



$$\Rightarrow \frac{-4 - m^2 - 5m}{m} = 0 \Rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \Rightarrow (m+1)(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}$$

پس دو خط با ویژگی موردنظر داریم.

۲۵۷. به ازای چند مقدار k ، مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{k+2}{3x} = \frac{5-x}{4x-x^2}$ تهی است؟

- ۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا معادله را طرفین وسطین کرده و مرتب می‌نماییم:

$$(k+2)(4x-x^2) = 3x(5-x) \rightarrow 4(k+2)x - (k+2)x^2 = 15x - 3x^2$$

$$\rightarrow (k-1)x^2 - (4k-7)x = 0 \rightarrow x((x-1)x - (4k-7)) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4k-7}{k-1} \end{cases}$$

جواب $x = 0$ غیر قابل قبول است و برای تهی بودن مجموعه جواب معادله باید جواب دیگر معادله هم غیر قابل قبول باشد. این جواب در حالت‌های زیر غیر قابل قبول است:

۱) $k = 1$ که در این صورت مخرج کسر $\frac{4k-7}{k-1}$ صفر می‌شود.

۲) عبارت $\frac{4k-7}{k-1}$ مخرج یکی از کسرهای معادله را صفر می‌کند.

(I) $\frac{4k-7}{k-1} = 4 \rightarrow 4k-7 = 4k-4 \rightarrow -7 = -4 \rightarrow$ بدون نتیجه

(II) $\frac{4k-7}{k-1} = 0 \rightarrow k = \frac{7}{4}$

پس مجموعاً دو مقدار برای k تعیین شد.

۲۵۸. معادله‌ی $\sqrt{x^3+8} + \sqrt[4]{x^3+8} = 6$ چند ریشه دارد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

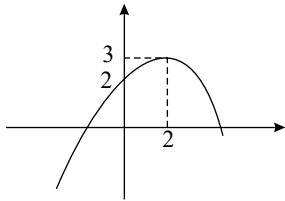
پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt[4]{x^3+8} = A \rightarrow A^2 + A - 6 = 0 \rightarrow (A+3)(A-2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = -3 \rightarrow \sqrt[4]{x^3+8} = -3 : \text{امکان ندارد} \\ A = 2 \rightarrow \sqrt[4]{x^3+8} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۴}} x^3+8 = 16 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$



۲۵۹. نمودار تابع درجه دوم f در شکل مقابل رسم شده است. مجموع مربعات صفرهای تابع f کدام است؟



۱۶ (۲)

۸ (۱)

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ ضابطه تابع f را به صورت $f(x) = a(x-k)^2 + h$ در نظر می‌گیریم. چون رأس سهمی تابع f نقطه $(2, 3)$ است، پس $k = 2$ و $h = 3$ ، یعنی $f(x) = a(x-2)^2 + 3$. نمودار از نقطه $(0, 2)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(0) = 2 \Rightarrow a(0-2)^2 + 3 = 2 \Rightarrow 4a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 3 = -\frac{1}{4}x^2 + x + 2$$

اگر α و β صفرهای تابع f باشند، آن‌گاه:

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{-\frac{1}{4}} = 4, \quad \alpha\beta = \frac{2}{-\frac{1}{4}} = -8$$

بنابراین مجموع مربعات صفرهای تابع f برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2(-8) = 32$$

۲۶۰. پاره‌خط MN موازی محور y ها طوری است که نقاط M و N به ترتیب روی توابع $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$ و $g(x) = -x^2 + 4x + 5$ قرار دارد، اگر $1 \leq x \leq 3$ باشد، حداکثر طول MN کدام است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۹ (۲)

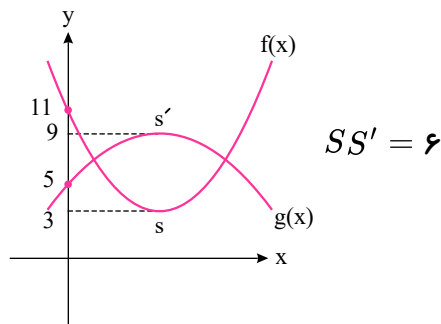
۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: دو تابع داده شده را در یک دستگاه رسم کنید و نقاط رأس تابع را مشخص کنید.

اول: طبق راهنمایی رئوس دو تابع را می‌یابیم:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 11 \Rightarrow S = \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(64 - 4 \times 2 \times 11)}{4 \times 2} = \frac{24}{8} = 3 \end{cases}$$

$$g(x) = -x^2 + 4x + 5 \Rightarrow S' = \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(16 - 4(-1)(5))}{4(-1)} = \frac{36}{4} = 9 \end{cases}$$



دوم: رسم هر دو تابع در یک دستگاه:

از شکل معلوم است، بیشترین مقدار پاره خط MN فاصله SS' است که داریم:

تذکر: دقت کنید که $x = 1$ و $x = 3$ بین تقاطع دو تابع است.

۲۶۱. مستطیلی داریم که دو ضلع آن بر خطوط $2x - y = 5$ و $2y + x = 3$ و یک رأس آن نقطه $A(4, -1)$ هست. اگر وسط اضلاع این مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم. مساحت چهارضلعی حاصل کدام است؟

۰٫۲ (۴)

۰٫۴ (۳)

۰٫۸ (۲)

۱٫۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ نکته: از سال های قبل می دانیم که از به هم وصل کردن متوالی وسط های اضلاع یک مستطیل، یک لوزی حاصل می شود که مساحت لوزی، نصف مساحت مستطیل است.

فاصله نقطه $(4, -1)$ از دو خط داده شده، طول و عرض مستطیل را به ما می دهد. داریم:

$$A(4, -1), d_1: 2x - y = 5 \rightarrow \text{فاصله} = \frac{|8 + 1 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{طول}$$

$$A(4, -1), d_2: 2y + x = 3 \rightarrow \text{فاصله} = \frac{|-2 + 4 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{عرض}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{10}$$

۲۶۲. معادله $\sqrt{\sqrt{x+3}-x} = 1 + \sqrt{1-x}$ چند جواب دارد؟

(۴) بدون جواب

(۳) دو جواب

(۲) یک جواب منفی

(۱) یک جواب مثبت

پاسخ: گزینه ۱ اول: به توان ۲ می رسانی:

$$(\sqrt{\sqrt{x+3}-x})^2 = (1 + \sqrt{1-x})^2 \Rightarrow \sqrt{x+3}-x = 1 + (1-x) + 2\sqrt{1-x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = 2 + 2\sqrt{1-x} \Rightarrow x+3 = 4 + 4(1-x) + 8\sqrt{1-x} \Rightarrow 5x-5 = 8\sqrt{1-x}$$

دوم: دوباره به توان ۲ می رسانی:

$$25x^2 - 50x + 25 = 64(1-x) \Rightarrow 25x^2 + 14x - 39 = 0$$



چون مجموع ضرایب صفر است، $x = 1$ و $x = -\frac{39}{25}$ ریشه‌ها هستند که $x = -\frac{39}{25}$ در معادله صدق نمی‌کند.

۲۶۳. مختصات دو سر پاره‌خط AB به صورت $A(3, 8)$ و $B(-1, 6)$ است. نقطه C روی عمود منصف AB قرار دارد و طول آن ۲ واحد از عرض آن کمتر است. عرض نقطه C کدام است؟

$$14 \quad \boxed{4}$$

$$5 \quad \boxed{3}$$

$$\frac{14}{3} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{13}{3} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ مختصات نقطه M وسط پاره‌خط AB را بدست می‌آوریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8 + 6}{2} = 7 \rightarrow M(1, 7)$$

$$m_{AB} = \frac{8 - 6}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow m = -2 \text{ عمود منصف } AB$$

$$AB \text{ معادله عمود منصف } : y - 7 = -2(x - 1) \rightarrow y - 7 = -2x + 2 \rightarrow y = -2x + 9$$

طول نقطه C دو واحد از عرض آن کمتر است پس داریم:

$$C(\alpha, \alpha + 2)$$

$$\rightarrow \alpha + 2 = -2\alpha + 9 \rightarrow 3\alpha = 7 \rightarrow \alpha = \frac{7}{3} \rightarrow C\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

۲۶۴. معادله $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = \sqrt{2}\sqrt{x+6}$ چند جواب دارد؟

$$3 \quad \boxed{4}$$

$$2 \quad \boxed{3}$$

$$1 \quad \boxed{2}$$

$$\text{صفر} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ اول: معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = \sqrt{2}\sqrt{x+6} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+a + x-a + 2\sqrt{x^2 - a^2} = 2(x+6)$$

$$2\sqrt{x^2 - a^2} = 12 \Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = 6 \Rightarrow x^2 - a^2 = 36$$

$$\Rightarrow x^2 = a^2 + 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2 + 36}$$

دوم: دقت کنید که $a^2 + 36 \geq 36 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 36} \geq 6$

$$\sqrt{a^2 + 36} \geq 6, -\sqrt{a^2 + 36} \leq -6$$

با توجه به عبارت $\sqrt{x+6}$ باید زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6$$

پس جواب $-\sqrt{a^2 + 36}$ قابل قبول نیست و فقط $\sqrt{a^2 + 36}$ پذیرفته است.



۲۶۵. شرط آن که معادله $\frac{t}{x} = \frac{x}{x^2 + 1}$ برای x جواب داشته باشد، کدام است؟

- ☐ ۱ $t > 1$ ☐ ۲ $t \leq 0$
☐ ۳ $0 < t < 1$ ☐ ۴ $-1 < t < 1, t \neq 0$

پاسخ: گزینه ۳ طرفین وسطین می‌کنیم:

$$tx^2 + t = x^2 \Rightarrow tx^2 - x^2 = -t \Rightarrow x^2(t - 1) = -t \Rightarrow x^2 = \frac{-t}{t - 1}$$

معادله بالا جواب دارد اگر $\frac{-t}{t - 1}$ منفی نباشد.

$$\frac{-t}{t - 1} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq t < 1$$

تذکر: $t = 0$ هم قابل قبول نیست. چون $x = 0$ ریشه مخرج کسر است.

۲۶۶. شرط آن که معادله $2x^4 - kx^2 + k^2 - 1 = 0$ دارای ۳ ریشه حقیقی متمایز باشد، کدام است؟

- ☐ ۱ $k = -1$ ☐ ۲ $k = 1$ ☐ ۳ $k = \pm 1$ ☐ ۴ $k = 0$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم معادله دو مجذوری فقط در حالتی دارای ۳ ریشه حقیقی متمایز است که یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم تولید شده با تغییر متغیر $x^2 = t$ ، برابر صفر و دیگری عددی مثبت باشد.

اول: صفر ریشه معادله است:

$$2x^4 - kx^2 + k^2 - 1 = 0 \xrightarrow{x=0} k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

دوم: مقادیر k را امتحان می‌کنیم:

$$k = 1 \Rightarrow 2x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = -1 \Rightarrow 2x^4 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس $k = 1$ صحیح است.

۲۶۷. حاصل ضرب جواب‌های معادله $\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{3}{x^2 + 2} = \frac{7}{x^2 + 6}$ ، کدام است؟

- ☐ ۱ -6 ☐ ۲ -16 ☐ ۳ -4 ☐ ۴ -25

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{3}{x^2 + 2} = \frac{7}{x^2 + 6} \rightarrow x^2 + 1 = t \geq 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{t} + \frac{3}{t+1} = \frac{7}{t+5} \xrightarrow{\times t(t+1)(t+5)} (t+1)(t+5) + 3t(t+5) = 7t(t+1)$$

$$\rightarrow t^2 + 6t + 5 + 3t^2 + 15t = 7t^2 + 7t \rightarrow 3t^2 - 14t - 5 = 0$$



$$(3t+1)(t-5)=0 \rightarrow \begin{cases} t-5=0 \rightarrow t=5 \\ 3t+1=0 \rightarrow t=-\frac{1}{3} \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$t=5 \rightarrow x^2+1=5 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x=2, x=-2 \rightarrow \text{حاصل ضرب جوابها} : 2(-2)=-4$$

۲۶۸. نقطه B ، قرینه نقطه $A = \begin{bmatrix} a \\ 4 \end{bmatrix}$ نسبت به نقطه $O = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ است و فاصله نقطه B از خط $x+2y=3$ برابر $\frac{\sqrt{5}}{5}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -22 ۴) -10

پاسخ: گزینه ۳ نقطه O وسط پاره خط AB است و داریم:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow 2 = \frac{a + x_B}{2} \rightarrow x_B = 4 - a \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow -1 = \frac{4 + y_B}{2} \rightarrow y_B = -6 \end{cases} \rightarrow B \begin{vmatrix} 4 - a \\ -6 \end{vmatrix}$$

$$x+2y-3=0 \rightarrow d = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{|4-a+2(-6)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{|a+11|}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow |a+11|=1 \rightarrow \begin{cases} a+11=1 \rightarrow a=-10 \\ a+11=-1 \rightarrow a=-12 \end{cases} \rightarrow \text{مجموع مقادیر ممکن} : -10-12=-22$$

۲۶۹. معادله $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{2-2x} = 0$ دارای چند ریشه می باشد؟

۱) دو ریشه ۲) سه ریشه ۳) یک ریشه ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲ می توان برای حل معادله از اتحاد اولر استفاده کرد

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+3abc$$

معادله را به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$\underbrace{\sqrt[3]{x-5}}_a + \underbrace{\sqrt[3]{x+3}}_b + \underbrace{\sqrt[3]{2-2x}}_c = 0 \rightarrow a+b+c=0$$

در اتحاد اولر اگر $a+b+c=0$ باشد داریم: $3abc=a^3+b^3+c^3$

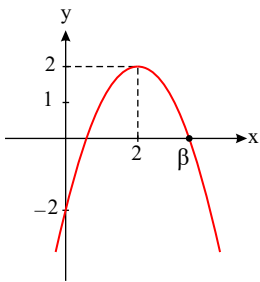
$$(\sqrt[3]{x-5})(\sqrt[3]{x+3})(\sqrt[3]{2-2x})=(x-5)+(x+3)+(2-2x)$$

$$(\sqrt[3]{x-5})(\sqrt[3]{x+3})(\sqrt[3]{2-2x})=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \\ x=5 \end{cases}$$



با جایگذاری هر سه ریشه قابل قبول می‌باشند. پس سه ریشه داریم.

