم، مختصات رأس دیگر مثلث به دست می آید.

$$\begin{cases} 2y + x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3$$



بنابراین نقاط $A(-1, 0)$ و $B(3, 0)$ دو رأس این مثلث هستند.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{CH \times AB}{2} \rightarrow 6 = \frac{CH \times 4}{2} \rightarrow CH = 3$$

اندازه پاره خط CH برابر ۳ می باشد، بنابراین عرض رأس C برابر ۳ است.

$$\begin{cases} 2y + x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow x = -3 \rightarrow C(-3, 3)$$

$$CM = \sqrt{(-3-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

۲۲۰. در معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ درجهی دوم اگر α, β ریشه های معادله باشند، حاصل

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 \text{ چقدر است؟}$$

$$\textcircled{4} \quad 24$$

$$\textcircled{3} \quad 16$$

$$\textcircled{2} \quad 12$$

$$\textcircled{1} \quad 48$$

پاسخ: گزینه ۱

می دانیم که $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -4$ است.

α ریشه ی معادله است پس در معادله، صدق می کند.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق}} \alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha$$

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 = (2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) = 4((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = 4(4 + 8) = 48$$



۲۲۱. اگر عبارت $y = ax(x+1) + 1$ همواره مثبت باشد، به جای a چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟

۴ صفر

۳ ۲

۲ ۴

۱ ۳

پاسخ: گزینه ۲ برای آن که عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت یا بالای محور x ها باشد، باید دو شرط زیر همواره برقرار باشد:

$$1) \Delta < 0 \quad 2) a > 0$$

ابتدا عبارت داده شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$y = ax(x+1) + 1 \Rightarrow y = ax^2 + ax + 1$$

حال برای آن که عبارت درجه دوم همواره مثبت باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow a(a-4) < 0 \Rightarrow 0 < a < 4 \\ a > 0 \Rightarrow a > 0 \end{cases}$$

اشتراک دو شرط فوق برابر $0 < a < 4$ می‌شود. اما صبر کنید در صورت سؤال نگفته عبارت حتماً باید درجه دوم باشد. به عبارت دیگر اگر $a = 0$ باشد نیز عبارت $y = ax^2 + ax + 1$ برابر عدد مثبت یک خواهد شد. پس $a = 0$ نیز درست است:

$$y = ax^2 + ax + 1 \xrightarrow{a=0} y = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$(0 < a < 4) \cup \{0\} = 0 \leq a < 4$$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای a برابر است با:

که در بازه فوق چهار عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ موجود است.

۲۲۲. اگر ریشه‌های معادله $9x^2 + ax + b = 0$ از مربع معکوس ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 9 = 0$ دو واحد کمتر باشد، a کدام است؟

۱۷ ۴

۴۲ ۳

۳۱ ۲

۲۰ ۱

پاسخ: گزینه ۲

کافی است ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 9 = 0$ را به دست آوریم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(-9) = 9 + 72 = 81 \rightarrow x_1, x_2 = \frac{3 \pm 9}{4} = 3, -\frac{3}{2}$$

$$x'_1 = \frac{1}{x_1} - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{17}{9} \quad \text{و} \quad x'_2 = \frac{1}{x_2} - 2 = \frac{1}{-\frac{3}{2}} - 2 = -\frac{4}{3} - 2 = -\frac{14}{3}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \left(-\frac{17}{9} - \frac{14}{3}\right)x + \underbrace{\left(-\frac{17}{9}\right)\left(-\frac{14}{3}\right)}_P = 0 \rightarrow x^2 + \frac{31}{9}x + P = 0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 9x^2 + 31x + 9P = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با } 9x^2 + ax + b = 0} a = 31$$

۲۲۳. دو خط به معادله $my - x = -7$ و $m^3x + y = 2$ بر دو ضلع مربع منطبق‌اند. در این صورت برای m چند جواب وجود دارد؟

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

۱ صفر

پاسخ: گزینه ۴ این دو خط ممکن دو ضلع موازی یا هر ضلع عمود بر هم باشند، لذا باید هر دو حالت را بررسی نماییم.



حالت اول: دو ضلع موازی باشند، در این حالت شیب دو خط برابر است. خطوط را به حالت استاندارد می‌نویسیم:

$$my - x = -7 \rightarrow y = \frac{1}{m}x - \frac{7}{m} \rightarrow m_1 = \frac{1}{m}$$

$$m^3x + y = 2 \rightarrow y = -m^3x + 2 \rightarrow m_2 = -m^3$$

غیر ممکن $\frac{1}{m} = -m^3 \rightarrow m^4 = -1$ شرط موازی بودن

پس دو ضلع موازی نیستند.

حالت دوم: دو خط بر هم عمود باشد که حاصلضرب با شیب‌ها -1 خواهد بود.

$$\frac{1}{m} \times -(m^3) = -1 \xrightarrow{m \neq 0} m^3 = m \rightarrow m^3 - m = 0$$

$$m(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

اگر $m = 0$ در این صورت نیز دو خط عمود بر هم می‌باشد، بنابراین $m = 0$ نیز جواب می‌باشد پس معادله ۳ جواب دارد.

۲۲۴. مجموع مقادیر m به طوری که به ازای آن‌ها دو خط $mx + (m+1)y = 3$ و $(m^2-1)x + m(m+2)y = 4$ بر هم عمود باشند، کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) (۴) صفر



پاسخ: گزینه ۳

$$d_1 : mx + (m+1)y = 3 \rightarrow m_1 = -\frac{m}{m+1}$$

$$d_2 : (m^2-1)x + m(m+2)y = 4 \rightarrow m_2 = -\frac{m^2-1}{m(m+2)}$$

$$\cdot \text{ دو خط بر هم عمود} \rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \frac{-m}{m+1} \times \frac{-(m^2-1)}{m(m+2)} = -1$$

$$\rightarrow \frac{m}{(m+1)} \cdot \frac{(m+1)(m-1)}{m(m+2)} = -1 \xrightarrow{m \neq 0, -1, -2} \frac{m-1}{m+2} = -1$$

$$m-1 = -m-2 \rightarrow 2m = -1 \rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

$$m = 0 \rightarrow \begin{cases} d_1 : y = 3 \\ d_2 : x = -4 \end{cases} \cdot \text{ دو خط بر هم عمودند} \rightarrow \boxed{m = 0}$$

$$m = -1 \rightarrow \begin{cases} d_1 : x = -3 \\ d_2 : y = -4 \end{cases} \cdot \text{ دو خط بر هم عمودند} \rightarrow \boxed{m = -1}$$

$$m = -2 \rightarrow \begin{cases} d_1 : -2x - y = 3 \\ d_2 : 3x = 4 \end{cases} \cdot \text{ دو خط بر هم عمود نیستند}$$

$$m \text{ مجموع مقادیر} = -\frac{1}{2} + 0 + (-1) = -\frac{3}{2}$$

۲۲۵. دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی $A(1, 7)$ و $C(-4, 19)$ هستند. در صورتی که زاویه بین دو قطر مستطیل 30° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

