

۱. در معادله‌ی $x^2 - 5x - 1 = 0$ حاصل $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$ کدام است؟ (x_1, x_2) ریشه‌های معادله هستند

۱۱۰ (۴)

-۱۴۰ (۳)

۱۴۰ (۲)

۱۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -1, S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 5$$

$$\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1x_2)^2} = \frac{125 + 15}{1} = 140$$

۲. نقطه‌ای روی خط $y = 2x - 1$ وجود دارد که از دو نقطه‌ی $A(0, 1)$ و $B(2, -1)$ به یک فاصله است. مجموع طول و عرض آن کدام گزینه است؟

$\sqrt{5}$ (۴)

+۱ (۳)

-۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ فرض کنیم طول نقطه‌ی مورد نظر $x = \alpha$ باشد. با توجه به اینکه روی خط $y = 2x - 1$ قرار دارد مختصات نقطه‌ی $C(\alpha, 2\alpha - 1)$ خواهد بود. حال فاصله‌ی نقاط A و B را تا نقطه‌ی مورد نظر محاسبه می‌کنیم و برابر هم قرار می‌دهیم.

$$|AC| = |BC| \rightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 1 - 1)^2} = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (2\alpha - 1 + 1)^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4} = \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 4\alpha^2} \Rightarrow 5\alpha^2 - 8\alpha + 4 = 5\alpha^2 - 4\alpha + 4 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow C(0, -1)$$

مجموع طول و عرض آن -۱ است.

۳. خط $5x - 12y + 3 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $(2, 0)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

2π (۴)

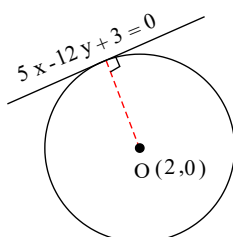
$3\frac{\pi}{2}$ (۳)

π (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

فاصله‌ی مرکز دایره تا این خط برابر شعاع دایره خواهد بود. لذا داریم





$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + C|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5(2) - 12(0) + 3|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

$$S = \pi r^2 = \pi(1)^2 = \pi$$

۴. اگر یک ریشه‌ی معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(3-x)^2} = \frac{104}{25}$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه ریشه‌ی دیگر معادله کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ برای حل طرف اول معادله را $f(x)$ فرض می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(3-x)^2}$$

باتوجه به فرض داریم:

$$f(x) = f(3-x)$$

لذا اگر α ریشه‌ی معادله باشد $3 - \alpha$ هم‌ریشه‌ی معادله خواهد بود:

$$f(\alpha) = f(3 - \alpha) \xrightarrow{\alpha = \frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$$

پس ریشه‌ی دوم معادله $\frac{5}{2}$ است.

۵. نقطه‌ی $O(2\alpha, \alpha + 1)$ مرکز دایره‌گذرنده بر دو نقطه $A(0, 2)$ و $B(2, 0)$ می‌باشد. شعاع دایره کدام است؟

 $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ کفایت دوبار شعاع دایره را با استفاده از فاصله‌ی دو نقطه محاسبه نماییم.

$$|OA| = |OB| \rightarrow \sqrt{(2\alpha - 0)^2 + (\alpha + 1 - 2)^2} = \sqrt{(2\alpha - 2)^2 + (\alpha + 1 - 0)^2}$$

$$\xrightarrow{()^2} 4\alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 \rightarrow -2\alpha + 1 = -6\alpha + 5$$

$$4\alpha = 4 \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow |OA| = d = \sqrt{(2)^2 + 0^2} = 2$$

۶. به ازای کدام k مجموعه جواب معادله‌ی زیر برابر $A = \{-2\}$ می‌باشد؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{38}{k} = \frac{3x}{x+1}$$

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ برای محاسبه کفایت $x = -2$ را در معادله جایگذاری نمائیم:



$$\frac{1}{-2-1} + \frac{38}{k} = \frac{-6}{-1} \rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{38}{k} = 6$$

$$\xrightarrow{\times 3k} -k + 114 = 18k \rightarrow 19k = 114 \rightarrow k = 6$$

۷. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x\sqrt{4-x^2} + 3\sqrt{4-x^2} = 0$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴ با فاکتورگیری معادله به شکل ساده‌تری تبدیل می‌شود

$$\sqrt{4-x^2}(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+3=0 \rightarrow x=-3 \\ \sqrt{4-x^2}=0 \rightarrow 4-x^2=0 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

با جایگذاری این ریشه‌ها در معادله مشخص می‌شود که $x = -3$ در معادله صدق نمی‌نماید و فقط $x = \pm 2$ قابل قبول هستند و مجموع آنها برابر صفر است.