۲۷۰. در شکل مقابل که نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx - 2$ است، مقدار β کدام است؟



$$4 - \sqrt{2} \quad \boxed{2}$$

$$2 - \sqrt{2} \quad \boxed{1}$$

$$4 + \sqrt{2} \quad \boxed{4}$$

$$2 + \sqrt{2} \quad \boxed{3}$$

پاسخ: گزینه ۳ طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است. پس:

$$-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$$

پس معادله سهمی به صورت $y = ax^2 - 4ax - 2$ است. با قرار دادن $x = 2$ در معادله سهمی عرض آن را حساب می‌کنیم:

$$y = 4a - 8a - 2 = -4a - 2$$

بنابراین با توجه به نمودار داریم:

$$-4a - 2 = 2 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{b=-4a} b = 4$$

یعنی معادله سهمی به صورت $y = -x^2 + 4x - 2$ است. طول نقطه برخورد سهمی با محور طول‌ها مورد سؤال است. پس در معادله سهمی

قرار می‌دهیم $y = 0$.

$$-x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8} \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

طبق شکل، β ریشه بزرگتر معادله فوق است و بزرگتر از ۲ است. پس:

$$\beta = 2 + \sqrt{2}$$

۲۷۱. کدام گزینه در خصوص ریشه یا ریشه‌های معادله $\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x - 2} = \frac{1}{2}$ درست است؟

۱) ریشه ندارد. ۲) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد.

۳) یک ریشه مثبت دارد. ۴) دو ریشه منفی دارد.

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x - 2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\substack{\times 2(x-2) \\ x \neq 2}]{\substack{1 \\ 2}} 2\sqrt{x^2 - 4x} = x - 2$$

$$\xrightarrow{\substack{2 \text{ توان} \\ \longrightarrow}} 4(x^2 - 4x) = x^2 - 4x + 4 \longrightarrow 4x^2 - 16x = x^2 - 4x + 4$$

$$3x^2 - 12x - 4 = 0 \longrightarrow \Delta = (-12)^2 - 4(3)(-4) = 144 + 48 = 192$$



$$\rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{192}}{6} = \frac{12 \pm 8\sqrt{3}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3} \checkmark \\ x = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{3} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۲۷۲. m را طوری تعیین نمائید که معادله $x^2 - 5x^2 - m + 5 = 0$ فاقد ریشه باشد؟

$$m > -\frac{5}{4} \quad \boxed{۴} \quad m < -\frac{5}{4} \quad \boxed{۳} \quad m > \frac{5}{4} \quad \boxed{۲} \quad m < \frac{5}{4} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا با فرض $x^2 = t$ معادله به یک عبارت درجه‌ی دو تبدیل می‌شود.

$$x^2 = t \rightarrow t^2 - 5t - m + 5 = 0$$

برای اینکه معادله فاقد ریشه باشد می‌توان دو حالت در نظر گرفت.

$$\Delta < 0 \rightarrow \Delta = 25 - 4(1)(-m + 5) = 25 + 4m - 20 = 5 + 4m \quad \text{حالت اول:}$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 5 + 4m < 0 \rightarrow m < -\frac{5}{4}$$

$$(I) \Delta \geq 0 \rightarrow$$

حالت دوم؛ دو ریشه‌ی منفی داشته باشیم:

$$(II) S < 0 \rightarrow S = \frac{-b}{a} \rightarrow S = \frac{5}{1} < 0 \quad \text{غیر ممکن}$$

۲۷۳. اگر قدرمطلق تفاضل ریشه‌های تابع $f(x) = 2x^2 - x + m + 1$ برابر ۴ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح

نیست؟

$$m = \frac{-71}{8} \quad \boxed{۱} \quad \text{ریشه‌های تابع برابر } \frac{9}{4} \text{ و } \frac{-7}{4} \text{ است.} \quad \boxed{۲}$$

$$\text{خط } y = 8 \text{ بر تابع } f(x) \text{ مماس است.} \quad \boxed{۳} \quad \text{خط } x = \frac{1}{4} \text{ محور تقارن تابع است.} \quad \boxed{۴}$$

پاسخ: گزینه ۳ اگر α و β صفرهای تابع $f(x) = 2x^2 - x + m + 1$ باشند، داریم:

$$|\alpha - \beta| = 4 \rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 4 \rightarrow \frac{\sqrt{1 - 8m - 8}}{2} = 4 \rightarrow \sqrt{-8m - 7} = 8 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} -8m - 7 = 64$$

$$\rightarrow m = \frac{-71}{8} \rightarrow \text{گزینه ۱ درست است}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1}{2} \\ |\alpha - \beta| = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{با فرض } \alpha > \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha - \beta = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{9}{4} \\ \beta = -\frac{7}{4} \end{cases} \rightarrow \text{گزینه ۲ درست است}$$

* خط $y = \frac{-\Delta}{4a}$ بر سهمی مماس است. بنابراین:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 4 \rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 4 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 8 \rightarrow \Delta = 64 \rightarrow y = -\frac{64}{4 \times 2} = -8$$



پس خط $y = -8$ بر تابع مماس است. بنابراین گزینه ۳ نادرست است.

* خط $x = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی است. پس:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{گزینه ۴ درست است}$$

۲۷۴. اگر تساوی $\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{ax + b}{x^2 - x + 1} + \frac{c}{x + 1}$ به ازای همه مقادیر x برقرار باشد، کدام گزینه نتیجه می‌شود؟ ($x \neq -1$)

$$\text{۱) } b + c = 1 \quad \text{۲) } b - c = 0 \quad \text{۳) } 2b = c \quad \text{۴) } 3b = c$$

پاسخ: گزینه ۱ اول: سمت راست تساوی را مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{ax + b}{x^2 - x + 1} + \frac{c}{x + 1} \Rightarrow \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{(ax + b)(x + 1) + c(x^2 - x + 1)}{x^3 + 1}$$

$$\Rightarrow 1 = ax^2 + (a + b)x + b + cx^2 - cx + c \Rightarrow 1 = (a + c)x^2 + (a + b - c)x + b + c$$

دوم: اگر تساوی به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد:

$$a + c = 0$$

$$a + b - c = 0$$

$$b + c = 1$$

۲۷۵. معادله $mx^2 + (m - 4)x - \frac{4}{m} = 0$ با ریشه‌های α و β مفروض است. اگر $\alpha^2 + \beta^2$ برابر ۱ باشد،

آن گاه حاصل $3\alpha^2 - 2\alpha - \beta$ کدام است؟

$$\text{۱) } 5 \quad \text{۲) } 1 \quad \text{۳) } -5 \quad \text{۴) } -3$$

پاسخ: گزینه ۲

فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های این معادله هستند. $\rightarrow mx^2 + (m - 4)x - \frac{4}{m} = 0$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{4 - m}{m}, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-4}{m^2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \rightarrow S^2 - 2P = 1 \rightarrow \left(\frac{4 - m}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{-4}{m^2}\right) = 1$$

$$\rightarrow \frac{m^2 - 8m + 16}{m^2} + \frac{8}{m^2} = 1 \rightarrow m^2 - 8m + 24 = m^2 \rightarrow -8m + 24 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{m = 3} \rightarrow 3x^2 - x - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow \alpha, \beta \text{ ریشه‌های معادله هستند.} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{3} \\ \alpha\beta = \frac{-4}{9} \end{cases}$$

$$\text{معادله } 3x^2 - x - \frac{4}{3} = 0 \xrightarrow{x=\alpha} 3\alpha^2 - \alpha - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow \boxed{3\alpha^2 - \alpha = \frac{4}{3}}$$



$$3\alpha^2 - 2\alpha - \beta = 3\alpha^2 - \alpha - \alpha - \beta = (3\alpha^2 - \alpha) - (\alpha + \beta) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

۲۷۶. کدام معادله، تعداد جواب‌های کمتری نسبت به معادله بقیه گزینه‌ها دارد؟

$$x^4 + 8x^2 + 7 = 0 \quad (۲) \qquad x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \quad (۱)$$

$$4x^6 + 1 = 5x^3 \quad (۴) \qquad (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24 = 0 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲ برای یافتن گزینه‌ی صحیح ابتدا با استفاده از تغییر متغیر هر چهار معادله را حل می‌نماییم.

گزینه ۱: با فرض $x^2 = t$ داریم:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ t = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

چهار جواب دارد.

گزینه ۲: با فرض $x^2 = t$ داریم:

$$t^2 + 8t + 7 = 0 \Rightarrow (t + 1)(t + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -7 \Rightarrow x^2 = -7 \\ t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \end{cases}$$

گزینه ۳: با فرض $x^2 + x = t$ داریم:

۴ جواب دارد.

$$t^2 - 14t + 24 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } -2 \\ t = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } -4 \end{cases}$$

گزینه ۴: با فرض $x^3 = t$ داریم:

$$4x^6 + 1 = 5x^3 \Rightarrow 4t^2 - 5t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

دو جواب دارد.

۲۷۷. مساحت مثلثی با رأس‌های $A(-1, 2)$ ، $B(2, 4)$ و $C(4, -1)$ برابر است با:

$$38 \quad (۴)$$

$$9 \quad (۳)$$

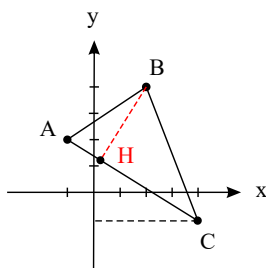
$$\frac{19}{2} \quad (۲)$$

$$19 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

قدم اول رسم یک تصویر کلی از مثلث مورد نظر می‌باشد.

برای محاسبه مساحت باید طول ارتفاع BH و ضلع AC را محاسبه نماییم.



$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1 - 2}{4 - (-1)} = \frac{-3}{5}$$



$$AC \text{ معادله ضلع } y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 2 = -\frac{3}{5}(x + 1) \rightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} + 2$$

$$\rightarrow 5y = -3x + 7 \rightarrow 3x + 5y - 7 = 0$$

کافیست فاصله نقطه B را تا خط AC محاسبه نماییم

$$BH \text{ طول ارتفاع } d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) + 5(4) - 7|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{19}{\sqrt{34}}$$

$$AC \text{ طول ضلع } |AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4 + 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{34}$$

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BH = \frac{1}{2} \times \frac{19}{\sqrt{34}} \times \sqrt{34} = \frac{19}{2}$$

۲۷۸. اگر دو خط $y = 4x + 2$ و $y = 4x + m^2 - 7$ ، بر دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع منطبق باشند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

- ۱) m هر عددی می‌تواند باشد. ۲) m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۳
۳) m هر عددی می‌تواند باشد به جز -۳ ۴) m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۳ و -۳

پاسخ: گزینه ۴ باتوجه به اینکه دو ضلع متوازی‌الاضلاع موازی و غیر منطبق هستند، داریم:

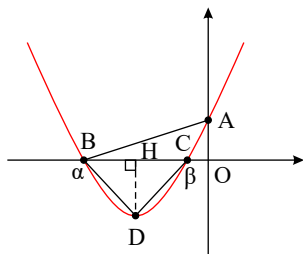
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{موازی و غیر منطبق}} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

حال کافیست همین شرط را بررسی نمائیم:

$$\begin{cases} 4x - y + 2 = 0 \\ 4x - y + m^2 - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{4}{4} \neq \frac{m^2 - 7}{2} \rightarrow m^2 - 7 \neq 2 \rightarrow m^2 \neq 9 \rightarrow m \neq \pm 3$$

پس m هر عددی می‌تواند باشد به جز ± 3 .

۲۷۹. نمودار زیر مربوط به سهمی $y = 2x^2 - bx + 3$ است. اگر مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر مساحت مثلث $\triangle DBC$ باشد، مقدار b کدام است؟



- ۱) ۵ ۲) -۵
۳) $\sqrt{5}$ ۴) $-\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۲ نقطه A محل برخورد سهمی با محور y ها و B و C محل برخورد سهمی با محور x ها و D رأس سهمی می‌باشد. مساحت مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle DBC$ از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|OA| \cdot |BC|}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y_A = 3 = OA \\ BC = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 24}}{2} \end{cases} \xrightarrow{OA=3, BC=\frac{\sqrt{b^2-24}}{2}} S_{\triangle ABC} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{b^2-24}}{2}}{2}$$



$$= \frac{3\sqrt{b^2 - 24}}{4}$$

$$S_{\triangle DBC} = \frac{|DH| \cdot |BC|}{2} = \frac{(-24 + b^2)\sqrt{b^2 - 24}}{22}$$

باتوجه به صورت سوال داریم:

$$S_{\triangle ABC} = 24 \cdot S_{\triangle DBC} \rightarrow \frac{\cancel{3} \sqrt{b^2 - 24}}{\cancel{4}} = \frac{\cancel{24} \sqrt{b^2 - 24}}{\cancel{22}} \rightarrow b^2 - 24 = 1 \rightarrow b^2 = 25 \rightarrow b = \pm 5$$

$$\frac{S = \frac{+b}{2}}{\rightarrow xS < 0 \rightarrow \frac{+b}{2} < 0 \rightarrow b < 0 \rightarrow b = -5}$$

باتوجه به نمودار

۲۸۰. تابع $y = x^2 + ax + 1$ محور x ها را در نقاط A و B و محور y ها را در نقطه C قطع می‌کند. اگر مساحت مثلث ABC ۱ واحد باشد، a کدام است؟

$$\pm 2\sqrt{2} \quad \boxed{4}$$

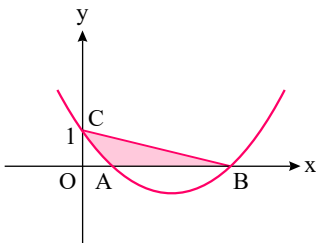
$$\pm \sqrt{2} \quad \boxed{3}$$

$$\pm 2 \quad \boxed{2}$$

$$\pm 4\sqrt{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ راهنمایی: قاعده مثلث مذکور اختلاف ریشه‌ها از هم و ارتفاع آن عرض از مبدأ سهمی است.