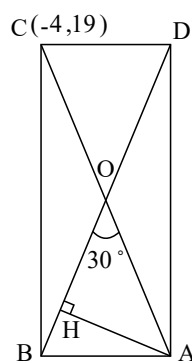
$$\frac{169}{2} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{169\sqrt{3}}{4} \quad \boxed{3}$$

$$169 \quad \boxed{2}$$

$$\frac{169}{4} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا طول قطر AC را به دست می آوریم:



$$\rightarrow AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1 - (-4))^2 + (7 - 19)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} \rightarrow AC = 13$$

و چون در مستطیل قطرها همدیگر را نصف می کنند داریم:



$$OA = OC = OB = OD = \frac{13}{2}$$

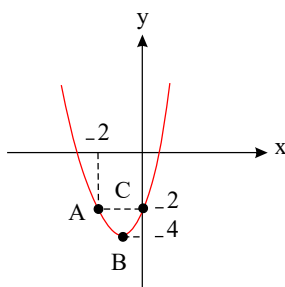
قطرهای مستطیل، مستطیل را به چهار مثلث هم مساحت تقسیم می کنند پس داریم:

$$S_{ABCD} = 4S_{OAB} \rightarrow S_{ABCD} = 4\left(\frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin 30^\circ\right) = 4\left(\frac{1}{2} \times \frac{13}{2} \times \frac{13}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{169}{4}$$

توجه کنید مساحت هر مثلث را می توان از نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن ها به دست آورد.

۲۲۶. نمودار تابع درجه ی دوم $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. مجموع مربعات ریشه های معادله ی

$f(x) = 0$ کدام است؟



۶ (۲)

۵ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

پاسخ: گزینه ۲ طول نقطه ی B یا همان رأس سهمی، میانگین طول های دو نقطه ی هم عرض A و C است.

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1$$

و توجه کنید صورت کلی یک تابع درجه ی دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است.

$$\left. \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{l} -2 \\ -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} \begin{array}{l} -2 = 4a - 2b + c \\ -2 = a - b + c \end{array} \\ B \left| \begin{array}{l} -1 \\ -4 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} \begin{array}{l} -4 = a - b + c \\ -2 = c \end{array} \end{array} \right\} \xrightarrow{c=-2} \begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ a - b = -2 \end{cases} \rightarrow a = 2, b = 4$$

$$C \left| \begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} \begin{array}{l} -2 = c \\ -2 = c \end{array}$$

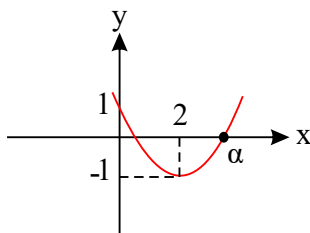
بنابراین تابع درجه ی دوم به صورت $y = 2x^2 + 4x - 2$ است. برای بدست آوردن مجموع مربعات ریشه های معادله ی

$$2x^2 + 4x - 2 = 0 \text{ بدین صورت عمل می کنیم.}$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = -1$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه ها: } x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 4 - 2(-1) = 6$$

۲۲۷. باتوجه به شکل روبه رو که نمودار یک تابع درجه ی دو را نشان می دهد. مقدار α کدام است؟



۵ (۲)

۳ (۱)

۴ + √۲ (۴)

۲ + √۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ صورت کلی یک تابع درجه ی دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می باشد و نقطه ی رأس سهمی است که در تابع



صدق می‌کند و طولش از رابطه‌ی $x_s = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید در ضمن نقطه‌ی $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ نیز روی تابع قرار دارد پس در تابع صدق می‌کند.

$$x_s = \frac{-b}{2a} \rightarrow 2 = \frac{-b}{2a} \rightarrow 4a = -b \text{ و } \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -1 = 4a + 2b + c \text{ و } \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = c$$

$$-1 = 4a + 2b + c \xrightarrow[c=1]{4a=-b} -1 = -b + 2b + 1 \rightarrow b = -2, a = \frac{1}{2}$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ است و با توجه به شکل، $x = \alpha$ ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $y = 0$ است.

$$y = 0 \xrightarrow{\times 2} x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8$$

$$\text{ریشه‌ی بزرگتر} = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

۲۲۸. اگر $A(-4, -1)$ و $B(-2, -3)$ دو رأس غیرمجاور یک مربع باشند که مرکز آن روی خط

$$my + (m - 2)x = 1 \text{ قرار داشته باشد، مساحت مربع چند برابر } m \text{ است؟}$$

$$2\sqrt{2} \quad \boxed{4} \qquad \sqrt{2} \quad \boxed{3} \qquad 4 \quad \boxed{2} \qquad 2 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ چون $A(-4, -1)$ و $B(-2, -3)$ دو رأس غیرمجاور یک مربع هستند پس طول پاره خط AB برابر قطر مربع است و مرکز مربع (نقطه M و وسط قطرها) روی خط $my + (m - 2)x = 1$ قرار دارد.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-4 + 2)^2 + (-1 + 3)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$$\rightarrow AB = 2\sqrt{2} \rightarrow \text{قطر مربع } d = 2\sqrt{2} \rightarrow S = \frac{d^2}{2} = \frac{(\sqrt{8})^2}{2} = \frac{8}{2} \rightarrow S = 4$$

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4 - 2}{2} = -3 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \end{cases} \rightarrow M(-3, -2) \xrightarrow{my + (m-2)x=1} -2m - 3m + 6 = 1 \rightarrow m = 1$$

پس $\frac{S}{m} = 4$ است.