۸. حاصلضرب ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{x^2+x+3} + \sqrt{x^2+x+1} = 7$ کدام است؟

- ۱) $+\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $+6$ ۴) -6

پاسخ: گزینه ۴ بهتر است با تغییر متغیر معادله فرم ساده‌تری پیدا نماید:

$$x^2+x+3=t \rightarrow \sqrt{t} + \sqrt{t+7} = 7 \rightarrow \sqrt{t+7} = 7 - \sqrt{t}$$

$$\xrightarrow{(\)^2} t+7 = t+49 - 14\sqrt{t} \rightarrow 14\sqrt{t} = 42 \rightarrow \sqrt{t} = 3 \rightarrow t = 9$$

حال به جای عبارت اولیه t را جایگذاری می‌نمائیم:

$$x^2+x+3=9 \rightarrow x^2+x-6=0 \rightarrow (x+3)(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله اصلی، هر دو ریشه در معادله صدق می‌نماید و حاصلضرب آنها $x_1 \times x_2 = -6$ است.

۹. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی $5x^2 - 13x - 1 = 0$ باشد. کدام است؟

- ۱) $-5x^2 + 13x + 1 = 0$ ۲) $5x^2 + 13x - 1 = 0$
۳) $x^2 + 13x + 5 = 0$ ۴) $-x^2 - 13x + 5 = 0$

پاسخ: گزینه ۴

روش اول: اگر ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y و ریشه‌ی معادله‌ی قدیم را x در نظر بگیریم داریم:



$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} 5\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 13\left(\frac{1}{y}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{5}{y^2} - \frac{13}{y} - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\times y^2} 5 - 13y - y^2 = 0$$

روش دوم: کافی است فقط جای a و c را عوض کنید. (ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$ عکس یکدیگر می‌باشند)

$$-x^2 - 13x + 5 = 0$$

۱۰. اگر a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند، خط گذرا از نقاط $A(b, a)$ و $B(a, b)$ همواره بر کدام خط عمود است؟

$$y + x = 0 \quad (1) \quad y - 2x = 0 \quad (2) \quad y - x = 0 \quad (3) \quad x - 2y = 0 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳ مرحله اول حل مسئله محاسبه شیب خط گذرنده از A و B می‌باشد.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{b - a}{a - b} = -1$$

خط مورد نظر بر خط AB عمود است پس حاصلضرب شیب‌ها برابر -1 است. پس شیب خط مورد نظر باید برابر 1 باشد که فقط گزینه سوم این ویژگی را دارد.

$$m = 1 \rightarrow y - x = 0 \rightarrow y = x$$

۱۱. به ازای چه مقادیری از m معادله‌ی $(m-2)x^2 - 2x + (m-3) = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی، یکی مثبت و دیگری منفی است؟

$$m < 1 \quad (1) \quad m > 1 \quad (2) \quad 2 < m < 5 \quad (3) \quad 2 < m < 3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴ برای وجود دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت باید $\Delta > 0$ و $P < 0$ باشد. در مورد S نمی‌توان اظهارنظر کرد. ضمناً توجه داشته باشید که شرط $P < 0$ را تأمین می‌نماید.