اول: طبق راهنمایی وضعیت مثلث ABC به شکل زیر است:



دوم: فاصله AB همان فاصله ریشه‌ها از هم است که برابر است با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ ، پس:

$$AB = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{|1|} = \sqrt{a^2 - 4}$$

سوم: مساحت تابع:

$$S = \frac{OC \times AB}{2} = \frac{1 \times \sqrt{a^2 - 4}}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 - 4} = 2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4 = 4 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$



۲۸۱. از برخورد خطوط $y + 2x = 1$ ، $2y - x = 2$ و $y + 4 = 3x$ با یکدیگر مثلثی پدید می‌آید. مساحت این مثلث کدام است؟

$$\frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{۴}$$

$$1 \quad \text{۳}$$

$$\frac{5}{2} \quad \text{۲}$$

$$5 \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ سه خط را در یک محور مختصات رسم می‌کنیم و داریم:

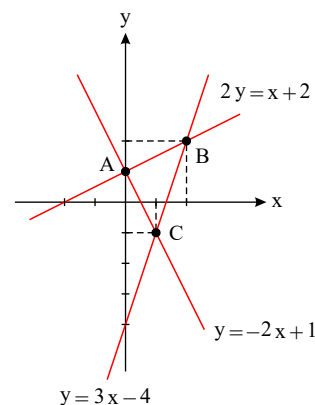
$$m_{AB} = \frac{1}{2}, m_{AC} = -2 \rightarrow AB \perp AC \rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$$

$$A(0, 1), B(2, 2), C(1, -1)$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{(2-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(0-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}$$



۲۸۲. دو ضلع مقابل متوازی‌الاضلاع $ABCD$ روی دو خط $4x + ky = 2$ و $8x + 6y = 6$ قرار دارند. اگر نقاط A و B محل‌های برخورد خط $8x + 6y = 6$ با محورهای مختصات باشند، مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad \text{۴}$$

$$\frac{13}{10} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۲}$$

$$2 \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴ دو ضلع مقابل متوازی‌الاضلاع با هم موازیند:

$$\begin{cases} 8x + 6y = 6 \\ 4x + ky = 2 \end{cases} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{6}{k} \rightarrow k = 3 \rightarrow 4x + 3y = 2$$

$$\begin{array}{l} \text{محل برخورد با محور } x \text{ ها} \\ \xrightarrow{y=0} 8x + 0 = 6 \rightarrow x = \frac{6}{8} \rightarrow A \left| \begin{array}{l} \frac{3}{4} \\ 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{محل برخورد با محور } y \text{ ها} \\ \xrightarrow{x=0} 0 + 6y = 6 \rightarrow y = 1 \rightarrow B \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - 0\right)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$



$$8x + 6y = 6 \xrightarrow{\div 2} 4x + 3y = 3, \quad 4x + 3y = 2$$

$$h = \frac{|3 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$$

$$S = \text{مساحت متوازی الاضلاع} = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

۲۸۳. اگر داشته باشیم، $A(6, 5)$, $B(4, 1)$ و $C(-2, -1)$ ، فاصله نقطه A از عمود منصف پاره خط BC چند برابر $\sqrt{10}$ است؟

- ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۵ ☐

پاسخ: گزینه ۲

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = m_{BC} = \frac{-1 - 1}{-2 - 4} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{شیب عمود منصف } BC = -\frac{1}{m_{BC}} = -3$$

$$(BC \text{ وسط}) M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{-1 + 1}{2} \right) \Rightarrow M = (1, 0)$$

$$BC \text{ عمود منصف: } y - 0 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 3 \Rightarrow 3x + y - 3 = 0$$

$$A(6, 5) \Rightarrow AH = \frac{|3(6) + 5 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

۲۸۴. اگر α, β ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 + (c + 2)x + 8 = 0$ باشد، آنگاه ریشه‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ به صورت $\sqrt{\alpha\beta}$ و $2\sqrt{\alpha\beta}$ خواهد بود. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

- ۱ ☐ -۵ ☐ ۲ ☐ ۵ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۴ ☐ -۴ ☐

پاسخ: گزینه ۱ برای حل مسئله ابتدا مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله اول را محاسبه می‌نماییم.

$$2x^2 + (c + 2)x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(c + 2)}{2} \quad (I) \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + bx + c = 0, \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\alpha\beta} \\ x_2 = 2\sqrt{\alpha\beta} \end{cases} \text{ حال سراغ معادله دوم برویم:}$$

$$S = x_1 + x_2 = \sqrt{\alpha\beta} + 2\sqrt{\alpha\beta} = 3\sqrt{\alpha\beta} = 3\sqrt{P} = 3\sqrt{4} = 6$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \sqrt{\alpha\beta} \times 2\sqrt{\alpha\beta} = 2\alpha\beta = 2(4) = 8$$

حال می‌توان با فرمول زیر معادله را بازنویسی کرد: $x^2 - Sx + P = 0$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x^2 + bx + c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 8 \xrightarrow{(I)} \alpha + \beta = \frac{-(c + 2)}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

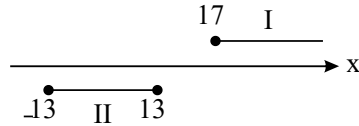


۲۸۵. مجموعه جواب معادله $\sqrt{169 - x^2} = x - 17$ کدام است؟

- ☐ ۱ $[-13, 13]$
☐ ۲ R
☐ ۳ $[-13, 17]$
☐ ۴ $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۴ یکی روش‌های حل معادلات رادیکالی تعیین دامنه تابع می‌باشد.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{169 - x^2} = x - 17 &\rightarrow x - 17 \geq 0 \rightarrow x \geq 17 (I) \\ 169 - x^2 \geq 0 & \\ x^2 \leq 169 \rightarrow |x| \leq 13 \rightarrow -13 \leq x \leq 13 (II) \end{aligned} \right\}$$



$$(I) \cap (II) = \emptyset$$

معادله فاقد ریشه است.

۲۸۶. به ازای چند مقدار مختلف k معادله $x^4 + 8x^2 + k^2 + 7 = 0$ دارای دو ریشه است؟

- ☐ ۱ صفر
 ☐ ۲ ۲
 ☐ ۳ ۴
 ☐ ۴ بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا $x^2 = t$ فرض می‌نمائیم تا به یک معادله‌ی درجه‌ی دو برسیم

$$x^2 = t \rightarrow t^2 + 8t + k^2 + 7 = 0$$

حال برای تولید دو ریشه دو حالت وجود دارد:

حالت اول: یک ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشیم

$$(I) \Delta = 0 \quad (II) S > 0 \rightarrow S = -\frac{8}{2} < 0 \text{ غیر ممکن}$$

حالت دوم، دو ریشه‌ی مختلف علامت داشته

$$(I) \Delta > 0 \rightarrow \Delta = 64 - 4(1)(k^2 + 7) \rightarrow -4k^2 - 28$$

$$(II) p < 0 \rightarrow \frac{k^2 + 7}{1} < 0 \rightarrow k^2 + 7 < 0 \text{ غیر ممکن}$$

۲۸۷. اگر $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $\frac{5-m}{2x} + \frac{m-3}{x(x+4)} = \frac{x}{x^2+3x-4}$ باشد، آن‌گاه

جواب دیگر کدام است؟

- ☐ ۱ ۳
 ☐ ۲ -۳
 ☐ ۳ ۵
 ☐ ۴ -۵

پاسخ: گزینه ۱ $x = 2$ در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{5-m}{2} + \frac{m-3}{2 \times 6} = \frac{2}{4+6-4} \Rightarrow \frac{5-m}{2} + \frac{m-3}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{15-3m+m-3}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow 12-2m=4 \Rightarrow 2m=8 \Rightarrow m=4$$

توجه کنید که $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$ ؛ با جایگذاری $m=4$ در معادله، آن را حل می‌کنیم:



$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x(x+4)} = \frac{x}{(x+4)(x-1)} \Rightarrow \frac{x+4+2}{2x(x+4)} = \frac{x}{(x+4)(x-1)}$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-1) = 2x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 2x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$$

۲۸۸. معادله $\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}} = \sqrt{2}$ چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲ معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}})^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x-\sqrt{x}} = 2$$

$$2x + 2\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} = 2 \Rightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - x} = 2$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{x^2 - x} = 1 \Rightarrow x - 1 = -\sqrt{x^2 - x} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - x \Rightarrow x = 1$$

جواب ۱ در معادله هم صدق می‌کند.

۲۸۹. به ازای کدام مجموعه مقادیر m تابع $y = x^2 - mx + m - 1$ از ناحیه سوم نمی‌گذرد؟

$(-\infty, 1]$ (۴)

$(1, +\infty)$ (۳)

$[1, +\infty) - \{2\}$ (۲)

$[1, +\infty)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ راهنمایی: دو حالت را در نظر بگیرید. یکی حالتی که تابع از ناحیه ۳ و ۴ عبور نکند و دیگری حالتی که فقط از ناحیه ۳ عبور نکند.

اول: حالت اول: تابع از ناحیه ۳ و ۴ عبور نکند، شرایط آن به شکل زیر است:

$$(1) \Delta \leq 0 \Rightarrow m^2 - 4(m-1) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 \leq 0 \Rightarrow (m-2)^2 \leq 0 \Rightarrow m = 2$$

$$(2) a > 0 \Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

اشتراک ۲ شرط، $m = 2$ است.

دوم: حالتی که تابع فقط از ناحیه ۳ عبور نکند، شرایط آن به شکل زیر است:

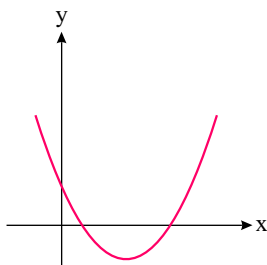
$$(1) \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4(m-1) > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow (m-2)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 2$$

$$(2) a > 0 \Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

$$(3) S > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$(4) P \geq 0 \Rightarrow m-1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$$





اشتراک ۴ شرط بالا $\{2\} - [1, +\infty)$ است.

سوم: در نهایت اجتماع بین مجموعه‌های حالت اول و دوم همان $[1, +\infty)$ است.

۲۹۰. معادله $x + \frac{a}{x+3} = 4$ دارای دو ریشه α و β است که در رابطه $\alpha = 2\beta + 7$ صدق می‌کنند، مقدار

a کدام است؟

۴ (۴) -۴

۴ (۳) ۴

۶ (۲) ۶

-۶ (۱) -۶

پاسخ: گزینه ۲

$$x + \frac{a}{x+3} = 4 \xrightarrow[x \neq -3]{\times(x+3)} x(x+3) + a = 4(x+3)$$

$$x^2 + 3x + a = 4x + 12 \Rightarrow x^2 - x + (a - 12) = 0$$

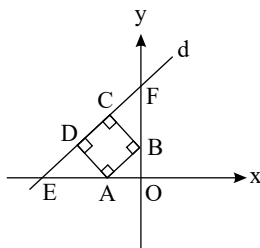
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = a - 12 \end{cases}$$

$$\alpha = 2\beta + 7 \xrightarrow{+\beta} \alpha + \beta = 3\beta + 7 \Rightarrow 1 = 3\beta + 7$$

$$\Rightarrow 3\beta = -6 \Rightarrow \beta = -2 \xrightarrow{\text{در معادله اصلی صدق می‌کند.}} -2 + \frac{a}{-2+3} = 4 \Rightarrow -2 + a = 4 \Rightarrow a = 6$$

۲۹۱. در شکل مقابل $ABCD$ مربع است. اگر $A(-1, 0)$ و $B(0, 1)$ باشد، کدام نقطه زیر روی خط d

(گذرنده از D و C) قرار دارد؟



(-۲, -۱۱) (۲)

(-۲, -۳) (۱)

(-۲, ۵) (۴)

(-۲, ۱) (۳)

پاسخ: گزینه ۳ از آنجایی که $ABCD$ مربع است، شیب خط d با شیب پاره خط AB برابر است (AB با خط d موازی است):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{-1 - 0} = 1$$

پس معادله خط d به صورت $y = x + b$ می‌باشد.

از طرفی در مربع، اضلاع با هم برابرند: $|AB| = |AD|$ که $|AD|$ برابر با فاصله نقطه A از خط d می‌باشد:

$$|AD| = |AB| \rightarrow \frac{|1 - b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |1 - b| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 - b = 2 \Rightarrow b = -1 \\ 1 - b = -2 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

با توجه به شکل داده شده، عرض از مبدأ مثبت است. بنابراین $b = 3$ مورد قبول می‌باشد.



نقطه $(-2, 1)$ روی خط $y = x + 3$ قرار دارد.

۲۹۲. اگر $\frac{1}{\beta+1}$ و $\frac{1}{\alpha+1}$ ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند، در این صورت α و β ریشه‌های کدام معادله می‌باشند؟

$$5x^2 + 9x + 7 = 0 \quad \boxed{۲}$$

$$5x^2 - 8x - 7 = 0 \quad \boxed{۱}$$

$$5x^2 + 8x + 7 = 0 \quad \boxed{۴}$$

$$5x^2 + 8x + 2 = 0 \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$x^2 + 2x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2 \\ P = \frac{c}{a} = -\frac{5}{1} = -5 \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{\alpha+1} \times \frac{1}{\beta+1} = -5 \rightarrow (\alpha+1)(\beta+1) = -\frac{1}{5} \quad (۱)$$

$$S = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = -2 \rightarrow \frac{\alpha+\beta+2}{-\frac{1}{5}} = -2$$

$$\rightarrow \alpha + \beta + 2 = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{\alpha + \beta = -\frac{8}{5}} \quad (۲)$$

طبق رابطه (۱) داریم:

$$(\alpha+1)(\beta+1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = -\frac{1}{5} \xrightarrow{(۲)} \alpha\beta - \frac{8}{5} + 1 = -\frac{1}{5}$$

معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌هایش برابر $-\frac{8}{5}$ و حاصل ضرب ریشه‌هایش $\frac{2}{5}$ باشد را می‌نویسیم:

$$\rightarrow \boxed{\alpha\beta = \frac{2}{5}}$$

$$\rightarrow x^2 - \left(-\frac{8}{5}\right)x + \frac{2}{5} = 0 \xrightarrow{\times 5} 5x^2 + 8x + 2 = 0$$

۲۹۳. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 3 = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$ کدام است؟

$$-۶ \quad \boxed{۴}$$

$$۶ \quad \boxed{۳}$$

$$-۴ \quad \boxed{۲}$$

$$۴ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} = A \rightarrow A + 3 = \frac{A+7}{2A} \rightarrow 2A^2 + 6A = A + 7 \rightarrow 2A^2 + 5A - 7 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} A = 1 \\ A = \frac{c}{a} = -\frac{7}{2} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$



$$A = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 2x - 3 = 1 \rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -4$$

۲۹۴. ریشه‌های معادله $x^2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} = 6 - 2x$ چقدر اختلاف دارند؟

۲ (۴)

۱۴ (۳)

۴ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$x^2 + 2x + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} = 6 \rightarrow x^2 + 2x + \sqrt{2(x^2 + 2x) + 3} = 6$$

با تغییر متغیر $x^2 + 2x = t$ داریم:

$$t + \sqrt{2t + 3} = 6 \rightarrow \sqrt{2t + 3} = 6 - t \rightarrow (\sqrt{2t + 3})^2 = (6 - t)^2$$

$$\rightarrow 2t + 3 = 36 - 12t + t^2 \rightarrow t^2 - 14t + 33 = 0$$

$$(t - 11)(t - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 11 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x = 3 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -3$$

پس ریشه‌های معادله ۴ واحد اختلاف دارند.