۲۲۹. اگر $x^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\sqrt[4]{5^3\sqrt{5}}\right)^{\frac{3}{2}}$ باشد، x کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad \boxed{4} \qquad 1 \quad \boxed{3} \qquad (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \quad \boxed{2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ هر یک از پرانتزها را جداگانه ساده می‌کنیم.

$$\left(\sqrt[4]{5^3\sqrt{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[4]{5 \times 5^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[4]{5^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(5^{\frac{15}{8}}\right)^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{45}{16}} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \underbrace{|\sqrt{5} - 1|}_{+} = \sqrt{5} - 1$$



$$\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1) = x^{\sqrt{2}} \rightarrow 1 = x^{\sqrt{2}} \rightarrow x = 1$$

۲۳۰. اگر معادله‌ی $x^4 - (m+2)x^2 + m+5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

$$m < -4 \quad (1) \quad m > 4 \quad (2) \quad -4 < m < 4 \quad (3) \quad 4 < m < 9 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - (m+2)t + m+5 = 0$$

این معادله باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 + 4 + 4m - 4m - 2 > 0 \\ m+5 > 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 > 16 \\ m > -5 \\ m > -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \begin{cases} m > 4, m < -4 \\ m > -5 \\ m > -2 \end{cases} \rightarrow m > 4$$

۲۳۱. به ازای چه حدودی از a ، نمودار تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 - (a-4)x + \frac{9}{4}$ فقط از ناحیه‌ی چهارم

محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

$$-1 < a < 0 \quad (1) \quad -2 < a < -1 \quad (2) \quad 1 < a < 2 \quad (3) \quad 0 < a < 1 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، برای این که نمودار فقط از ناحیه‌ی چهارم نگذرد باید حالت مقابل رخ دهد، با توجه به این حالت:

$$f(0) = \frac{9}{4} \Rightarrow \text{تابع بالای مبدأ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.}$$

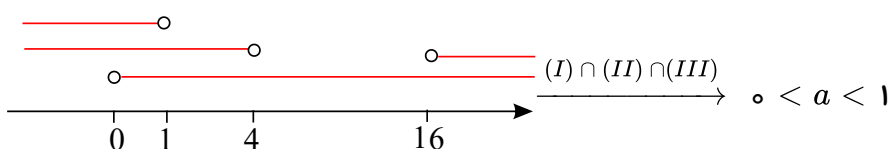
$$a > 0 \quad (I) \Rightarrow \text{تابع باید مینیمم داشته باشد.}$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} a-4 < 0 \Rightarrow a < 4 \quad (II)$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \xrightarrow{a>0} c > 0 \Rightarrow \frac{9}{4} > 0 \text{ همواره برقرار است}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \Delta = (a-4)^2 - 9a = a^2 - 17a + 16 > 0$$

$$(a-1)(a-16) > 0 \Rightarrow a < 1 \text{ یا } a > 16 \quad (III)$$



۲۳۲. می‌دانیم خط $y = -3$ ، محور تقارن مشترک دو سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ و

$g(x) = -x^2 + 4x - 7$ را روی خود سهمی‌ها قطع می‌کند. اگر سهمی $f(x)$ روی محور طول‌ها، پاره‌خطی به طول ۵ جدا کرده باشد، مقدار a کدام است؟ ($a > 0$)

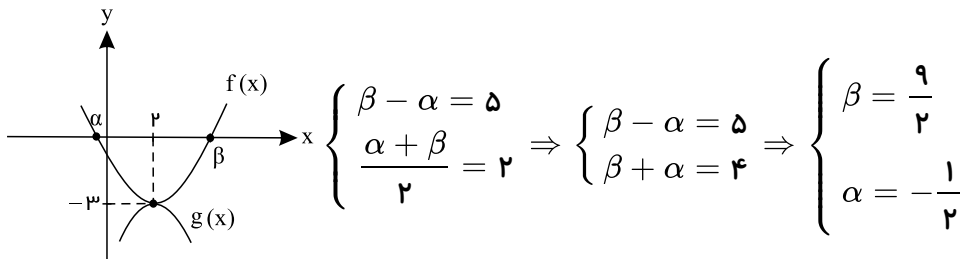
$$\frac{12}{25} \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad -\frac{12}{25} \quad (3) \quad -\frac{48}{25} \quad (4)$$



پاسخ: گزینه ۱ خط $y = -3$ محور تقارن مشترک هر دو سهمی را روی آنها قطع می‌کند پس $y = -3$ از رأس هر دو سهمی گذشته و با توجه به اینکه محور تقارن سهمی‌ها مشترک است، پس رأس‌های هر دو سهمی بر هم منطبق بوده یعنی هر دو سهمی در رأس‌هایشان بر هم مماس هستند. با توجه به ضابطه سهمی $g(x) = -x^2 + 4x - 7$ مختصات رأس آن برابر است با:

$$S_{g(x)} = S_{f(x)} \Rightarrow S_{g(x)} \left| \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \\ -3 \end{array} \right. \Rightarrow S_{f(x)} = \left| \begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array} \right.$$

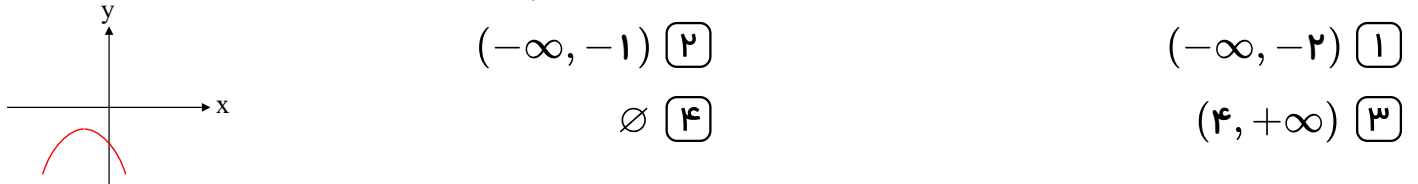
با توجه به مسئله، شکل زیر را رسم می‌کنیم و طول پاره‌خطی که سهمی $f(x)$ روی محور طول‌ها جدا می‌کند، برابر تفاضل ریشه‌های سهمی است. از طرفی طول رأس سهمی برابر میانگین ریشه‌های سهمی است. داریم:



با در نظر گرفتن ضابطه سهمی به صورت $f(x) = a(x + \frac{1}{2})(x - \frac{9}{2})$ و جایگذاری رأس سهمی در آن داریم:

$$-3 = a(2 + \frac{1}{2})(2 - \frac{9}{2}) \Rightarrow -3 = a \times \frac{5}{2} \times (-\frac{5}{2}) \Rightarrow a = \frac{12}{25}$$

۲۳۳. به ازای چه حدودی از m ، نمودار تابع با ضابطه $y = mx^2 + 4\sqrt{2}x + m - 2$ به صورت مقابل است؟



پاسخ: گزینه ۴

$$Max \rightarrow x^2 \text{ ضریب } < 0 \rightarrow m < 0 : I$$

$$\Delta < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow 32 - 4m(m - 2) < 0 \rightarrow 32 - 4m^2 + 8m < 0$$

$$\rightarrow 4m^2 - 8m - 32 > 0 \rightarrow m^2 - 2m - 8 > 0 \rightarrow (m - 4)(m + 2) > 0$$

تعیین علامت

$$\rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 4 : II$$

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $\frac{-b}{2a}$ منفی می‌باشد.

$$\frac{-b}{2a} < 0 \rightarrow \frac{-4\sqrt{2}}{2m} < 0 \rightarrow m > 0 : III$$

که اشتراک جواب‌های I و II و III تهی می‌باشد.