$$(m-2)x^2 - 2x + (m-3) = 0$$

$$P < 0 \rightarrow \frac{c}{a} < 0 \rightarrow \frac{m-3}{m-2} < 0$$

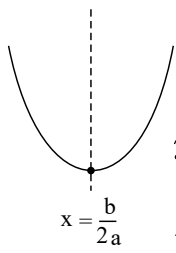
$$\text{جواب: } 2 < m < 3$$

m	2	3
m-3	-	-
m-2	-	+
P	+	+

۱۲. اگر محور تقارن سهمی به معادله $y = x^2 - kx + 1$ به صورت $x = -2$ باشد، کمترین مقدار سهمی کدام است؟

$$-3 \quad (1) \quad -2 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به تصویر معادله محور تقارن سهمی برابر است با: $x = -\frac{b}{2a}$



$$y = x^2 - kx + 1 \rightarrow \text{منحور تقارن } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-k}{2(1)} = \frac{k}{2}$$

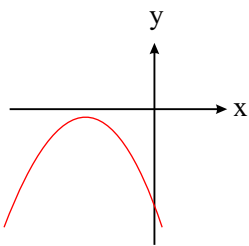
$$x = \frac{b}{2a} \rightarrow x = \frac{k}{2} = -2 \rightarrow k = -4$$

پس معادله سهمی به شکل مقابل است: $y = x^2 + 4x + 1$

برای محاسبه min مختصات راس را به طور کامل تعیین می‌نماییم:

$$\begin{aligned} \text{راس} \quad & \left| \begin{aligned} x_s &= -\frac{b}{2a} = -2 \\ y_s &= f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 1 = -3 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

۱۳. شکل زیر مربوط به سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ است، کدام گزینه صحیح است؟



$$\boxed{2} \quad c < 0, b > 0, a < 0$$

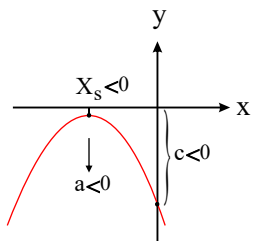
$$\boxed{1} \quad \text{یکی از صفرهای تابع، منفی است.}$$

$$\boxed{4} \quad bc > 0, a < 0$$

$$\boxed{3} \quad c > 0, b < 0, a > 0$$

پاسخ: گزینه ۴ باتوجه به تصویر می‌توان گفت: سهمی max دارد و رو به پایین است پس $a < 0$

$$x_s < 0 \rightarrow -\frac{b}{2a} < 0 \rightarrow \frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$$



$$bc > 0, a < 0$$

نتیجه:

۱۴. معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا که یکی از ریشه‌های آن $3 - \sqrt{5}$ باشد کدام است؟

$$\boxed{2} \quad x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\boxed{1} \quad x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$\boxed{4} \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\boxed{3} \quad x^2 - 6x + 5 = 0$$

پاسخ: گزینه ۲ در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم با ضرایب گویا اگر یک ریشه‌ی معادله، $\alpha + \sqrt{\beta}$ باشد ریشه‌ی دیگر $\alpha - \sqrt{\beta}$ است پس

ریشه‌ی دیگر معادله $3 + \sqrt{5}$ می‌باشد. درنتیجه:

$$x_1 = 3 - \sqrt{5}, x_2 = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 6 \\ P = x_1 \times x_2 = (3 - \sqrt{5}) \times (3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$



۱۵. نقاط $A \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \end{vmatrix}$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مجموع طول و عرض مختصات رأس D آن کدام است؟

۴ ☐ ۶

۳ ☐ ۵

۲ ☐ ۴

۱ ☐ ۳

پاسخ: گزینه ۱. قطرهای متوازی‌الاضلاع، یکدیگر را نصف می‌کنند و داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow 3 + (-3) = -2 + x_D \rightarrow x_D = 2 \\ y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow 4 + (-2) = 1 + y_D \rightarrow y_D = 1 \\ \rightarrow x_D + y_D = 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

۱۶. حدود m کدام باشد تا هیچ نقطه‌ای از تابع $y = x^2 - 4x + m$ دارای فاصله‌ی ۵ از محور x نباشد؟

۴ ☐ $-5 < m < -2$

۳ ☐ $-2 < m < 3$

۲ ☐ $m < -2$

۱ ☐ $m > 9$

پاسخ: گزینه ۱

$$x^2 - 4x + m = 5 \Rightarrow x^2 - 4x + m - 5 = 0$$

این معادله‌ی درجه‌ی دوم نباید ریشه حقیقی داشته باشد.