۲۹۵. مجموعه جواب‌های معادله $\frac{x}{x-1} + \frac{a}{x} + \frac{3}{x^2-x} = 0$ فقط یک عضو دارد. مجموع مقادیر ممکن

برای a کدام است؟

۵ (۴)

-۱ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ دو طرف معادله را در $x^2 - x$ ضرب می‌کنیم:

$$x^2 + ax - a + 3 = 0 \quad (*)$$

اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله $(*)$ فقط یک جواب دارد:

$$\Delta = a^2 - 4(-a + 3) = 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 6) = 0 \Rightarrow a = 2, -6$$

اگر $a = 2$ باشد، جواب معادله $x = -1$ است و اگر $a = -6$ باشد، جواب معادله $x = 3$ است. دقت کنید که این جواب‌ها مخالف ۱ و ۰ هستند و بنابراین قابل قبول هستند.

همچنین اگر معادله $(*)$ یکی از جواب‌هایش $x = 0$ یا $x = 1$ باشد، معادله موردنظر مسأله فقط یک جواب خواهد داشت، زیرا $x = 0$ و $x = 1$ قابل قبول نیستند.

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 0 - a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 + a - a + 3 = 0 \quad \text{غ ق ق}$$

پس a می‌تواند ۲، -۶ و ۳ باشد که مجموع آن‌ها -۱ است.



۲۹۶. سه نقطه $A(-1, 2)$ ، $B(-2, 1)$ و $C(2, -1)$ ، سه رأس یک مثلث قائم الزاویه‌اند. معادله خط منطبق بر وتر این مثلث محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ☐ ۱) صفر ☐ ۲) ۱ ☐ ۳) -۱ ☐ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا رأس قائم مثلث را پیدا می‌کنیم تا وتر مشخص شود. برای این منظور داریم:

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{2-1}{-1-(-2)} = \frac{1}{1} \\ m_{BC} = \frac{1-(-1)}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ m_{AC} = \frac{2-(-1)}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1 \end{cases}$$

$$C(2, -1), B = (-2, 1), A = (-1, 2)$$

چون $m_{AB} \times m_{AC} = -1$ پس AB بر AC عمود بوده، یعنی مثلث در رأس A قائمه است و وتر آن BC است.

کافی است معادله خط گذرنده از نقاط B و C را به دست آوریم.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow[m = -\frac{1}{2}]{B(-2, 1)} y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

همانطور که از معادله خط به دست آمده مشخص است خط از مبدأ مختصات گذشته و محور x ها را با طول صفر قطع می‌کند.

۲۹۷. اگر هر دو شیر استخری باز باشند، استخر در سه ساعت پر می‌شود. در صورتی که شیر بزرگ‌تر به تنهایی باز باشد ۲۰ دقیقه زودتر از شیر کوچک استخر را پر می‌کند. شیر کوچک‌تر به تنهایی استخر را تقریباً در چند ساعت پر می‌کند؟

- ☐ ۱) ۴ ☐ ۲) ۵ ☐ ۳) ۶ ☐ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۳

$3 =$ زمان با هر دو شیر (ساعت)، $x - \frac{1}{3} =$ زمان شیر بزرگ‌تر (ساعت)، $x =$ زمان شیر کوچک‌تر (ساعت)

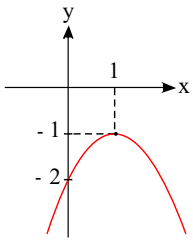
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{x - \frac{1}{3} + x}{x(x - \frac{1}{3})} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow 6x - 1 = x^2 - \frac{x}{3} \rightarrow x^2 - \frac{19}{3}x + 1 = 0 \xrightarrow{\times 3} 3x^2 - 19x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-19)^2 - 4(3)(3) = 325 \rightarrow x = \frac{19 \pm \sqrt{325}}{6} \simeq \frac{19 \pm 18}{6} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} & \text{غیر قابل قبول} \\ x = \frac{37}{6} \simeq 6 & \text{۶ ساعت} \end{cases}$$



۲۹۸. ضابطه سهمی مربوط به شکل زیر کدام است؟



$$f(x) = -2x^2 - 2x - 1 \quad \boxed{۲}$$

$$f(x) = -2x^2 + x - 2 \quad \boxed{۱}$$

$$f(x) = -x^2 + x - 2 \quad \boxed{۴}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x - 2 \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{در معادله } f(x) \text{ صدق می‌کند.}} f(۰) = -۲ \rightarrow a(۰)^2 + b(۰) + c = -۲ \rightarrow \boxed{c = -۲}$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} \rightarrow ۱ = -\frac{b}{2a} \rightarrow b = -2a \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{در معادله } f(x) \text{ صدق می‌کند.}} f(۱) = -۱ \rightarrow a(۱)^2 + b(۱) + c = -۱ \rightarrow a + b - ۲ = -۱ \rightarrow a + b = ۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲), (۱)} \begin{cases} b = -2a \\ a + b = ۱ \end{cases} \rightarrow a - 2a = ۱ \rightarrow -a = ۱ \rightarrow \boxed{a = -۱}, \boxed{b = ۲}$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 2x - 2$$

۲۹۹. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 6 = 0$ باشند، آن گاه حاصل عبارت $(\alpha^2 - 6)^3 + 8\beta^3$ کدام است؟

$$۳۵۲ \quad \boxed{۴}$$

$$۴۴ \quad \boxed{۳}$$

$$۲۶۴ \quad \boxed{۲}$$

$$۸۸ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$x^2 - 2x - 6 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2 - 2\alpha - 6 = 0 \rightarrow \alpha^2 - 6 = 2\alpha$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-۲}{۱} = ۲, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۶}{۱} = -۶$$

$$(\alpha^2 - 6)^3 + 8\beta^3 = (2\alpha)^3 + 8\beta^3 = 8\alpha^3 + 8\beta^3 = 8(\alpha^3 + \beta^3)$$

$$= 8(S^3 - 3PS) = 8(2^3 - 3(-6)(2)) = 8(8 + 36) = 8 \times 44 = ۳۵۲$$



۳۰۰. رأس سهمی $y = -x^2 + 4x - 3$ و نقطه‌های برخورد این سهمی با محور x ‌ها به ترتیب سه رأس B ، A و C از مثلث ABC را تشکیل می‌دهند، طول میانه CM کدام است؟ (نقطه B نسبت به نقطه C ، به مبدأ نزدیک تر است).

$$\frac{\sqrt{10}}{4} \quad \boxed{4}$$

$$2\sqrt{10} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2} \quad \boxed{2}$$

$$\sqrt{10} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$y = -x^2 + 4x - 3 \rightarrow x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2, \quad y_s = -(2)^2 + 4(2) - 3 \rightarrow y_s = 1$$

$$\rightarrow \boxed{A(2, 1)}, \quad -x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow y=0 \rightarrow \boxed{B(1, 0)} \\ x=3 \rightarrow y=0 \rightarrow \boxed{C(3, 0)} \end{cases}$$

$$AB \text{ وسط} = M \rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{M(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})}$$

$$CM = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(3 - \frac{3}{2})^2 + (0 - \frac{1}{2})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} \rightarrow CM = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۳۰۱. خط L_1 با شیب $m_1 = 2$ محور x ‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. اگر خط L_2 محور y ‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند و با خط L_1 موازی باشد، در این صورت فاصله دو خط موازی L_1 و L_2 کدام است؟

$$3 \quad \boxed{4}$$

$$\sqrt{13} \quad \boxed{3}$$

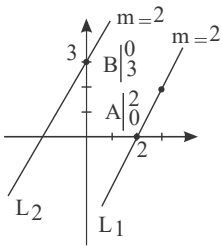
$$\sqrt{5} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{7\sqrt{5}}{5} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ برای محاسبه فاصله دو خط موازی ابتدا با معادله هر دو خط را داشته باشیم. با توجه به اطلاعات مسئله تصویر هر دو خط را رسم می‌نماییم:

$$L_1 \text{ معادله: } y = mx + h_1 \rightarrow y = 2x + h_1 \xrightarrow{A(2,0)} 0 = 2(+2) + h_1 \rightarrow h_1 = -4 \rightarrow y = 2x - 4$$

$$L_2 \text{ معادله: } y = mx + h_2 \rightarrow y = 2x + h_2 \rightarrow 3 = 2(0) + h_2 \rightarrow h_2 = 3 \rightarrow y = 2x + 3$$



حال هر دو معادله را به فرم کلی می‌نویسیم و با استفاده از رابطه زیر فاصله دو خط را محاسبه می‌نماییم:

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 - (-4)|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

۳.۲. اگر خطوط $-bx + (a - b)y - 8 = 0$ و $3ax + by - c = 0$ در نقطه‌ی $(1, 2)$ همدیگر را قطع کنند و بر هم عمود باشند، آن‌گاه c کدام است؟ ($a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$)

۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵ ۵

پاسخ: گزینه ۲ هر دو خط از نقطه‌ی $(1, 2)$ می‌گذرند. لذا مختصات این نقطه در هر دو معادله صدق می‌کند:

$$\begin{cases} -b(1) + (a - b)(2) - 8 = 0 \Rightarrow 2a - 3b - 8 = 0 \\ 3a(1) + b(2) - c = 0 \Rightarrow 3a + 2b - c = 0 \end{cases} \quad (*)$$

از طرفی بنا بر فرض سؤال، دو خط بر هم عمودند. شیب آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$-bx + (a - b)y - 8 = 0 \Rightarrow (a - b)y = bx + 8$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{(a - b)}x + \frac{8}{(a - b)} \Rightarrow m_1 = \frac{b}{a - b}$$

$$3ax + by - c = 0 \Rightarrow by = -3ax + c \Rightarrow y = -\frac{3a}{b}x + \frac{c}{b} \Rightarrow m_2 = -\frac{3a}{b}$$

از آنجایی که شیب دو خط بر هم عمودند داریم:

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \frac{b}{a - b} \times \left(-\frac{3a}{b}\right) = -1 \xrightarrow{b \neq 0} \frac{-3a}{a - b} = -1 \Rightarrow 3a = a - b \Rightarrow \boxed{2a = -b}$$

در رابطه‌های دستگاه $(*)$ به جای $2a$ مقدار $-b$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 2a - 3b - 8 = 0 \xrightarrow{2a = -b} -4b - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}, \boxed{a = 1} \\ 3a + 2b - c = 0 \Rightarrow 3 \times (1) + 2 \times (-2) - c = 0 \Rightarrow 3 - 4 - c = 0 \Rightarrow \boxed{c = -1} \end{cases}$$



۳۰۳. اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله $\frac{a}{x+1} = \frac{a-2x}{x^3+1} + \frac{3a-2}{x^2-x+1}$ باشد، ریشه دیگر این معادله کدام است؟

$$x = \frac{3}{4} \quad \boxed{۲}$$

$$x = -1 \quad \boxed{۱}$$

$$\boxed{۴} \text{ معادله ریشه دیگری ندارد.}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۴ $x = 1$ باید در معادله صدق کند.

$$\frac{a}{2} = \frac{a-2}{2} + \frac{3a-2}{1} \xrightarrow{\times 2} a = a-2 + 6a-4 \Rightarrow a = 1$$

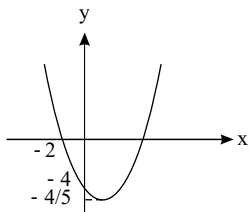
$$\frac{1}{x+1} = \frac{1-2x}{x^3+1} + \frac{1}{x^2-x+1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1-2x}{x^3+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x+1-x-1}{x^3+1} = \frac{1-2x}{x^3+1} \xrightarrow{x \neq -1} x^2-2x = 1-2x$$

$$\Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$x_1 = -1$ مخرج را صفر می‌کند و قابل قبول نیست. پس معادله ریشه دیگری به جز $x = 1$ ندارد.

۳۰۴. شکل زیر، نمودار سهمی $y = f(x)$ است. قدرمطلق اختلاف ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ کدام است؟



$$۵ \quad \boxed{۲}$$

$$۲ \quad \boxed{۱}$$

$$۸ \quad \boxed{۴}$$

$$۶ \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۳ اعداد -2 و β که محل برخورد سهمی با محور x هاست، ریشه‌های معادله درجه دوم می‌باشند، پس:

نقطه $(0, -4)$ در سهمی صدق می‌کند.
$$y = a(x+2)(x-\beta) \xrightarrow{\text{نقطه } (0, -4) \text{ در سهمی صدق می‌کند.}} -4 = 2a(-\beta) \Rightarrow a = \frac{2}{\beta}$$

نقطه رأس در سهمی صدق می‌کند.
$$x = \frac{\beta + (-2)}{2} \xrightarrow{\text{نقطه رأس}} \frac{\beta - 2}{2}, -4.5$$

$$\Rightarrow -4.5 = \frac{2}{\beta} \left(\frac{\beta-2}{2} + 2 \right) \left(\frac{\beta-2}{2} - \beta \right)$$

$$\Rightarrow -4.5 = \frac{2}{\beta} \left(\frac{\beta+2}{2} \right) \left(\frac{-\beta-2}{2} \right) \Rightarrow -9\beta = -\beta^2 - 4\beta - 4$$

$$\Rightarrow \beta^2 - 5\beta + 4 = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \Rightarrow \text{غ ق ق} & (x = -\frac{1}{p} \text{ به دست می آید.}) \\ \beta = 4 \Rightarrow \text{ریشه ها} & x = -2, x = 4 \\ \Rightarrow \text{اختلاف ریشه ها} & 4 - (-2) = 6 \end{cases}$$

۳۰۵. سهمی $y = f(x)$ ، محور x ها را در نقاطی به طول -1 و 5 قطع می کند و خط $y = 18$ بر آن مماس است. مقدار $f(7)$ کدام است؟

$$-16 \quad \boxed{4}$$

$$16 \quad \boxed{3}$$

$$-32 \quad \boxed{2}$$

$$32 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ راه حل اول:

معادله سهمی را به صورت $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر می گیریم و داریم:

$$(-1, 0) \in f \rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \rightarrow a - b + c = 0$$

$$(5, 0) \in f \rightarrow a(5)^2 + b(5) + c = 0 \rightarrow 25a + 5b + c = 0$$

$$\text{رأس سهمی: } x_s = \frac{-1+5}{2} = 2 \rightarrow x_s = 2, y_s = 18 \rightarrow S(2, 18)$$

$$(2, 18) \in f \rightarrow a(2)^2 + b(2) + c = 18 \rightarrow 4a + 2b + c = 18$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \rightarrow c = b - a \\ 25a + 5b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 25a + 5b + b - a = 0 \\ 4a + 2b + b - a = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 24a + 6b = 0 \\ 3a + 3b = 18 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ -a - b = -6 \end{cases} + \quad \begin{matrix} \\ \\ \hline \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3a = -6 \rightarrow a = -2, b = 8, c = 10 \end{matrix}$$

در نتیجه:

$$\rightarrow f(x) = -2x^2 + 8x + 10$$

$$f(7) = -2(7)^2 + 8(7) + 10 = -98 + 56 + 10 \rightarrow f(7) = -32$$

راه حل دوم:

سهمی محور x ها را در -1 و 5 قطع می کند، پس ضابطه آن به صورت روبه رو است:

$$f(x) = a(x+1)(x-5)$$

چون خط $y = 18$ بر سهمی مماس است، عرض رأس سهمی 18 است. از طرفی طول رأس سهمی، میانگین ریشه های سهمی است.

$$x_s = \frac{-1+5}{2} = 2 \Rightarrow f(2) = 18 \Rightarrow -9a = 18$$



$$\Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = -2(x+1)(x-5)$$

$$\Rightarrow f(7) = -2(8)(2) = -32$$

۳۰۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی $y = (-m+1)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور x ها قرار دارد؟

$$-2 < m \quad \boxed{۴} \qquad m < 5 \quad \boxed{۳} \qquad -2 < m < 5 \quad \boxed{۲} \qquad 2 < m < 5 \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱ سهمی همواره پایین محور x ها قرار دارد یعنی: $\Delta < 0$ ، $a < 0$

$$\Delta < 0 \rightarrow \Delta = (2(m-3))^2 - 4(-m+1)(-1) = 4(m^2 - 6m + 9) + 4(-m+1)$$

$$\rightarrow \Delta = 4m^2 - 28m + 40 < 0 \rightarrow 4(m^2 - 7m + 10) < 0 \rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$\rightarrow (m-2)(m-5) < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} m & -\infty & 2 & 5 & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + \\ & & & \text{ج} & & \end{array} \rightarrow 2 < m < 5$$

$$a < 0 \rightarrow -m+1 < 0 \rightarrow 1 < m$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < m < 5 \\ 1 < m \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < m < 5$$

۳۰۷. اگر نقاط $A(2, 1)$ و $B(0, -1)$ و $C(4, -4)$ رئوس مثلث ABC باشند، مختصات محل برخورد ارتفاع AH و ضلع BC کدام نقطه است؟

$$\left(\frac{8}{25}, \frac{31}{25}\right) \quad \boxed{۴} \qquad \left(-\frac{8}{25}, -\frac{31}{25}\right) \quad \boxed{۳} \qquad \left(-\frac{8}{25}, \frac{31}{25}\right) \quad \boxed{۲} \qquad \left(\frac{8}{25}, -\frac{31}{25}\right) \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱ ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است پس ابتدا شیب و معادله ضلع BC را به دست می آوریم:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-1 - (-4)}{0 - 4} = \frac{3}{-4} \xrightarrow{B(0, -1)} y - (-1) = -\frac{3}{4}(x - 0)$$

$$\rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x - 1} \quad \text{معادله ضلع } BC$$

اکنون شیب و معادله AH را محاسبه می کنیم:



$$m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} \rightarrow m_{AH} = \frac{4}{3} \xrightarrow{A(2,1)} y - 1 = \frac{4}{3}(x - 2)$$

$$\rightarrow y - 1 = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \quad \text{معادله ارتفاع } AH$$

$$\text{محل برخورد ضلع } BC \text{ و ارتفاع } AH \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - 1 \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases} \rightarrow -\frac{3}{4}x - 1 = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$\rightarrow -1 + \frac{5}{3} = \frac{4x}{3} + \frac{3x}{4} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{16x + 9x}{12} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{25x}{12}$$

$$\rightarrow x = \frac{12 \times 2}{25 \times 3} \rightarrow x = \frac{8}{25} \rightarrow y = \frac{4}{3} \times \frac{8}{25} - \frac{5}{3} = \frac{32}{75} - \frac{5}{3}$$

$$\rightarrow y = \frac{32 - 125}{75} \rightarrow y = \frac{-93}{75} \rightarrow y = \frac{-31}{25} \rightarrow H\left(\frac{8}{25}, \frac{-31}{25}\right)$$

۳۰۸. یکی از ریشه‌های معادله $x = a(x - 2)^2$ از ۱۰ برابر ریشه دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت a کدام

است؟

$$\frac{4}{5} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{5}{9} \quad \boxed{۳}$$

$$\frac{4}{5} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{9}{5} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$a(x^2 - 4x + 4) = x \Rightarrow ax^2 - (4a + 1)x + 4a = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{4a+1}{a} \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$$

$$\alpha = 10\beta - 3 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^2 = 10\alpha\beta - 3\alpha \xrightarrow{\alpha\beta=4} \alpha^2 = 40 - 3\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 40 = 0 \Rightarrow (\alpha + 8)(\alpha - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -8 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

$$\alpha = -8 \Rightarrow a(-8 - 2)^2 = -8 \Rightarrow 100a = -8 \Rightarrow a = -\frac{2}{25}$$

$$\alpha = 5 \Rightarrow a(5 - 2)^2 = 5 \Rightarrow 9a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{9}$$

$$\left. \begin{matrix} a = -\frac{2}{25} \\ a = \frac{5}{9} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{مقدار مثبت } a} a = \frac{5}{9}$$

۳۰۹. سهمی به معادله $f(x) = -mx^2 + 2x + m - 1$ فقط از ناحیه اول و مبدأ نمی‌گذرد، حدود m کدام

است؟

$$m < 0 \quad \boxed{۲}$$

$$m > 0 \quad \boxed{۱}$$

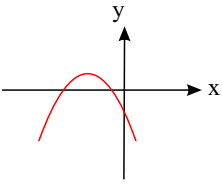
$$\text{هیچ مقداری برای } m \text{ یافت نمی‌شود.} \quad \boxed{۴}$$

$$0 < m < 1 \quad \boxed{۳}$$



پاسخ: گزینه ۴

روش اول: شکل تقریبی سهمی به صورت زیر است:



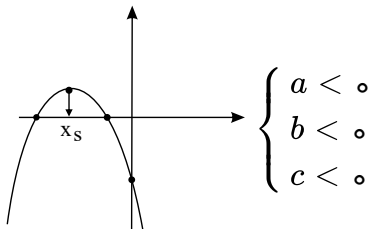
باید معادله $f(x) = 0$ دو ریشه منفی داشته باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(-m)(m-1) > 0 \Rightarrow 4 + 4m^2 - 4m > 0 \Rightarrow \underbrace{m^2 - m + 1}_{\Delta < 0} > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

$$\left. \begin{array}{l} P > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{-m} > 0 \Rightarrow 0 < m < 1 \\ S < 0 \Rightarrow \frac{2}{m} < 0 \Rightarrow m < 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset$$

روش دوم: ابتدا یک تصویر کلی از نمودار رسم می‌نماییم:

با توجه به نمودار داریم:



با توجه به معادله $y = -mx^2 + 2x + m + 1$ پارامتر $b = 2$ بوده و به هیچ وجه با شرایط $b < 0$ سازگار نیست.

توجه: می‌توان علامت a و b و c را به صورت زیر تعیین نمود:

$$f(x) = \overset{\text{تقر}}{\uparrow} a x^2 + \overset{\text{عرض از مبدأ}}{\uparrow} b x + \overset{\text{شیب خط مماس در } x=0}{\downarrow} c$$

۳۱۰. اگر حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی $\frac{x}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{a}{x^2-4}$ برابر $-\frac{3}{2}$ باشد، قدر مطلق

تفاضل جواب‌های معادله کدام است؟

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \frac{5}{2}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{a}{x^2-4} \rightarrow \frac{x(x+2) + (x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{a}{(x+2)(x-2)}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + x^2 + x - 2x - 2 = a \Rightarrow 2x^2 + x - 2 - a = 0$$



$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{-2-a}{2} = \frac{-3}{2} \rightarrow a = 1$$

$a = 1$ را در معادله‌ی درجه‌ی دوم قرار می‌دهیم:

$$2x^2 + x - 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow |1 - (-\frac{3}{2})| = \frac{5}{2}$$

۳۱۱. نقاط $A(k, -1)$ ، $B(2, 3)$ و $C(-1, -1)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر مساحت مثلث برابر ۱۰ باشد، k کدام است؟

۱ $-6, -4$

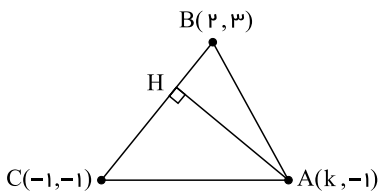
۲ $6, 4$

۳ $6, -4$

۴ $-6, 4$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر با $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.



شکل فرضی فوق را در نظر گرفته، طول ضلع BC و معادله ضلع BC را می‌یابیم:

$$BC = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1-3}{-1-2} = \frac{4}{3} \xrightarrow{C(-1,-1)} y+1 = \frac{4}{3}(x+1)$$

$$\Rightarrow 3y+3 = 4x+4 \Rightarrow 4x-3y+1=0$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} \times AH \times 5 \Rightarrow AH = 4$$

فاصله رأس $A(k, -1)$ تا ضلع BC برابر ۴ است، پس:

$$\frac{|4k - 3(-1) + 1|}{\sqrt{16+9}} = 4 \Rightarrow |4k+4| = 4\sqrt{25} = 20 \Rightarrow 4k+4 = \pm 20 \Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ k=-6 \end{cases}$$

۳۱۲. معادله سه ضلع مثلثی $x=2$ ، $y=-1$ و $y+2x=9$ می‌باشد. معادله میانه وارد بر بلندترین ضلع این مثلث کدام است؟

۱ $y=2x-5$

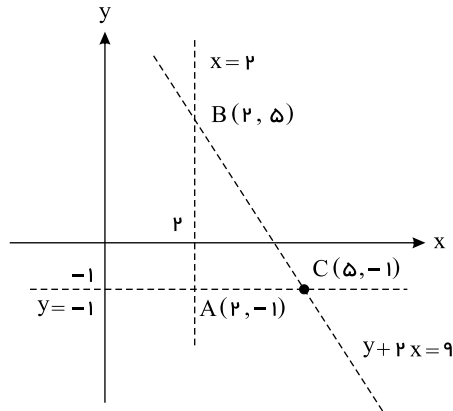
۲ $y=2x-3$

۳ $y=3x-5$

۴ $y=3x-3$



پاسخ: گزینه ۱

مثلث قائم‌الزاویه است و بلندترین ضلع آن BC است.پس معادله AM را می‌خواهیم.

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) = M(3.5, 2)$$

$$m_{AM} = \frac{2}{-1.5} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \text{معادله } AM: y - (-1) = -\frac{4}{3}(x - 3.5) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{14}{3}$$

۳۱۳. در مورد معادله $\frac{1}{\sqrt{x-1}-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 4}$ کدام گزینه درست است؟

۲) دو ریشه حقیقی دارد.

۱) یک ریشه حقیقی کوچک‌تر از ۳ دارد.

۴) جواب حقیقی ندارد.

۳) یک ریشه حقیقی بزرگ‌تر از ۳ دارد.

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا دقت کنیم که $x-1 \geq 0$ و در نتیجه $x \geq 1$ است، اکنون داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{2(x^2 - x - 6)}{(x-2)(x+2)}$$

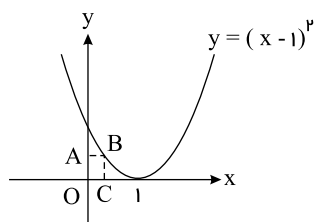
مزدوج

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2} = \frac{2(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} \xrightarrow{x \neq 2, x \neq -2} \sqrt{x-1} = x-3 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x-1 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \checkmark \\ x = 2 \times \end{cases}$$

$$x = 5 \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \checkmark$$

بنابراین معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد که بزرگ‌تر از ۳ است.



۳۱۴. با توجه به شکل مقابل کمترین محیط مستطیل $OABC$ کدام است؟

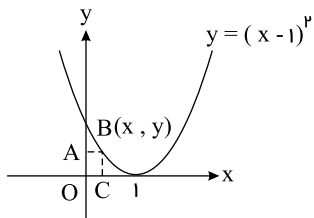
$$\frac{5}{2} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{3}{2} \quad \boxed{۱}$$

$$۳ \quad \boxed{۴}$$

$$۲ \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۱ با فرض $B(x, y)$ داریم:



$$\begin{cases} \text{محیط} : P = 2x + 2y \\ y = (x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow P = 2x + 2(x-1)^2$$

$$P = 2x + 2(x^2 - 2x + 1) = 2x + 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow P = 2x^2 - 2x + 2$$

حال کمترین مقدار P را می‌یابیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{min} = 2 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} + 2$$

$$\Rightarrow P_{min} = \frac{1}{2} - 1 + 2 = \frac{3}{2}$$

۳۱۵. نقاط $A(k, 2)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(1, 5)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر مساحت مثلث برابر $۸\sqrt{2}$

باشد، مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

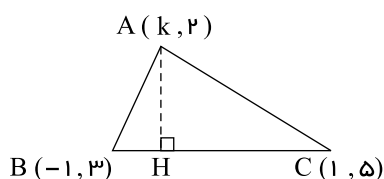
$$-۴\sqrt{2} - ۲ \quad \boxed{۴}$$

$$-۸\sqrt{2} - ۲ \quad \boxed{۳}$$

$$۴\sqrt{2} - ۲ \quad \boxed{۲}$$

$$۸\sqrt{2} + ۲ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ با در نظر گرفتن شکل فرضی مقابل داریم:



$$BC = \sqrt{(1+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow AH = 8$$

فاصله A تا ضلع BC برابر ۸ است. پس معادله ضلع BC را می‌یابیم.