۲۳۴. اگر α, β جواب‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ بوده و داشته باشیم $P = \alpha\beta$ و $S = \alpha + \beta$ به ازای کدام مقدار k جواب‌های معادله $25x^2 - 5kx - 1 = 0$ برابر $\frac{\beta}{3S + 4P}$ ، $\frac{\alpha}{2S + P}$ است؟

- ۱) -1 ۲) 3 ۳) -3 ۴) 1

پاسخ: گزینه ۲ برای تشکیل معادله جدید به حاصل جمع (S') و حاصل ضرب (P') نیاز داریم؛ بنابراین:

$$S' = \frac{\alpha}{2S + P} + \frac{\beta}{3S + 4P} \xrightarrow{S = -\frac{b}{a} = 3, P = \frac{c}{a} = -1} \frac{\alpha}{2(3) - 1} + \frac{\beta}{3(3) + 4(-1)} = \frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha + \beta}{5} = \frac{S}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P' = \frac{\alpha}{2S + P} \times \frac{\beta}{3S + 4P} = \frac{\alpha}{5} \times \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha\beta}{25} = \frac{P}{25} = \frac{-1}{25}$$

حال با داشتن (S') و (P') معادله جدید را می‌نویسیم:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{25} = 0 \xrightarrow{\times 25} 25x^2 - 15x - 1 = 0$$

با مقایسه معادله حاصل با معادله $25x^2 - 5kx - 1 = 0$ داریم:

$$-5k = -15 \rightarrow k = 3$$

۲۳۵. اگر جواب‌های معادله $x^2 + mx + m = 0$ برابر باشند، مجموع جواب‌های حقیقی معادله $(m - 3)x^2 - (m + 2)x + 2 = 0$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) -4 ۲) -6 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ جواب‌های معادله برابرند یعنی معادله مضاعف دارد، پس:

$$x^2 + mx + m = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4m = 0 \rightarrow m(m - 4) = 0 \rightarrow m = 0, m = 4$$

حال معادله $(m - 3)x^2 - (m + 2)x + 2 = 0$ را به ازای $m = 0$ ، $m = 4$ بررسی می‌کنیم

$$m = 0 \rightarrow -3x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4(-3) \times 2 = 4 + 24 > 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$m = 4 \rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 36 - 8 > 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$$

۲۳۶. معادله $\sqrt{x + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 8}} = x + 2$ چند جواب دارد؟

- ۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 0

پاسخ: گزینه ۱ شرط اولیه جواب آن است که زیر رادیکال‌ها بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$-x^3 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0 \rightarrow x^3 - 4x^2 - 25x + 100 \leq 0$$

$$\rightarrow x^2(x - 4) - 25(x - 4) \leq 0 \rightarrow (x - 4)(x^2 - 25) \leq 0$$



$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & -5 & & 4 & & 5 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} \leq 0 & & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow x \leq -5 \text{ یا } 4 \leq x \leq 5 \quad (I)$$

$$-x^2 + 6x - 8 \geq 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0 \rightarrow (x - 4)(x - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccccccc} x & -\infty & & 2 & & 4 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} \leq 0 & & + & 0 & - & 0 & + & & \end{array} \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \quad (II)$$

تنها اشتراک بین I , II عدد $x = 4$ است که در معادله هم صدق می کند (امتحان کنید)، پس معادله فقط یک جواب دارد.

۲۳۷. محور تقارن سهمی $y = x^2 + 4x + k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض (-2) قطع می کند. طول پاره خطی که سهمی روی محور x ها ایجاد می کند، کدام است؟

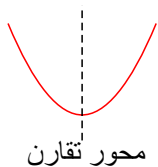
$$4\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$4\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

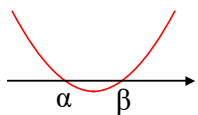


مطابق شکل مقابل محور تقارن یک سهمی، سهمی را در نقطه‌ی رأس سهمی قطع می کند. از آنجا که

$$x = -\frac{b}{2a} = -2 \text{ محور تقارن سهمی است و سهمی را در نقطه‌ای به عرض } y = -2 \text{ قطع کرده، بنابراین نقطه‌ی}$$

$(-2, -2)$ روی منحنی است، در نتیجه در تابع صدق می کند.

$$-2 = (-2)^2 + 4(-2) + k \Rightarrow k = 2$$



پس معادله‌ی تابع به صورت $y = x^2 + 4x + 2$ است. همچنین با توجه به شکل مقابل، طول پاره خطی که منحنی

روی محور x ها ایجاد می کند برابر قدرمطلق تفاضل ریشه‌های تابع است. یعنی:

$$\text{طول پاره خط} = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16 - 4(2)}}{|1|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۲۳۸. تابع $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2mx - m - 1)$ محور طول‌ها را در سه نقطه قطع می کند. اگر مجموع

مربعات طول نقاط تلاقی تابع $f(x)$ با محور x ها برابر ۹ باشد، قدرمطلق تفاضل مقادیر ممکن برای m کدام است؟

$$\frac{9}{2} \quad (4)$$

$$\frac{7}{2} \quad (3)$$

$$\frac{5}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ برای به دست آوردن طول نقاط تلاقی باید معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم:

$$(x - 1)(x^2 - 2mx - m - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2mx - m - 1 = 0 \end{cases}$$

یک ریشه معادله $x = 1$ است و اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$ را α و β بنامیم، با توجه به صورت مسئله

داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1^2 = 9 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 8 \rightarrow S^2 - 2p = 8$$



$$\begin{aligned} S &= 2m \\ P &= -m-1 \end{aligned} \rightarrow (2m)^2 - 2(-m-1) = 8 \rightarrow 4m^2 + 2m + 2 = 8$$

$$\rightarrow 4m^2 + m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -\frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow |m_1 - m_2| = \frac{5}{4}$$

۲۳۹. اگر قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادله $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = ax(1 - \frac{x-1}{x+1})$ برابر ۲ باشد، آنگاه a کدام می‌تواند باشد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

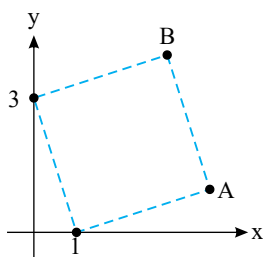
-۱ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ در طرف چپ و راست مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} &= ax \left(\frac{x+1 - (x-1)}{x+1} \right) \Rightarrow \frac{-4x}{(x+1)(x-1)} = ax \left(\frac{2}{x+1} \right) \\ \Rightarrow \frac{2ax}{x+1} + \frac{4x}{(x+1)(x-1)} &= 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{2x}{x+1}}_{\text{فاکتور}} \left(a + \frac{2}{x-1} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ a + \frac{2}{x-1} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x-1} = -a \Rightarrow \frac{2}{-a} = x-1 \Rightarrow x = 1 - \frac{2}{a} \end{cases} \\ \Rightarrow \text{قدرمطلق تفاضل جواب‌ها} = \left| 1 - \frac{2}{a} - 0 \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{2}{a} = 2 \rightarrow \frac{2}{a} = -1 \rightarrow a = -2 \\ 1 - \frac{2}{a} = -2 \rightarrow \frac{2}{a} = 3 \rightarrow a = \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$



۲۴۰. اگر چهارضلعی مشخص شده مربع باشد، جمع طول و عرض نقطه B کدام است؟

۸ (۲)

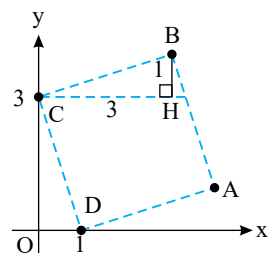
۷ (۱)

۹ (۴)

۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۱ راه‌حل اول: اگر مختصات B را به شکل $B(x, y)$ در نظر بگیریم، شیب BC معکوس و قرینه شیب CD است:

$$m_{CD} = -3 \Rightarrow m_{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y-3}{x-0} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3y-9=x \Rightarrow 3y-x=9$$





ضمناً فاصله B از خط CD برابر طول ضلع مربع است. طول ضلع مربع از رابطه فیثاغورس در مثلث OCD برابر $\sqrt{10}$ است، پس:

$$CD : y = -3x + 3 \Rightarrow y + 3x - 3 = 0 \Rightarrow BC = \frac{|y + 3x - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10} \Rightarrow |y + 3x - 3| = 10$$

با حل این دو معادله داریم:

$$\begin{cases} 3y - x = 9 \Rightarrow x = 3y - 9 (*) \\ |y + 3x - 3| = 10 \xrightarrow{(*)} |y + 3(3y - 9) - 3| = 10 \Rightarrow |10y - 30| = 10 \Rightarrow |y - 3| = 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} y - 3 = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow x + y = 7 \\ y - 3 = -1 \Rightarrow y = 2 \text{ غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

راه حل دوم: اگر از C خطی موازی محور x ها و از B خطی موازی محور y ها رسم کنیم تا همدیگر را در نقطه H قطع کنند، مثلث های OCD و BCH هم نهشت خواهند بود. بنابراین $BH = 1$ و $CH = 3$ است. پس مختصات نقطه B به شکل $(3, 4)$ است.

۲۴۱. در معادله ی درجه دوم $x^2 + 2x - 1 = 0$ حاصل $x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_2$ چقدر است؟

۳۴ (۴)

۳۱ (۳)

۳۳ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ دقت کنید که $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2$ و $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -1$ می باشد.

$$x_1 \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0 \rightarrow x_1^2 = -2x_1 + 1 \xrightarrow{\text{توان}} x_1^4 = 4x_1^2 + 1 - 4x_1$$

$$\begin{aligned} \text{پس: } x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_2 &= 4x_1^2 + 1 - 4x_1 + 4x_2^2 - 4x_2 = 4(x_1^2 + x_2^2) - 4(x_1 + x_2) + 1 \\ &= 4((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2) - 4(x_1 + x_2) + 1 = 4(4 + 2) - 4(-2) + 1 = 33 \end{aligned}$$

۲۴۲. پایین ترین نقطه سهمی به معادله $y = 2x^2 - 4x + b$ بر بالاترین نقطه سهمی به معادله

$y = -x^2 + ax + 3$ منطبق است. فاصله نقطه برخورد دو سهمی با محور عرض ها از یکدیگر چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ طول پایین ترین نقطه سهمی به معادله $y = 2x^2 - 4x + b$ برابر است با $x = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1$ و عرض این نقطه برابر

است:

$$y = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + b = b - 2$$

طول بالاترین نقطه سهمی به معادله $y = -x^2 + ax + 3$ برابر است با:

$$x = -\frac{a}{2(-1)} = \frac{a}{2}$$

پس $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$. عرض این نقطه برابر است با:

$$y = -1 + 2 + 3 = 4$$

بنابراین $b - 2 = 4 \rightarrow b = 6$.

نقطه برخورد سهمی $y = 2x^2 - 4x + 6$ با محور عرض ها نقطه $(0, 6)$ و نقطه برخورد سهمی $y = -x^2 + 2x + 3$ با محور عرض ها نقطه $(0, 3)$ است. فاصله این دو نقطه برابر ۳ است.