$$\Delta < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4(m - 5) < 0 \Rightarrow 4m > 36 \Rightarrow m > 9$$

۱۷. دسته خطوط $(m+1)x + (2m-1)y + 2m + 5 = 0$ از نقطه ثابتی می‌گذرند. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

۴ ☐ $\sqrt{19}$

۳ ☐ $\sqrt{17}$

۲ ☐ $\sqrt{15}$

۱ ☐ $\sqrt{13}$

پاسخ: گزینه ۳. برای پیدا کردن نقطه ثابت دسته خطوط کافی است به m دو مقدار مختلف داده و با دو خط به دست آمده تشکیل دستگاه دهیم و x و y را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} m = -1 &\rightarrow -3y - 2 + 5 = 0 \rightarrow y = 1 \\ m = \frac{1}{2} &\rightarrow \frac{3}{2}x + 1 + 5 = 0 \rightarrow x = -4 \end{aligned} \rightarrow A \begin{vmatrix} -4 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ نقطه ثابت}$$

$$A \begin{vmatrix} -4 \\ 1 \end{vmatrix}, O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow AO = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

۱۸. محور تقارن تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + x + 1$ منحنی $y = \frac{2x-1}{4x}$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۴ ☐ $(\frac{1}{2}, 1)$

۳ ☐ $(\frac{1}{2}, 0)$

۲ ☐ $(-\frac{1}{2}, 1)$

۱ ☐ $(-\frac{1}{2}, -1)$

پاسخ: گزینه ۲. ابتدا معادله محور تقارن تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$



x به دست آمده را در تابع $y = \frac{2x-1}{4x}$ قرار داده، y را به دست می آوریم.

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2(-\frac{1}{2}) - 1}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{-2}{-2} = 1$$

۱۹. معادله درجه دومی که ریشه هایش ۹ برابر ریشه های معادله ی $x^2 + x - 3 = 0$ باشد. کدام است؟

$$x^2 + 9x - 27 = 0 \quad \boxed{۲}$$

$$x^2 + 9x - 243 = 0 \quad \boxed{۱}$$

$$x^2 + 18x - 27 = 0 \quad \boxed{۴}$$

$$x^2 + 18x - 243 = 0 \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۱ روش اول: اگر y ریشه ی معادله ی جدید و x ریشه های معادله ی قدیم باشد. آنگاه $y = 9x$ پس: $x = \frac{y}{9}$ لذا:

$$x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{9}\right)^2 + \frac{y}{9} - 3 = 0 \Rightarrow y^2 + 9y - 243 = 0$$

روش دوم: کافی است b را در ۹ و c را در 9^2 ضرب کنید.

$$x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 9x - 243 = 0$$

(ریشه های معادله ی $ax^2 + bmx + ck^2 = 0$ ، k برابر ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ می باشند.)

۲۰. حاصل ضرب یک عدد مثبت در خودش از سه برابر آن عدد ۴ واحد بزرگ تر است آن عدد کدام است؟

$$۳ \quad \boxed{۴}$$

$$۴ \quad \boxed{۳}$$

$$۸ \quad \boxed{۲}$$

$$۱۲ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

عدد مورد نظر را x در نظر می گیریم.

$$x \times x = 3x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \checkmark \\ x = -1 & \times \end{cases}$$

۲۱. به ازای چه مقدار m ، دو ریشه معادله $3x^2 + 11x - 2m = 7$ عکس و قرینه اند؟

$$۵ \quad \boxed{۴}$$

$$-۵ \quad \boxed{۳}$$

$$-۲ \quad \boxed{۲}$$

$$۲ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

معادله را به صورت $3x^2 + 11x - 2m - 7 = 0$ مرتب می کنیم.

$$x_1 = \frac{-1}{x_2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow \frac{-2m-7}{3} = -1 \Rightarrow -2m-7 = -3 \Rightarrow m = -2$$