$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5 - 3}{1 - (-1)} = 1 \xrightarrow{B(-1,3)} y - 3 = 1 \times (x + 1) = x + 1 \Rightarrow x - y + 4 = 0$$

$$AH = \frac{|x_A - y_A + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \lambda \Rightarrow \frac{|k - 2 + 4|}{\sqrt{2}} = \lambda \Rightarrow |k + 2| = \lambda\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow k + 2 = \pm \lambda\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \lambda\sqrt{2} - 2 \\ k = -\lambda\sqrt{2} - 2 \end{cases}$$

۳۱۶. ریشه‌های معادله $x^2 - ax + b = 0$ از دو برابر ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 7 = 0$ سه واحد کمتر است، حاصل $a + b$ کدام است؟

$$-27 \quad \boxed{4}$$

$$-28 \quad \boxed{3}$$

$$-37 \quad \boxed{2}$$

$$-38 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 7 = 0$ باشند، داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3, \quad \alpha\beta = \frac{-7}{1} = -7$$

ریشه‌های معادله $x^2 - ax + b = 0$ برابر $2\alpha - 3$ و $2\beta - 3$ هستند و داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 2\alpha - 3 + 2\beta - 3 = 2(\alpha + \beta) - 6 = -\frac{-a}{1} \Rightarrow 2 \times 3 - 6 = a \Rightarrow a = 0$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = (2\alpha - 3)(2\beta - 3) = \frac{b}{1} \Rightarrow 4\alpha\beta - 6\alpha - 6\beta + 9 = b$$

$$\Rightarrow b = 4\alpha\beta - 6(\alpha + \beta) + 9 = 4(-7) - 6 \times 3 + 9$$

$$\Rightarrow b = -28 - 18 + 9 = -46 + 9 = -37$$

$$\Rightarrow a + b = 0 - 37 = -37$$

۳۱۷. اگر دو خط متمایز $(k-1)x + 4y = 5 + k$ و $6x + 2ky - 18 = 0$ بر دو سر یک قطر از دایره عمود باشند، مساحت دایره C کدام است؟

$$\frac{49\pi}{8} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{49\pi}{16} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{49\pi}{3} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{49\pi}{32} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ چون دو خط داده شده بر یک قطر عمودند، پس با هم موازی‌اند و از طرفی چون بر دو سر قطر عمود شده‌اند، پس فاصله این دو خط موازی برابر قطر دایره است. در نتیجه:

$$(k-1)x + 4y = 5 + k \Rightarrow \text{شیب خط} : m_1 = \frac{k-1}{-4}$$

$$6x + 2ky - 18 = 0 \Rightarrow \text{شیب خط} : m_2 = \frac{-6}{2k} = -\frac{3}{k} \Rightarrow \frac{k-1}{-4} = \frac{-3}{k} \Rightarrow k(k-1) = 12$$

$$\Rightarrow k^2 - k - 12 = 0 \Rightarrow (k-4)(k+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 4 \\ k = -3 \end{cases}$$

به‌ازای $k = 4$ دو خط بر هم منطبق هستند، پس $k = 4$ غیرقابل قبول است.



$$k = -3 \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 2 \Rightarrow x - y + \frac{1}{2} = 0 \\ 6x - 6y - 18 = 0 \Rightarrow x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$2R = \frac{|\frac{1}{2} - (-3)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{49\pi}{32}$$

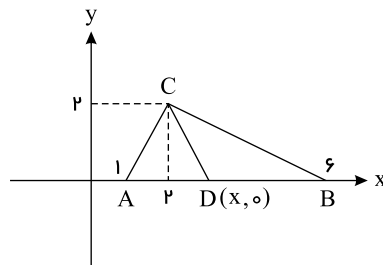
شعاع دایره : $R = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{49\pi}{32}$

۳۱۸. نقاط $A(1, 0)$ ، $B(6, 0)$ و $C(2, 2)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر CD نیمساز داخلی زاویه C باشد، مختصات D کدام است؟ (D محل برخورد نیمساز $\hat{C}$ با ضلع AB است.)

- ☐ ۱ $(\frac{8}{3}, 0)$
 ☐ ۲ $(3, 0)$
 ☐ ۳ $(\frac{10}{3}, 0)$
 ☐ ۴ $(\frac{7}{3}, 0)$

پاسخ: گزینه ۱

گام اول: شکل را رسم می‌کنیم:



گام دوم: معادله خطوط AC و BC را می‌یابیم. فاصله D از هر دو خط برابر است.

$$A(1, 0), C(2, 2) \Rightarrow AC : y - 0 = \frac{2-0}{2-1}(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

$$C(2, 2), B(6, 0) \Rightarrow BC : y - 2 = \frac{0-2}{6-2}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

گام سوم: فاصله $D(x, 0)$ از هر دو خط:

$$\begin{cases} y - 2x + 2 = 0 \\ y + \frac{1}{2}x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{|-2x + 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|\frac{1}{2}x - 3|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}$$

$$\frac{|-2x + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{|x - 6|}{\sqrt{5}} = \begin{cases} -2x + 2 = x - 6 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \\ -2x + 2 = 6 - x \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

با توجه به شکل $x = \frac{8}{3}$ صحیح است.

۳۱۹. در معادله درجه دوم $4x^2 + bx + 1 = 0$ ، مجموع جذر ریشه‌ها برابر با معکوس حاصل ضربشان است. b کدام است؟

- ☐ ۱ -30
 ☐ ۲ 30
 ☐ ۳ -60
 ☐ ۴ 60



پاسخ: گزینه ۳

$$\text{جمع ریشه‌ها} = \alpha + \beta = S = \frac{-b}{4}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \alpha\beta = P = \frac{1}{4}$$

$$\underbrace{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}_{\text{مجموع جذر ریشه‌ها}} = \frac{1}{\underbrace{\alpha\beta}_{\text{معکوس حاصل ضرب ریشه‌ها}}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} \Rightarrow S + 2\sqrt{P} = \frac{1}{P^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-b}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{(\frac{1}{4})^2} \Rightarrow \frac{-b}{4} + 1 = 16 \Rightarrow b = -60$$

۳۲۰. هرگاه نقاط $D \begin{vmatrix} 0 \\ 7 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ دو رأس مقابل لوزی $ABCD$ باشند، خط منطبق بر قطر AC این لوزی، محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

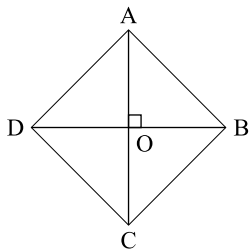
۴,۲۵ (۴)

۴ (۳)

۳,۲۵ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ برای نوشتن معادله قطر AC به یک نقطه و شیب آن نیاز داریم. مختصات نقطه O که وسط پاره خط BD است و شیب آن که به علت عمود بودن بر BD ، قرینه معکوس شیب BD است.



$$m_{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 1}{0 - 3} = -2$$

$$m_{AC} = -\frac{1}{m_{BD}} = \frac{1}{2}$$

$$O \text{ مختصات: } \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 4 \right)$$

$$AC \text{ معادله قطر: } y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{1}{2} \left(x - \frac{3}{2} \right) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \xrightarrow{x=0} y - 4 = 0 - \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{13}{4} = 3,25$$

۳۲۱. کدام یک از معادلات زیر فقط دارای دو ریشه‌ی قرینه می‌باشند؟

$$x^4 + 3x^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^4 - 2x^2 + 5 = 0 \quad (4)$$

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=t} at^2 + bt + c = 0$$

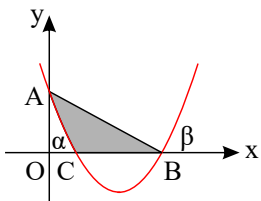


اگر Δ معادله‌ی فوق مثبت باشد. معادله دو ریشه دارد. اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد. دو ریشه‌ی مختلف علامت دارد. لذا با توجه به این که $x^2 = t$ فقط جواب مثبت آن قابل قبول است که دو ریشه‌ی قرینه برای x حاصل می‌شود. پس اگر در معادله‌ی فوق $\frac{c}{a} < 0$ باشد فقط دو ریشه‌ی قرینه دارد. که این شرط فقط در گزینه ی (۳) وجود دارد.

۳۲۲. اگر مساحت مثلثی که راس‌های آن نقاط برخورد منحنی به معادله‌ی $y = x^2 - kx + 1$ با محورهای مختصات است، برابر یک واحد مربع باشد، k کدام است؟

$\pm\sqrt{2}$ (۴) $\pm 2\sqrt{2}$ (۳) ± 4 (۲) ± 2 (۱)

پاسخ: گزینه ۳ به نمودار فرضی زیر توجه کنید: باتوجه به شکل در نقطه‌ی برخورد منحنی با محور y ها، $x = 0$ است.



تابع
 $x = 0 \rightarrow y_A = 1$

نقاط برخورد منحنی با محور x ها هم، همان ریشه‌های تابع هستند. حال برای محاسبه‌ی مساحت مثلث به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S = \frac{(BC)(OA)}{2} \xrightarrow{OA=1} S = \frac{|\alpha - \beta|(1)}{2} = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

چون مساحت مثلث برابر یک است و قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها در تابع درجه‌ی دوم برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است بنابراین:

$$1 = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{2} \Rightarrow 2|a| = \sqrt{\Delta} \Rightarrow 2 = \sqrt{k^2 - 4} \Rightarrow 4 = k^2 - 4 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$$

۳۲۳. معادلات دو ضلع یک مستطیل به صورت $3x - y = 0$ و $4y - 12x = 6$ می‌باشد. اگر عرض این مستطیل نصف طول مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام می‌تواند باشد؟

$\frac{9}{80}$ (۱) $\frac{2}{20}$ (۲) $\frac{3}{40}$ (۳) $\frac{7}{20}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$3x - y = 0 \rightarrow m = 3 \quad \text{و} \quad 4y - 12x = 6 \rightarrow m' = 3$$

چون این دو ضلع با هم موازی هستند (شیب‌هایشان با هم برابر است) کافی است فاصله این دو ضلع را از هم حساب کنیم که یا طول مستطیل یا عرض مستطیل به دست می‌آید (معلوم نیست) و می‌دانیم برای محاسبه فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می‌شود. (ضرایب x, y در هر دو معادله خط باید یکسان باشند).

$$4y - 12x = 6 \rightarrow 12x - 4y + 6 = 0 \quad \text{و} \quad 3x - y = 0 \rightarrow 12x - 4y = 0$$

$$\text{فاصله دو ضلع} = \frac{|6 - 0|}{\sqrt{144 + 16}} = \frac{6}{\sqrt{160}} = \frac{6}{4\sqrt{10}} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

$$\text{عرض} = \frac{3}{2\sqrt{10}} \rightarrow \text{طول} = \frac{6}{2\sqrt{10}} \rightarrow S = \left(\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)\left(\frac{6}{2\sqrt{10}}\right) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

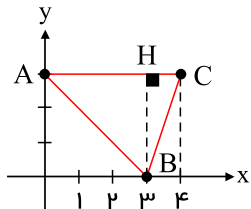


$$\text{طول} = \frac{3}{2\sqrt{10}} \rightarrow \text{عرض} = \frac{3}{4\sqrt{10}} \rightarrow S = \left(\frac{3}{2\sqrt{10}}\right)\left(\frac{3}{4\sqrt{10}}\right) = \frac{9}{80}$$

۳۲۴. سه نقطه $A|_3^0$ و $B|_0^3$ و $C|_3^4$ سه رأس مثلث ABC هستند. محل برخورد سه ارتفاع مثلث کدام است؟

- ☐ ۱ $|_3^0$
 ☐ ۲ $|_2^3$
 ☐ ۳ $|_3^2$
 ☐ ۴ $|_1^6$

پاسخ: گزینه ۲



با داشتن سه نقطه A ، B و C مثلث را رسم می‌کنیم.

از روی شکل واضح است که حتماً محل تلاقی ارتفاع‌ها روی خط $x = 3$ است و در گزینه‌ها تنها نقطه‌ای که طولش برابر ۳ باشد، گزینه ۲ است.

البته راه حل کلی این تست این است که معادله دو ارتفاع دلخواه را نوشته و سپس آنها را با هم تلاقی دهیم.

$$m_{BC} = \frac{3-0}{4-3} = 3 \Rightarrow m_{AK} = -\frac{1}{3} \Rightarrow (\text{ارتفاع } AK) \ y = -\frac{1}{3}x + 3$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{3}x + 3 \end{cases} \Rightarrow y = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \text{نقطه برخورد ارتفاع‌ها } (3, 2) \text{ است.}$$

۳۲۵. اگر جواب‌های معادله‌ی $\frac{a}{x^2 + 2x - 3} + \frac{a}{2x - 2} = \frac{x - 1}{x^2 + x - 6}$ برابر ۳ و β باشد، آنگاه $\beta^2 + \beta$ کدام است؟

- ☐ ۱ ۲۰
 ☐ ۲ ۱۲
 ☐ ۳ ۳۰
 ☐ ۴ ۱۶

پاسخ: گزینه ۱ $x = 3$ جواب معادله است بنابراین در معادله صدق می‌کند.

$$x = 3 \xrightarrow{\text{معادله}} \frac{a}{9 + 6 - 3} + \frac{a}{6 - 2} = \frac{3 - 1}{9 + 3 - 6} \rightarrow \frac{a}{12} + \frac{a}{4} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 12} a + 3a = 4 \rightarrow 4a = 4 \rightarrow a = 1$$

حال، $a = 1$ را در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$a = 1 \rightarrow \frac{1}{(x+3)(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)} = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} \xrightarrow{\times 2(x+3)(x-1)(x-2)} 2x - 4 + (x+3)(x-2) = 2(x-1)^2$$

$$\rightarrow 2x - 4 + x^2 - 2x + 3x - 6 = 2x^2 - 4x + 2 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow (x-4)(x-3) = 0 \rightarrow x = 3, x = 4$$

بنابراین $\beta = 4$ است پس $\beta^2 + \beta = 16 + 4 = 20$ است.

۳۲۶. اگر مجموع مجذورات سه ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(x-2)(x^2 + mx + m + 3) = 0$ برابر ۱۳ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m چند عضو دارد؟

- ☐ ۱ صفر
 ☐ ۲ یک
 ☐ ۳ دو
 ☐ ۴ سه

پاسخ: گزینه ۲

$$(x-2)(x^2 + mx + m + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + mx + m + 3 = 0 \end{cases}$$

یک ریشه‌ی معادله $x = 2$ است و اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + mx + m + 3 = 0$ را α و β در نظر بگیریم طبق صورت



مسأله ۱۳ $\alpha^2 + \beta^2 + 2^2 = 13$ است.
مجموع مجزورات ریشه‌ها

$$\alpha^2 + \beta^2 + 4 = 13 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 9 \rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 \xrightarrow[\alpha\beta = \frac{c}{a} = m+3]{\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -m}$$

$$m^2 - 2(m+3) = 9 \rightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \rightarrow (m-5)(m+3) = 0$$

ریشه‌ی حقیقی ندارد $\rightarrow \begin{cases} m = 5 \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^2 + 5x + 8 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 32 < 0 \\ m = -3 \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow x = 0, x = 3 \end{cases}$
بنابراین فقط $m = -3$ قابل قبول است.

۳۲۷. به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 + 2(x+a) - 1$ در ربع سوم قرار دارد؟

$$\boxed{1} \quad -1 < a < \frac{1}{2} \quad \boxed{2} \quad -\frac{1}{2} < a < 1 \quad \boxed{3} \quad 0 < a < 1 \quad \boxed{4} \quad a > 0$$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا تابع درجه‌ی دوم داده شده را به صورت $f(x) = ax^2 + 2x + 2a - 1$ مرتب می‌کنیم. چون تابع درجه‌ی دوم دارای Min است بنابراین ضریب x^2 باید مثبت باشد یعنی $a > 0$ است (I). چون تابع دارای Min است و در ربع سوم قرار دارد پس محور x ها را در دو نقطه‌ی متمایز قطع می‌کند یعنی $\Delta > 0$ است.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 4 - 4a(2a-1) > 0 \rightarrow 4 - 8a^2 + 4a > 0$$

$$\rightarrow 8a^2 - 4a - 4 < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -\frac{1}{2} & 1 & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & + \end{array} \rightarrow \frac{-1}{2} < a < 1 : II$$

از اشتراک I و II به جواب $0 < a < 1$ می‌رسیم.