۲۴۳. دو خط $L_1: 2x + y = 1$ و $L_2: x - 2y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, -2\alpha)$ مماسند، فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع این دو خط کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ راه حل اول:

چون دو خط بر دایره مماس هستند فاصله هر دو از مرکز دایره یکسان است:

$$O \begin{vmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} L_1: 2x + y - 1 = 0 \rightarrow d &= \frac{|2\alpha - 2\alpha - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ L_2: x - 2y = 0 \rightarrow d &= \frac{|\alpha - 2(-2\alpha)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|5\alpha|}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |5\alpha| = 1 \rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

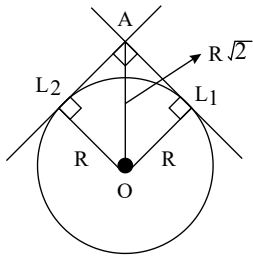
در نتیجه دو مقدار برای O داریم:

$$\rightarrow O \begin{vmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{vmatrix}, \quad O \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{vmatrix}$$

$$\text{محل تقاطع دو خط} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow 2(2y) + y = 1 \rightarrow 5y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{5}, \quad x = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow A \begin{vmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} OA = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \\ OA = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$$

با توجه به شیب دو خط L_1 و L_2 می‌توان گفت این دو خط بر یکدیگر عمودند. با وصل کردن نقطه O (مرکز دایره) به نقاط تماس دایره با دو خط L_1 و L_2 مربعی به قطر $R\sqrt{2}$ تشکیل می‌شود که همان فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع دو خط L_1 و L_2 است. پس کافی است، شعاع دایره را بدست آوریم.



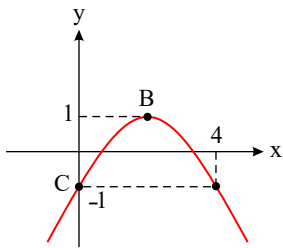
برای این کار فاصله مرکز دایره تا دو خط L_1 و L_2 را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{|\alpha + 4\alpha|}{\sqrt{5}} = \frac{|2\alpha - 2\alpha - 1|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$OA = R\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

۲۴۴. نمودار تابع درجه دوم $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. اگر α و β ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ باشد،

حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ کدام است؟



۲

۴

۱

۳

پاسخ: گزینه ۱ طول نقطه B با همان رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه هم عرض A و C است.

$$x_B = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

باتوجه به مختصات $B \left(2, 1 \right)$ (رأس سهمی)، می‌توان ضابطه سهمی را به صورت $f(x) = a(x - 2)^2 + 1$ نوشت. با جایگذاری مختصات نقطه $C \left(0, -1 \right)$ در ضابطه سهمی داریم:

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 1 \xrightarrow{C \left(0, -1 \right)} -1 = a(0 - 2)^2 + 1 \rightarrow a = \frac{-1}{2} \rightarrow f(x) = \frac{-1}{2}(x - 2)^2 + 1$$

برای بدست آوردن ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \\ p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \rightarrow \alpha, \beta \text{ ریشه‌های معادله موردنظر هستند.}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2 - 2p}{p^2} = \frac{16 - 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$



۲۴۵. جواب‌های معادله $2x^2 + mx - n = 0$ از مربع جواب‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ یک واحد بیشتر است. حاصل $m - n$ کدام است؟

۱۴ [۴]

۲۰ [۳]

۱۸ [۲]

۱۶ [۱]

پاسخ: گزینه ۱ ریشه‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ را α و β فرض می‌کنیم.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{-1}{1} = 1, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{-3}{1} = -3$$

بنابراین ریشه‌های معادله $2x^2 + mx - n = 0$ عبارت‌اند از: $\alpha^2 + 1$ و $\beta^2 + 1$ که داریم:

$$\text{جمع ریشه‌ها} = \alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1 = -\frac{m}{2} \Rightarrow -\frac{m}{2} = \alpha^2 + \beta^2 + 2$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{2} = S^2 - 2P + 2 = 1 - 2(-3) + 2 = 1 + 6 + 2 = 9 \Rightarrow m = -18$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = -\frac{n}{2} \Rightarrow -\frac{n}{2} = \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1$$

$$\Rightarrow -\frac{n}{2} = P^2 + S^2 - 2P + 1 = 9 + 1 - 2(-3) + 1 = 17 \Rightarrow n = -34$$

$$\Rightarrow m - n = -18 - (-34) = 34 - 18 = 16$$

۲۴۶. معادله‌ی $\sqrt[3]{3 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{x}} - \sqrt[3]{6} = 0$ دارای می‌باشد.

[۲] دو ریشه مختلف‌العلامت

[۱] دو ریشه هم‌علامت

[۴] یک ریشه منفی

[۳] یک ریشه مثبت

پاسخ: گزینه ۳ قدم اول تغییر فرم معادله به شکل زیر است:

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{-6} = 0$$

می‌توان برای حل از اتحاد اولر استفاده کرد:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc$$

حال اگر $a + b + c = 0$ باشد داریم: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

پس می‌توان نوشت: $\underbrace{\sqrt[3]{3 + \sqrt{x}}}_a + \underbrace{\sqrt[3]{3 - \sqrt{x}}}_b + \underbrace{\sqrt[3]{-6}}_c = 0 \leftarrow a + b + c = 0$ و داریم:

$$a^3 + b^3 + c^3 = \underbrace{(3 + \sqrt{x}) + (3 - \sqrt{x}) + (-6)}_0 = 3(\sqrt[3]{3 + \sqrt{x}})(\sqrt[3]{3 - \sqrt{x}})(\sqrt[3]{-6})$$

حاصلضرب سه عامل صفر است که فقط عامل دوم می‌تواند برابر صفر قرار بگیرد:

$$\sqrt[3]{3 - \sqrt{x}} = 0 \xrightarrow{(\quad)^3} 3 - \sqrt{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow x = 9$$



۲۴۷. حاصل ضرب جوابهای معادله $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 2 = 2x - \frac{x}{\sqrt{x}+1}$ کدام است؟

۴ صفر

۳ ۲

۲ ۱

۱ $\frac{9}{4}$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا عبارت را به فرمی تبدیل می‌نمائیم که ساده‌تر محاسبات قابل انجام باشد:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x}{\sqrt{x}+1} = 2x + 2$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x + \sqrt{x} + x\sqrt{x} - x}{x-1} = 2x + 2 \rightarrow \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}{x-1} = 2x + 2$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{x}(x+1)}{x-1} = (x+1) \times 2$$

به خاطر وجود $\sqrt{x}$ الزاماً $x \geq 0$ پس $x+1 > 0$ و می‌توان از دو طرف معادله آن را حذف نمود.

$$\rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x-1} = 2 \rightarrow \sqrt{x} = 2(x-1)$$

$$\xrightarrow{(\)^2} x = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow 4x^2 - 9x + 4 = 0$$

با توجه به تولید معادله‌ی درجه دوم حاصلضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ خواهد شد.

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{9}{4} \text{ پس } S = -\frac{b}{a} \text{ درجه دوم}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها مثبت و مجموع ریشه‌ها هم مثبت است پس هر دو ریشه مثبت و مخالف یک می‌باشد و قابل قبول هستند.