۲۲. در معادله ی $x^2 + 4x - 1 = 0$ حاصل $\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}\right)^2$ کدام است؟

$$۸۱ \quad \boxed{۴}$$

$$۳۲۴ \quad \boxed{۳}$$

$$۲۸۹ \quad \boxed{۲}$$

$$۱۹۶ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -4, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -1$$



$$\left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}\right)^2 = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}\right)^2 = \left(\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}\right)^2 = \left(\frac{16 + 2}{-1}\right)^2 = (-18)^2 = 324$$

۲۳. اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - (a+1)x - 6 + 2a = 0$ برابر ۱ باشد. ریشه‌ی دیگر کدام است؟

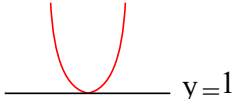
- ۱) ۲ ۲) ۵ ۳) -۳ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۱ چون یکی از ریشه‌ها ۱ است. پس مجموع ضرایب برابر صفر و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است. پس $x = 1$ را در معادله، صدق می‌دهیم.

$$2 - (a+1) - 6 + 2a = 0 \Rightarrow -5 + a = 0 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow \text{ریشه‌ی دیگر} = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{-6 + 2a}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

۲۴. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + ax + 1$ روی خط $y = 1$ دارای می‌نیم است. a کدام است؟

- ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به شکل  $y=1$ عرض نقطه‌ی S برابر یک می باشد.

$$y_s = 1 \rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = 1 \Rightarrow \frac{4 - a^2}{4} = 1 \Rightarrow 4 - a^2 = 4 \Rightarrow a = 0$$

۲۵. اگر نقطه‌ی $(-1, 4)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y = -2x^2 + ax - b$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳ طول رأس سهمی برابر $x = -\frac{a}{2(-2)}$ است. پس:

$$\frac{a}{4} = -1 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow y = -2x^2 - 4x - b$$

عرض رأس سهمی به ازای $x = -1$ به دست می‌آید. پس:

$$y = -2(-1)^2 + a(-1) - b = -2 + 4 - b = 4 \Rightarrow b = -2$$

در نتیجه: $ab = 8$

۲۶. معادله‌ی خطی که محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول -۳ قطع کرده و بر خط $2x + 3y = -1$ عمود باشد، کدام است؟

- ۱) $2y = 3x + 9$ ۲) $2y + 3x = 9$ ۳) $3y = 2x + 6$ ۴) $y - 3x = 2$

پاسخ: گزینه ۱ هر نقطه روی محور x دارای عرض صفر می‌باشد یعنی $A(-3, 0)$ ، هرگاه دو خط بر هم عمود باشند شیب یکی قرینه و معکوس دیگری است یعنی $m \cdot m' = -1$ پس داریم:

$$2x + 3y = -1 \Rightarrow 3y = -2x - 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \Rightarrow m = -\frac{2}{3} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} m = +\frac{3}{2}$$

حال معادله خط مورد نظر برابر است با:



$$y - y_0 = m(x - x_0), \quad m = \frac{3}{2}, \quad x_0 = -3, \quad y_0 = 0$$

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - (-3)) \Rightarrow y = \frac{3}{2}(x + 3) \xrightarrow{\times 2} 2y = 3(x + 3) \Rightarrow 2y = 3x + 9$$

۲۷. اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 4x + k = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز x' و x'' باشد، کدام درست است؟

$$x'x'' < 4 \quad \text{④} \quad x'x'' < -4 \quad \text{③} \quad x'x'' > -4 \quad \text{②} \quad x'x'' > 4 \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۴

برای داشتن دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باید $\Delta > 0$ باشد. $(b^2 - 4ac > 0)$

$$\Delta = 16 - 4k > 0 \Rightarrow k < 4 \Rightarrow x'x'' = \frac{c}{a} = k \Rightarrow x'x'' < 4$$

۲۸. جواب معادله $\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ در کدام بازه قرار دارد؟

$$(5, 7) \quad \text{④} \quad (-1, 2) \quad \text{③} \quad (3, 6) \quad \text{②} \quad (0, 3) \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 2\sqrt{x-3} = \sqrt{x}$$

توان ۲ $\rightarrow 4(x-3) = x \rightarrow 4x - x = 12 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$

۲۹. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(x-1)^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$ برابر است با:

$$-2\sqrt{2} \quad \text{④} \quad 2\sqrt{3} \quad \text{③} \quad 2 \quad \text{②} \quad -2 \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$(x-1)^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \begin{cases} x-1 = \sqrt{2} - \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ x-1 = -\sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{cases}$$

حاصل جمع دو ریشه برابر ۲ می‌شود.