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $-\frac{b}{2a}$ نیز باید منفی باشد.

$$\frac{-b}{2a} < 0 \rightarrow \frac{-2}{2a} < 0 \rightarrow 0 < a < 1 \text{ است.}$$

۳۲۸. به ازای چند مقدار m دسته خطوط به معادله $(m+1)x = (2m+2)y + m$ با یکدیگر موازی می‌باشد؟ ($m \neq -1$)

$$\boxed{1} \quad \text{یک} \quad \boxed{2} \quad \text{دو} \quad \boxed{3} \quad \text{صفر} \quad \boxed{4} \quad \text{بی‌شمار}$$

پاسخ: گزینه ۴ بهتر است ابتدا معامله را به فرم استاندارد $y = ax + b$ تبدیل نمائیم.

$$(m+1)x = (2m+2)y + m \rightarrow (2m+2)y = (m+1)x - m$$

$$\xrightarrow{\div (2m+2)} y = \frac{(m+1)}{2(m+1)}x - \frac{m}{(2m+2)} \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{m}{2m+2}$$

شیب دسته خطوط مستقل از مقدار m است و فقط عرض از مبدأ آن‌ها متفاوت است. یعنی تمام خطوط به ازای جمیع مقادیر m با هم موازی



هستند.

۳۲۹. خطوط به معادله $(m+1)x + (2m-4)y = 6$ از نقطه ثابت $A \left| \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right.$ عبور می‌نمایند. $a^2 + b^2$

کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ چون همه خطوط به ازای مقادیر مختلف m از یک نقطه ثابت عبور می‌نمایند، می‌توان با اختصاص دو مقدار به m مختصات نقطه A را محاسبه نمود:

$$(m+1)x + (2m-4)y = 6$$

$$m = -1 \rightarrow -6y = 6 \rightarrow y = -1 \Rightarrow A(2, -1) \rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

$$m = 2 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

۳۳۰. از نقطه‌ی $A(0, 2)$ خطی بر منحنی $x^2 + y^2 = 1$ مماس کرده‌ایم مجموع شیب خطوط مماس کدام است؟

 $\sqrt{2}$ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی خط مماس را با شیب مجهول m می‌نویسیم.

$$y - 2 = m(x - 0) \rightarrow y = mx + 2$$

حال معادله‌ی برخورد خط و منحنی را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx + 2 \end{cases} \rightarrow x^2 + (mx + 2)^2 = 1 \rightarrow x^2 + m^2 x^2 + 4mx + 4 = 1$$

$$(m^2 + 1)x^2 + 4mx + 3 = 0$$

$$\Delta = 0$$

چون منحنی و خط به هم مماس شده‌اند پس

$$\Delta = 16m^2 - 4(m^2 + 1)(3) = 0 \rightarrow 16m^2 - 12m^2 - 12 = 0$$

$$4m^2 = 12 \rightarrow m^2 = 3 \rightarrow m = \pm\sqrt{3}$$

پس مجموع مقادیر m برابر صفر است.

۳۳۱. مجموع ریشه‌های معادله $(x^2 - 1)^2 - 4x^2 + 7 = 0$ کدام است؟

 $2 + \sqrt{2}$ (۴) $4 + 2\sqrt{2}$ (۳)

ریشه ندارد (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۱ راه اول:

$$(x^2 - 1)^2 - 4x^2 + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x^4 + 1 - 2x^2) - 4x^2 + 7 = 0 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2=t} t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-4) = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} + 2 - 2 = 0 \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = 0$$

نکته: مجموع ریشه‌های معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$ در صورت وجود صفر است.

راه دوم: می‌توان با تغییر متغیر معادله را به فرم ساده‌تری تبدیل کرد.

$$(x^2 - 1)^2 - 4x^2 + 7 = 0 \rightarrow (x^2 - 1)^2 - 4x^2 + 4 + 3 = 0$$

$$\rightarrow (x^2 - 1)^2 - 4(x^2 - 1) + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{x^2-1=t} t^2 - 4t + 3 = 0 \rightarrow (t-1)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$x^2 - 1 = 3 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

مجموع ریشه‌های حاصل صفر می‌باشد.

۳۳۲. اگر α, β ریشه‌های معادله $-3x^2 - 4x + 6 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت

$\{3\alpha - 1, 3\beta - 1\}$ است؟

$$x^2 - 6x - 13 = 0 \quad \boxed{۲}$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \boxed{۱}$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \quad \boxed{۴}$$

$$x^2 + 6x - 13 = 0 \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۳ برای محاسبه معادله جدید ابتدا S و P معادله اولیه را محاسبه می‌کنیم.

$$-3x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-4)}{-3} = -\frac{4}{3} \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{6}{-3} = -2 \end{cases}$$

حال S و P معادله مجهول را بررسی می‌نماییم.

$$S = (3\alpha - 1) + (3\beta - 1) = 3(\alpha + \beta) - 2 = 3\left(-\frac{4}{3}\right) - 2 = -6$$

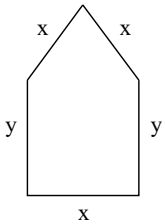
$$P = (3\alpha - 1)(3\beta - 1) = 9\alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 1 = 9(-2) - 3\left(-\frac{4}{3}\right) + 1 = -13$$

حال با رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ معادله را می‌نویسیم:

$$x^2 - (-6)x + (-13) = 0 \rightarrow x^2 + 6x - 13 = 0$$



۳۳۳. می‌خواهیم پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع در بالای آن بسازیم. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، ابعاد مستطیل چند متر باشد تا پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد؟ ($\frac{\sqrt{3}}{4}$ را ۰٫۵ فرض کنید)



$$\frac{3}{4}, \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5}, \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲ برای حداکثر نوردهی باید مساحت max باشد. لذا ابتدا باید معادله‌ای بسازیم که بیانگر مساحت بر حسب x یا y باشد.

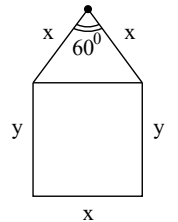
$$\text{محیط پنجره} = 6 \rightarrow 3x + 2y = 6 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$S = S_{\text{مستطیل}} + S_{\text{مثلث}}$$

$$S = x \cdot y + \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$S = x \cdot \left(-\frac{3}{2}x + 3\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \xrightarrow{\frac{\sqrt{3}}{4} = 0.5} S = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + 0.5x^2$$

$$\Rightarrow S = -x^2 + 3x$$



با توجه به معادله مساحت که تابع درجه ۲ شده است، کافیست رأس سهمی را تعیین نماییم.

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 = -\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{3}{4}$$

۳۳۴. اگر $x = 2$ یکی از ریشه‌های معادله $\frac{a}{x+1} = \frac{a-2x}{x^3+1} + \frac{3a-1}{x^2-x+1}$ باشد، ریشه دیگر این

معادله کدام است؟

$$x = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$x = -1 \quad (1)$$

$$\text{معادله ریشه دیگری ندارد.} \quad (4)$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴ ریشه‌های معادله در معادله صدق می‌نماید، قدم اول جایگذاری ریشه در معادله می‌باشد.

$$\frac{a}{x+1} = \frac{a-2x}{x^3+1} + \frac{3a-1}{x^2-x+1}$$

$$\xrightarrow{x=2} \frac{a}{3} = \frac{a-4}{9} + \frac{3a-1}{3} \xrightarrow{\times 9} 3a = a-4 + 9a-3 \rightarrow 7 = 7a \rightarrow a = 1$$

حال $a = 1$ را در معادله قرار می‌دهیم و معادله را به طور کامل حل می‌نماییم.



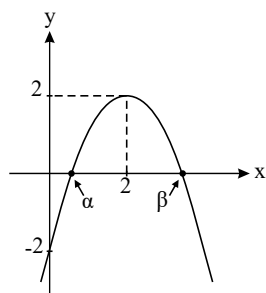
$$\frac{1}{x+1} = \frac{1-2x}{x^3+1} + \frac{2}{x^2-x+1} \rightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1-2x}{x^3+1}$$

$$\frac{(x^2-x+1) - 2(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1-2x}{x^3+1} \rightarrow \frac{x^2-3x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1-2x}{x^3+1} \rightarrow$$

$$x^2-3x-1 = 1-2x \rightarrow x^2-x-2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

ریشه $x = -1$ مخرج عبارت را صفر می‌نماید پس معادله ریشه دیگری ندارد.

۳۳۵. با توجه به نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حاصل عبارت $\alpha\beta^3 + 2\alpha^2$ کدام است؟



۲۴ (۱)

۴۲ (۲)

۱۲ (۳)

۴۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(0) = -2 \rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = -2 \rightarrow \boxed{c = -2}$$

$$f(2) = 2 \rightarrow a(2)^2 + b(2) + c = 2 \rightarrow 4a + 2b = 4$$

$$x_s = 2 \rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow -b = 4a$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 4a = -b \end{cases} \rightarrow -b + 2b = 4 \rightarrow \boxed{b = 4}, \boxed{a = -1}$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 2 = 0 \rightarrow \alpha, \beta \text{ ریشه‌های سهمی } f(x) \text{ است.} \rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{4}{-1} = 4 \\ P = \alpha\beta = \frac{-2}{-1} = 2 \end{cases}$$

$$\alpha\beta^3 + 2\alpha^2 = \alpha\beta(\beta^2) + 2\alpha^2 = 2\beta^2 + 2\alpha^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= 2(S^2 - 2P) = 2(4^2 - 2(2)) = 2(16 - 4) = 24$$

۳۳۶. اختلاف مربعات ریشه‌های معادله $\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-3} = -1$ کدام است؟

۸ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-3} = -1 \rightarrow \sqrt{x-2} + 1 = \sqrt{2x-3}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x - 2 + 1 + 2\sqrt{x-2} = 2x - 3 \rightarrow x - 1 + 2\sqrt{x-2} = 2x - 3$$



$$\rightarrow 2\sqrt{x-2} = x-2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(x-2) = x^2 - 4x + 4$$

$$\rightarrow 4x - 8 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=6 \end{cases}$$

$$\text{اختلاف مربعات ریشه‌ها} = 6^2 - 2^2 = 32$$

۳۳۷. نقطه $A(7, 6 - \sqrt{5})$ و نقطه A' دو سر قطر یک مربع هستند. اگر نقطه $(9, 6)$ وسط AA' باشد، مساحت این مربع کدام است؟

۱۴ (۴)

۹ (۳)

۱۸ (۲)

۳۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ نقطه $O(9, 6)$ وسط قطر AA' است، پس داریم:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \rightarrow 9 = \frac{7 + x_{A'}}{2} \rightarrow x_{A'} = 11 \\ y_O = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \rightarrow 6 = \frac{6 - \sqrt{5} + y_{A'}}{2} = 6 + \sqrt{5} \end{cases} \rightarrow A'(11, 6 + \sqrt{5})$$

اکنون طول پاره‌خط AA' که قطر مربع (d) است را به دست می‌آوریم:

$$d = AA' = \sqrt{(11-7)^2 + (6 + \sqrt{5} - 6 + \sqrt{5})^2} = \sqrt{16 + 20} = \sqrt{36} \rightarrow d = 6$$

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{36}{2} = 18 \quad \text{مساحت مربع}$$

۳۳۸. مختصات سه رأس یک متوازی‌الاضلاع $(0, 1)$ ، $(2, 1)$ و $(1, 0)$ می‌باشند. مختصات رأس چهارم آن کدام یک از گزینه‌ها نمی‌تواند باشد؟

(۱, ۳) (۴)

(۳, ۰) (۳)

(-۱, ۰) (۲)

(۱, ۲) (۱)

پاسخ: گزینه ۴ اگر $A = (0, 1)$ ، $B = (2, 1)$ و $C = (1, 0)$ باشد، چون در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگر می‌باشند، طبق این نکته، نقطه چهارم متوازی‌الاضلاع می‌تواند سه نقطه D_1 ، D_2 و D_3 با مختصات زیر باشد:

$$D_1 = A + B - C = (0, 1) + (2, 1) - (1, 0) = (1, 2)$$

$$D_2 = A + C - B = (0, 1) + (1, 0) - (2, 1) = (-1, 0)$$

$$D_3 = B + C - A = (2, 1) + (1, 0) - (0, 1) = (3, 0)$$

پس تنها نقطه‌ای که نمی‌تواند رأس متوازی‌الاضلاع باشد نقطه $(1, 3)$ است.

۳۳۹. اگر $x = -2$ تنها صفر تابع $f(x) = x^2 + bx + c$ باشد، حاصل $f(b-c)$ کدام است؟

۲۵ (۴)

۴ (۳)

۱۰۰ (۲)

۲ (۱)



پاسخ: گزینه ۳ اگر تنها صفر تابع درجه دوم $x = -2$ باشد، تابع به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = a'(x + 2)^2 \xrightarrow{\text{مقایسه با } f(x) = x^2 + bx + c} a' = 1$$

پس تابع به صورت زیر است.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4 \\ f(x) &= x^2 + bx + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 4, c = 4$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow f(b - c) = f(0) = 4$$

۳۴۰. دو سر قطر یک مربع روی دو خط $\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ است. مساحت کوچکترین مربع ممکن چقدر است؟

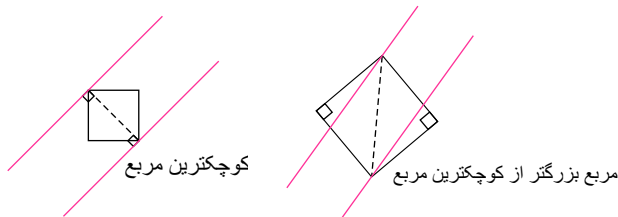
$$\frac{1}{40} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{1}{20} \quad \boxed{۳}$$

$$\frac{1}{10} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{1}{4} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴ راهنمایی: کوچکترین مساحت مربوط به کوتاهترین قطر است و کوتاهترین فاصله بین دو نقطه از دو خط موازی، همان فاصله بین دو خط است:



اول: طبق راهنمایی دو خط داده شده موازی هستند. کوتاهترین قطر، فاصله بین دو خط موازی است.

دوم: فاصله بین دو خط موازی را می‌یابیم:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow 2x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بین خطوط} = \frac{|6 - 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

سوم: اگر قطر یک مربع d باشد، مساحت آن $\frac{d^2}{2}$ است.

$$S = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^2}{2} = \frac{1}{40}$$

۳۴۱. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^4 + 28\beta$ کدام است؟

$$102 \quad \boxed{۴}$$

$$101 \quad \boxed{۳}$$

$$100 \quad \boxed{۲}$$

$$99 \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: α ریشه معادله است. پس در آن صدق می‌کند.