۲۴۸. آقای عماد چند اسباب‌بازی یکسان برای هدیه خرید که در مجموع ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر برای هر اسباب‌بازی ۱۰۰ تومان تخفیف بگیرد، با همان پول ۴ اسباب‌بازی بیشتر می‌تواند بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی چقدر است؟

۴ ۷۰۰

۳ ۶۰۰

۲ ۵۰۰

۱ ۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳ برای حل تعداد اسباب‌بازی‌ها را x و قیمت هر کدام را y فرض می‌نمائیم. پس می‌توان دو معادله نوشت:

$$(I) xy = 12000$$

$$(II) (x+4)(y-100) = 12000$$

$$\text{از معادله شماره (I) داریم: } y = \frac{12000}{x}$$

پس در معادله شماره (II)، y را جایگذاری می‌نمائیم:

$$(x+4)\left(\frac{12000}{x} - 100\right) = 12000 \rightarrow 100\left(\frac{120}{x} - 1\right)(x+4) = 12000$$

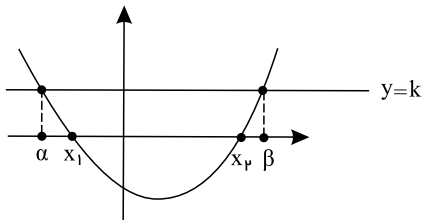


$$\rightarrow \left(\frac{120}{x} - 1\right)(x + 4) = 120 \rightarrow 120 + \frac{480}{x} - x - 4 = 120$$

$$\rightarrow 480 - x^2 - 4x = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 480 = 0 \rightarrow (x + 24)(x - 20) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -24 & \text{غ ق ق} \\ x = 20 & \rightarrow y = \frac{12000}{20} = 600 \end{cases}$$

۲۴۹. اگر نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟



$$b\alpha\beta < 0 \quad \boxed{1}$$

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\Delta}{4a} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{b}{4a} > \frac{c}{b} \quad \boxed{3}$$

$$\beta - x_2 = x_1 - a \quad \boxed{4}$$

پاسخ: گزینه ۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) اگر در $x = 0$ یک خط مماس بر سهمی موردنظر رسم کنیم، شیب خط آن برابر ضریب b است. پس $b < 0$ بوده و $\alpha\beta b > 0$ می‌باشد. گزینه ۱ نادرست است.

(۲) می‌دانیم نقاط (α, k) و (β, k) دو نقطه از سهمی هستند پس $x_s = \frac{\alpha + \beta}{2}$ با توجه به رابطه $y_s = -\frac{\Delta}{4a}$ داریم:

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

گزینه ۲ نادرست است.

(۳) سهمی محور x ها را در دو نقطه متمایز قطع کرده است. پس $\Delta > 0$ است. با توجه به نمودار $a > 0$ و $b < 0$ است. پس

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \rightarrow b^2 > 4ac \xrightarrow{\div 4ab} \frac{b}{4a} < \frac{c}{b}$$

(۴) x_1 و x_2 ریشه‌های حقیقی سهمی هستند. بنابراین:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} \rightarrow x_1 + x_2 = \alpha + \beta \rightarrow \beta - x_2 = x_1 - \alpha$$

۲۵۰. دایره‌ای محور y ها را در نقاطی با عرض ۲ و ۸ قطع کرده و بر خط $x = 2$ مماس است. شعاع این دایره کدام

است؟

$$2,75 \quad \boxed{4}$$

$$3,5 \quad \boxed{3}$$

$$3 \quad \boxed{2}$$

$$3,25 \quad \boxed{1}$$

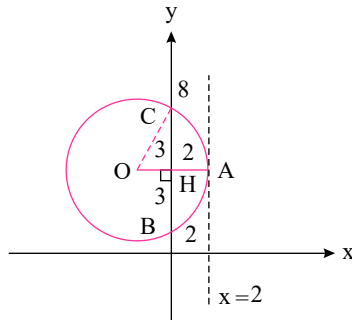


پاسخ: گزینه ۱

اول: دایره‌ای با این مشخصات رسم می‌کنیم:

خط OA بر وتر جدا شده روی محور y ها عمود است.

فاصله $HA = 2$ است و $HC = HB = 3$ است.



دوم: شعاع دایره OA است و داریم:

$$OA = OH + 2$$

از طرفی شعاع دایره OC است و داریم:

$$OC = \sqrt{OH^2 + 3^2}$$

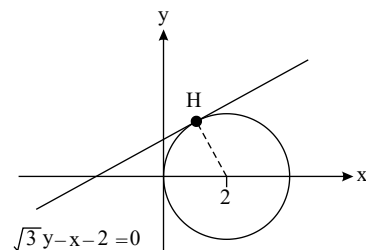
با تساوی این دو مقدار داریم:

$$OH + 2 = \sqrt{OH^2 + 9} \Rightarrow OH^2 + 4OH + 4 = OH^2 + 9 \Rightarrow OH = \frac{5}{4} = 1,25$$

سوم: پس شعاع دایره برابر است با:

$$OA = OH + 2 = 1,25 + 2 = 3,25$$

۲۵۱. خطی به معادله $\sqrt{3}y - x - 2 = 0$ در نقطه H بر دایره‌ای به مرکز $O(2, 0)$ مطابق شکل مماس شده



است. حاصل ضرب طول و عرض نقطه H کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad \boxed{2}$$

$$\sqrt{3} \quad \boxed{1}$$

$$4\sqrt{3} \quad \boxed{4}$$

$$3\sqrt{3} \quad \boxed{3}$$

پاسخ: گزینه ۱ پاره خط OH (شعاع) بر خط $\sqrt{3}y - x - 2 = 0$ عمود است و داریم:

$$\sqrt{3}y = x + 2 \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow m_{OH} = -\sqrt{3}, O(2, 0)$$

$$OH \text{ معادله: } y - 0 = -\sqrt{3}(x - 2) \rightarrow y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

نقطه H محل برخورد OH و خط $\sqrt{3}y - x - 2 = 0$ است و داریم:

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}y = -3x + 6 \\ \sqrt{3}y = x + 2 \end{cases} \rightarrow -3x + 6 = x + 2$$



$$\rightarrow 6 - 2 = x + 3x \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1, y = \sqrt{3} \rightarrow H(1, \sqrt{3})$$

$$\rightarrow x_H \cdot y_H = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