۳۰. اگر O مرکز دایره C ، روی نیمساز ربع اول و سوم باشد و دو نقطه $(k, 2k-1)$ و $(0, -1)$ دو سر یک قطر دایره باشند، آنگاه مختصات قرینه نقطه $A(-2, 3)$ نسبت به O کدام است؟

$$(-4, -1) \quad \text{④} \quad (-4, 1) \quad \text{③} \quad (4, -1) \quad \text{②} \quad (4, 1) \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۲ نقطه O مرکز دایره، روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد، یعنی: $O(\alpha, \alpha)$

دو نقطه $(k, 2k-1)$ و $(0, -1)$ دو سر یک قطر دایره هستند، پس نقطه $O(\alpha, \alpha)$ وسط این دو نقطه است:



$$\begin{cases} x_O = \frac{0+k}{2} \\ y_O = \frac{-1+2k-1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{k}{2} \\ \alpha = \frac{2k-2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{k}{2} \\ \alpha = k-1 \end{cases} \rightarrow \frac{k}{2} = k-1$$

$$\rightarrow k = 2k - 2 \rightarrow 2 = 2k - k \rightarrow \boxed{k = 2} \rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\rightarrow O(1, 1)$$

و اگر نقطه B قرینه نقطه $A(-2, 3)$ نسبت به نقطه $O(1, 1)$ باشد؛ داریم:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{-2 + x_B}{2} \\ 1 = \frac{3 + y_B}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = -2 + x_B \rightarrow \boxed{x_B = 4} \\ 2 = 3 + y_B \rightarrow \boxed{y_B = -1} \end{cases}$$

$$\rightarrow B(4, -1)$$

۳۱. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ چقدر است؟

۱) $5 + 2\sqrt{6}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{5} + 2$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \sqrt{6}$$

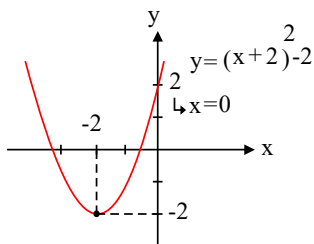
$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 3 + 2 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5$$

۳۲. نمودار $y = (x+2)^2 - 2$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۴ کافی است نمودار $y = x^2$ را دو واحد به سمت چپ و دو واحد به پایین انتقال دهیم.



۳۳. در معادله‌ی $x^2 - 3x + 2 = 0$ حاصل $x_1^8 + x_2^8$ کدام است؟

۱) ۲۵۷ ۲) ۱۵۸ ۳) ۱۶۴ ۴) ۶۸

پاسخ: گزینه ۱ چون مجموع ضرایب برابر صفر است یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ یعنی ۲ است.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 1^8 + 2^8 = 1 + 256 = 257$$



۳۴. نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ دو انتهای یکی از قطرهای یک دایره هستند. کدام نقطه روی محیط دایره قرار دارد؟

(۵, ۴) ☐ ۴

(۶, ۶) ☐ ۳

(۷, ۳) ☐ ۲

(۳, ۷) ☐ ۱

پاسخ: گزینه ۲ راهنمایی: فاصله AB برابر قطر دایره و وسط AB مرکز دایره است.