اول: طبق راهنمایی α را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 5 \Rightarrow \alpha^4 = (2\alpha + 5)^2 = 4\alpha^2 + 20\alpha + 25$$



دوباره جای α^2 مقدار $2\alpha + 5$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$4\alpha^2 + 20\alpha + 25 = 4(2\alpha + 5) + 20\alpha + 25 = 28\alpha + 45$$

دوم: محاسبه مقدار خواسته شده:

$$\alpha^2 + 28\beta = 28\alpha + 28\beta + 45 = 28(\alpha + \beta) + 45$$

مقدار $2 = \alpha + \beta$ است. پس:

$$28(2) + 45 = 56 + 45 = 101$$

۳۴۲. اگر از دامنه تابع $f(x) = -3x^2 + ax + 1$ ، $x = 1$ را حذف کنیم، $y = b$ از برد آن حذف می‌شود. $a - b$ کدام است؟

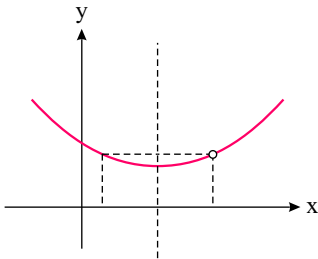
۴ (۴) -۴

۴ (۳) ۴

۲ (۲) ۲

-۲ (۱) -۲

پاسخ: گزینه ۲ راهنمایی: اگر یک عدد حقیقی از دامنه تابع درجه دوم حذف کنید، عددی از مجموعه برد آن حذف نخواهد شد مگر آنکه عدد حذف شده از دامنه، طول رأس سهمی باشد.



اول: دقت کنید که حذف یک عدد از دامنه تابع درجه دوم، منجر به حذف عددی از برد نخواهد شد، چون نقطه متقارن آن نسبت به محور تقارن، همان عدد را تولید خواهد کرد.

مگر اینکه عدد حذف شده طول رأس سهمی باشد که در این صورت عضوی هم از برد تابع حذف می‌شود.

دوم: پس $x = 1$ طول رأس سهمی است و $y = b$ عرض رأس سهمی:

$$1 = \frac{-a}{2(-3)} \Rightarrow a = 6 \text{ و } b = \frac{-\Delta}{4(-3)} \Rightarrow b = -\frac{36 - 4(-3)(1)}{-12} = 4$$

پس مقدار $a - b = 2$ است.

۳۴۳. نقاط $(0, 0)$ ، $(0, 2)$ و $(4, 0)$ مختصات رئوس مثلث قائم‌الزاویه ABC هستند. اگر M و H پای میانه و ارتفاع وارد بر وتر باشند، طول MH چقدر است؟

$\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (۴)

$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (۳)

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

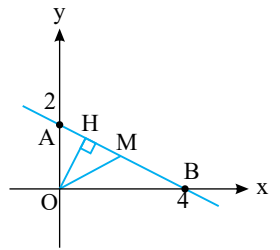
پاسخ: گزینه ۳ راه حل اول:



$$M = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (2, 1)$$

$$AB \text{ معادله خط } : y - 0 = \frac{0-2}{4-0}(x-4) \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 2$$

$$m_{OH} = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$



$$OH \text{ معادله خط } : y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$$

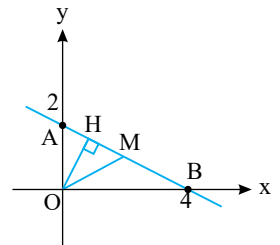
از تلاقی دو خط OH و AB مختصات نقطه H را به دست آورید.

$$2x = \frac{-x}{2} + 2 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow H = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5} \right)$$

$$HM = \sqrt{\left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

راه حل دوم: در مثلث قائم الزاویه طول میانه وارد بر وتر برابر نصف طول وتر است. طول وتر از رابطه فیثاغورس برابر است با:

$$AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



پس $OM = \sqrt{5}$ است. ضمناً ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب اضلاع قائم تقسیم بر وتر:

$$OH = \frac{2 \times 4}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

بنابراین با نوشتن رابطه فیثاغورس در مثلث OHM داریم:

$$HM = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{5 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

۳۴۴. اگر عبارت $ax^2 - bx + b$ همواره منفی باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۱) $(0, 4)$ ۲) $(-4, 0)$ ۳) $(0, 1)$ ۴) $(-1, 0)$

پاسخ: گزینه ۱ باید ضریب x^2 و Δ هر دو منفی باشند تا عبارت درجه دوم همواره منفی باشد. بنابراین $a < 0$

$$\Delta = b^2 - 4ab < 0 \Rightarrow b(b - 4a) < 0$$

b	$4a$	0
$b(b - 4a)$	$+$	$-$
	$+$	$+$

با توجه به جدول تعیین علامت بالا باید $4a < b < 0$ پس با توجه به منفی بودن a داریم:

$$\frac{4a}{a} > \frac{b}{a} > \frac{0}{a}$$

$$4 > \frac{b}{a} > 0$$



یعنی $\frac{b}{a} \in (0, 4)$

۳۴۵. به ازای کدام مقادیر a نمودار تابع $f(x) = x^2 + (1 - 2a)x + a^2 - 1$ فقط از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی گذرد؟

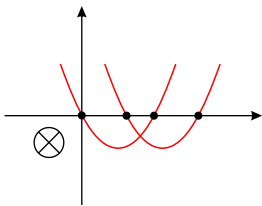
۲ $[1, +\infty)$

۱ $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

۴ $[1, \frac{5}{4})$

۳ $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، برای اینکه نمودار فقط از ناحیه سوم نگذرد باید شرایط زیر را داشته باشد:

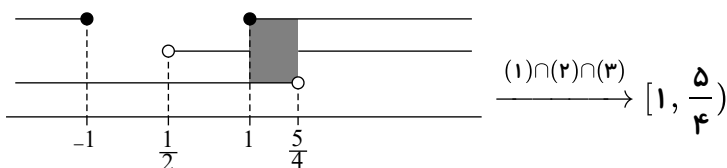


$$1) \Delta = b'^2 - 4a'c' > 0 \Rightarrow (1 - 2a)^2 - 4(1)(a^2 - 1) > 0 \Rightarrow 1 - 4a + 4a^2 - 4a^2 + 4 > 0 \Rightarrow 4a < 5 \\ \Rightarrow a < \frac{5}{4} \quad (1)$$

$$2) S > 0 \Rightarrow -\frac{b'}{a'} - \frac{1 - 2a}{1} > 0 \Rightarrow -1 + 2a > 0 \Rightarrow 2a > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$3) P \geq 0 \Rightarrow \frac{c'}{a'} \frac{a'^2 - 1}{1} \geq 0 \Rightarrow a'^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow a'^2 \geq 1 \Rightarrow a \geq 1 \text{ یا } a \leq -1 \quad (3)$$

سه شرط بالا را مطابق نمودار زیر را اشتراک می گیریم؛ داریم:



۳۴۶. اگر تابع درجه دوم $y = f(x)$ محور x ها را در دو نقطه به طول ۳ و ۱ قطع کند و با خط $y = x - 3$ در نقطه ای به طول ۲ متقاطع باشد آن گاه تابع $y = f(x - 3) + 1$ محور y ها را در نقطه ای با کدام عرض قطع می کند؟

۳۵ $\boxed{4}$

۳۰ $\boxed{3}$

۲۵ $\boxed{2}$

۲۰ $\boxed{1}$

پاسخ: گزینه ۲ اگر تابع درجه دوم محور x ها را در دو نقطه به طول های x_1 و x_2 قطع کند معادله تابع درجه دوم به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ خواهد بود. بنابراین معادله تابع درجه دوم به صورت زیر خواهد بود.



$$f(x) = a(x-1)(x-3)$$

چون تابع f و خط $y = x - 3$ در نقطه به طول $x = 2$ متقاطع اند، لذا:

$$y = x - 3 \xrightarrow{x=2} y = 2 - 3 = -1 \Rightarrow (2, -1) \text{ نقطه تقاطع}$$

بنابراین نقطه $(2, -1)$ روی نمودار تابع درجه دوم قرار دارد.

$$f(x) = a(x-1)(x-3) \xrightarrow{(2,-1)} -1 = a(2-1)(2-3) \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x-3) \Rightarrow y = f(x-3) + 1 = (x-3-1)(x-3-3) + 1$$

$$\Rightarrow y = f(x-3) + 1 = (x-4)(x-6) + 1$$

برای پیدا کردن نقطه برخورد تابع با محور y ها، به جای x صفر قرار می‌دهیم.

$$x = 0 \rightarrow y = (0-4)(0-6) + 1 = 25$$

۳۴۷. خط $y = (m+2)x + n$ از نقطه $A(1, 6)$ می‌گذرد و مساحت محدود به این خط و محورهای

مختصات برابر ۴ است. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

$$16 \quad \boxed{4}$$

$$-4 \quad \boxed{3}$$

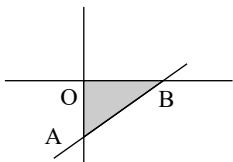
$$-8 \quad \boxed{2}$$

$$12 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ نکته: اگر خط d ، محورهای مختصات را در نقاط $A(0, y)$ و $B(x, 0)$ قطع کند مساحت محدود به این تابع و محورهای

مختصات برابر $S = \frac{1}{2}|xy|$ است.

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}|xy|$$



$$\text{روی خط است } A(1, 6) \Rightarrow 6 = (m+2)(1) + n \Rightarrow 6 = m + 2 + n \Rightarrow n = 4 - m$$

$$y = (m+2)x + (4-m) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 : y = 4 - m \\ y = 0 : x = -\frac{4-m}{m+2} \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} |-(4-m)\left(\frac{4-m}{m+2}\right)| = \frac{1}{2} \left| \frac{(4-m)^2}{m+2} \right| = 4 \Rightarrow 8 = \left| \frac{16 - 8m + m^2}{m+2} \right|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8(m+2) = 16 - 8m + m^2 \Rightarrow m^2 - 16m = 0 \Rightarrow m = 0, m = 16 \\ -8(m+2) = 16 - 8m + m^2 \Rightarrow m^2 + 32 = 0 \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر m برابر ۱۶ می‌باشد.

۳۴۸. به ازای دو مقدار m ، سه خط $y = x + 1$ و $y = 2x + m$ و $y = (m-4)x - m$ از نقطه A

می‌گذرند (در نقطه A هم‌رس‌اند). اختلاف دو مقدار m کدام است؟

$$7 \quad \boxed{4}$$

$$5 \quad \boxed{3}$$

$$3 \quad \boxed{2}$$

$$1 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا محل تقاطع دو خط $y = x + 1$ و $y = 2x + m$ را به دست آورده و سپس نقطه به دست آمده را در خط



$y = (m - 4)x - m$ صدق می‌دهیم.

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + m \end{cases} \Rightarrow 2x + m = x + 1 \Rightarrow x = 1 - m \Rightarrow y = 1 - m + 1 \Rightarrow A \left| \begin{matrix} 1 - m \\ 2 - m \end{matrix} \right.$$

$$\text{مختصات } A: \begin{cases} A(1 - m, 2 - m) \\ y = (m - 4)x - m \end{cases} \Rightarrow 2 - m = (m - 4)(1 - m) - m$$

$$\Rightarrow 2 - m = m - m^2 - 4 + 4m - m \Rightarrow m^2 - 5m + 6 = (m - 2)(m - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \text{اختلاف دو مقدار } m \text{ برابر ۱ می‌باشد.}$$

۳۴۹. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله به صورت $\{$

$$\frac{\beta}{(\alpha + 1)^2}, \frac{\alpha}{(\beta + 1)^2} \text{ است؟}$$

$$x^2 - 46x + 4 = 0 \quad \boxed{۲}$$

$$x^2 - 58x - 4 = 0 \quad \boxed{۱}$$

$$x^2 - 58x + 4 = 0 \quad \boxed{۴}$$

$$x^2 - 46x - 4 = 0 \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۱ نکته: اگر جمع دو عدد S و ضرب آن‌ها P باشد، آن دو عدد ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشند.

نکته: اگر $\alpha + \beta = S$ و $\alpha \cdot \beta = P$ آنگاه: $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$ و $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2 \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

$$S_{\text{جدید}} = \frac{\beta}{(\alpha + 1)^2} + \frac{\alpha}{(\beta + 1)^2} = \frac{\beta(\beta + 1)^2 + \alpha(\alpha + 1)^2}{(\alpha + 1)^2(\beta + 1)^2} = \frac{\beta^3 + 2\beta^2 + \beta + \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha}{(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)^2}$$

می‌دانیم: $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 4 + 8 = 12$ و $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 8 + 24 = 32$ است.

$$\begin{cases} S_{\text{جدید}} = \frac{(\alpha^3 + \beta^3) + 2(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha + \beta)}{(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)^2} = \frac{32 + 24 + 2}{(-4 + 2 + 1)^2} = 58 \\ P_{\text{جدید}} = \frac{\beta}{(\alpha + 1)^2} \times \frac{\alpha}{(\beta + 1)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)^2} = -4 \end{cases}$$

پس معادله جدید به صورت $x^2 - 58x - 4 = 0$ می‌باشد.

۳۵۰. یک ضلع مربعی به مساحت ۱۶، روی خط $3x + 4y = c$ با شرط $c < 0$ قرار دارد. اگر نقطه $A(2, 3)$

رأس مقابل به این ضلع باشد، مقدار $c^2 + 4c + 1$ کدام است؟

$$-18 \quad \boxed{۴}$$

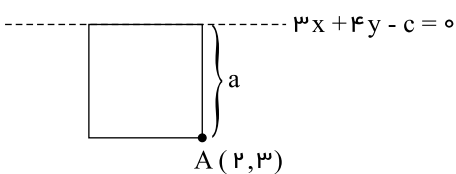
$$18 \quad \boxed{۳}$$

$$-3 \quad \boxed{۲}$$

$$3 \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

شکل زیر را با توجه به اطلاعات مسئله رسم می‌کنیم:



فاصله نقطه A تا خط $3x + 4y - c = 0$ همان ضلع مربع است.

چون مساحت مربع ۱۶ است، پس هر ضلع مربع ۴ است. بنابراین:

$$a = \frac{|3(2) + 4(3) - c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|6 + 12 - c|}{\sqrt{25}} = 4$$

$$\Rightarrow |18 - c| = 20 \Rightarrow \begin{cases} 18 - c = 20 \Rightarrow c = -2 \\ 18 - c = -20 \Rightarrow c = 38 \end{cases} \xrightarrow{c < 0} c = -2$$

$$\Rightarrow c^2 + 4c + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$$