۲۵۲. به ازای کدام مقدار k ، ریشه بزرگ تر معادله $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = kx(1 - \frac{x-1}{x+1})$ از ریشه کوچک تر آن، ۲ واحد بزرگ تر است؟

$$-2 \quad \boxed{4}$$

$$-1 \quad \boxed{3}$$

$$2 \quad \boxed{2}$$

$$1 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ اول: مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = kx(1 - \frac{x-1}{x+1})$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = kx \times \frac{x+1 - x+1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2kx}{x+1} \Rightarrow -4x = 2kx(x-1) \Rightarrow kx^2 - kx + 2x = 0$$

$$\Rightarrow kx^2 + (2-k)x = 0 \Rightarrow x(kx + (2-k)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{k-2}{k} \end{cases}$$

دوم: اگر $x = 0$ ریشه کوچک تر باشد، مقدار ریشه بزرگ تر ۲ است.

$$\frac{k-2}{k} = 2 \Rightarrow k-2 = 2k \Rightarrow k = -2$$

و اگر $x = 0$ ریشه بزرگ تر باشد، مقدار ریشه کوچک تر -2 است:

$$\frac{k-2}{k} = -2 \Rightarrow k-2 = -2k \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

مقدار $k = -2$ در گزینه ها وجود دارد.

۲۵۳. اگر α و β ریشه های معادله $\gamma(x + \frac{1}{x}) = 9 + 2x^2 + \frac{2}{x^2}$ باشد، حاصلضرب آنها کدام است؟

$$-1 \quad \boxed{4}$$

$$-\frac{5}{2} \quad \boxed{3}$$

$$1 \quad \boxed{2}$$

$$\frac{5}{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

برای حل ابتدا از اتحاد فرعی استفاده می نماییم: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$\gamma(x + \frac{1}{x}) = 9 + 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) \rightarrow \gamma(x + \frac{1}{x}) = 9 + 2\left((x + \frac{1}{x})^2 - 2\right)$$



حال تغییر متغیر زیر را اعمال می‌نمائیم:

$$x + \frac{1}{x} = t$$

$$7t = 9 + 2(t^2 - 2) \rightarrow 7t = 9 + 2t^2 - 4 \rightarrow 2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{2} \quad \text{پس: مجموع ضرایب معادله درجه دو صفر است، پس:}$$

حال عبارت $x + \frac{1}{x}$ را به جای t قرار می‌دهیم:

$$t_1 = 1 \rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \xrightarrow{\times x} x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = -3 < 0 \rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$t_2 = \frac{5}{2} \rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\times 2x} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases} \rightarrow P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

۲۵۴. نمودار تابع $f(x) = ax^2 - 2\sqrt{5}x + a - 4$ محور طول‌ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند. مجموعه مقادیر ممکن برای $f(\sqrt{5})$ کدام است؟

(۱) $(10, 16)$ (۲) $(16, +\infty)$ (۳) $(0, 10)$ (۴) $(10, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۱ معادله $f(x) = 0$ باید دو جواب داشته باشد که مجموع و حاصل ضرب آن‌ها مثبت است. بنابراین:

$$\Delta = 20 - 4a(a - 4) > 0 \Rightarrow 4a^2 - 16a - 20 < 0 \Rightarrow -1 < a < 5$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{2\sqrt{5}}{a} > 0 \Rightarrow a > 0 \quad (۲)$$

$$\text{حاصل ضرب جواب‌ها} = \frac{a - 4}{a} > 0 \Rightarrow a > 4 \quad \text{یا} \quad a < 0 \quad (۳)$$

$$(۱) \cap (۲) \cap (۳) \Rightarrow 4 < a < 5$$

$$\text{از طرف دیگر } f(\sqrt{5}) = 5a - 10 + a - 4 = 6a - 14$$

$$4 < a < 5 \Rightarrow 24 < 6a < 30$$

$$10 < 6a - 14 < 16$$

$$10 < f(\sqrt{5}) < 16$$

۲۵۵. به‌ازای چند مقدار t ، معادله $\frac{t-1}{2x} = \frac{x+1}{x^2-2x}$ جواب ندارد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ اول: طرفین وسطین می‌کنیم:

$$(t-1)(x^2-2x) = 2x(x+1) \Rightarrow (t-1)x^2 - 2(t-1)x - 2x^2 - 2x = 0$$



$$\Rightarrow (t-3)x^2 + (-2t)x = 0 \Rightarrow x((t-3)x - 2t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2t}{t-3} \end{cases}$$

دوم: دقت کنید $x = 0$ ریشهٔ مخرج کسرها است و قابل قبول نیست. اگر قرار باشد ریشهٔ دیگر هم مورد قبول نباشد چند حالت داریم:

(۱) $t = 3$ باشد که مخرج ریشهٔ دوم صفر شود.

(۲) $\frac{2t}{t-3} = 0$ باشد که $t = 0$ می‌شود.

(۳) $\frac{2t}{t-3} = 2$ باشد:

$$\frac{2t}{t-3} = 2 \Rightarrow 2t = 2t - 6 \Rightarrow 0 = -6$$

که چنین چیزی امکان پذیر نیست.

پس اگر $t = 0$ یا $t = 3$ باشد، معادله جوابی ندارد.

۲۵۶. چند خط می‌توان رسم کرد که از نقطهٔ $A \left| \frac{1}{2} \right|$ بگذرد و با محورهای مختصات در ناحیهٔ اول، مثلی به مساحت

$\frac{9}{2}$ بسازد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) صفر

پاسخ: گزینه ۲ راهنمایی: شیب خط موردنظر را m در نظر بگیرید.

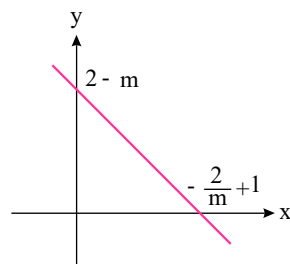
اول: خط موردنظر را با شیب m در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ $A(1, 2)$ می‌گذرد:

$$y - 2 = m(x - 1)$$

دوم: محل برخورد تابع را با محورهای مختصات می‌یابیم:

$$y = 0 \Rightarrow -2 = m(x - 1) \Rightarrow x - 1 = -\frac{2}{m} \Rightarrow x = -\frac{2}{m} + 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 - m$$



پس نمودار خط به شکل روبه‌روست:

سوم: مساحت تشکیل شده برابر است با:

$$S = \frac{(2-m)(-\frac{2}{m} + 1)}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{4}{m} + 2 + 2 - m = 9$$