اول: مرکز دایره وسط AB است:

$$A(2, -2), B(6, 4) \Rightarrow O\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = O(4, 1)$$

دوم: شعاع دایره نصف طول AB است:

$$2r = AB = \sqrt{(6-2)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow r = \sqrt{13}$$

سوم: فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز برابر با شعاع است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱:

$$(4, 1), (3, 7) \Rightarrow \sqrt{(4-3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

گزینه ۲:

$$(4, 1), (7, 3) \Rightarrow \sqrt{(7-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

گزینه ۳:

$$(4, 1), (6, 6) \Rightarrow \sqrt{(6-4)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

گزینه ۴:

$$(4, 1), (5, 4) \Rightarrow \sqrt{(5-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

۳۵. اگر نقطه $A'(k, -3k+1)$ قرینه نقطه $A(5, m-1)$ نسبت به مبدأ مختصات باشد، آنگاه مقدار $m-k$ کدام است؟

-۲۰ ☐ ۴

۲۰ ☐ ۳

-۱۰ ☐ ۲

۱۰ ☐ ۱

پاسخ: گزینه ۲ چون نقطه A قرینه نقطه A' نسبت به مبدأ مختصات است، پس مبدأ مختصات یعنی نقطه $O(0, 0)$ وسط پاره خط AA'

است و داریم:

$$x_o = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \rightarrow 0 = \frac{5+k}{2} \rightarrow k = -5$$

$$y_o = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \rightarrow 0 = \frac{-3k+1+m-1}{2} \xrightarrow{k=-5} 15+m=0 \rightarrow m = -15$$

$$\rightarrow m-k = -15 - (-5) = -10$$



۳۶. نقاط $A(۲, ۳)$ ، $B(۴, ۱)$ و $C(۸, ۲)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند، طول قطر BD کدام است؟

$$\sqrt{۱۳} \quad \boxed{۴}$$

$$۲\sqrt{۳} \quad \boxed{۳}$$

$$۴ \quad \boxed{۲}$$

$$۵ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴ در متوازی‌الاضلاع قطرهای منصف یکدیگر هستند و داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow ۲ + ۸ = ۴ + x_D \rightarrow x_D = ۶ \\ y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow ۳ + ۲ = ۱ + y_D \rightarrow y_D = ۴ \end{cases} \rightarrow D(۶, ۴)$$

$$\rightarrow \text{طول قطر } BD = \sqrt{(۶ - ۴)^2 + (۴ - ۱)^2} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳}$$

۳۷. معادله $۳ - ۶x^2 + ۲x + k^2 = ۰$ دارای:

$$\boxed{۲} \text{ دو ریشه‌ی منفی است.}$$

$$\boxed{۱} \text{ دو ریشه‌ی مثبت است.}$$

$$\boxed{۴} \text{ ریشه‌ی حقیقی نیست.}$$

$$\boxed{۳} \text{ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت است.}$$

پاسخ: گزینه ۳ چون $\frac{c}{a}$ منفی است ($\frac{k^2 + ۳}{-۶} < ۰$) پس دلتا حتماً مثبت است و معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت است.

۳۸. در معادله‌ی $x^2 - ۴x + ۱ = ۰$ حاصل $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ کدام است؟

$$۲ \quad \boxed{۴}$$

$$۴ \quad \boxed{۳}$$

$$۸ \quad \boxed{۲}$$

$$۳ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = ۴, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = ۱$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{۴}{۱} = ۴$$

۳۹. فاصله‌ی کدام خط از خطوط زیر از خط به معادله $۵x + ۱۲y + ۵۱ = ۰$ برابر ۵ واحد است؟

$$۵x + ۱۲y = -۱۳ \quad \boxed{۲}$$

$$۵x + ۱۲y = -۱۴ \quad \boxed{۱}$$

$$۵x + ۱۲y = ۱۳ \quad \boxed{۴}$$

$$۵x + ۱۲y = ۱۴ \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۳ خط مورد نظر باید با خط‌ها موازی باشد، که هر چهار گزینه این ویژگی را دارند. می‌توان برای محاسبه فاصله هر خط موازی از رابطه‌ی زیر استفاده کرد.

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \frac{|c - ۵۱|}{\sqrt{۵^2 + ۱۲^2}} = ۵ \rightarrow \frac{|c - ۵۱|}{۱۳} = ۵$$

$$\rightarrow |c - ۵۱| = ۶۵ \rightarrow \begin{cases} c - ۵۱ = ۶۵ \rightarrow c_1 = ۱۱۶ \\ c - ۵۱ = -۶۵ \rightarrow c_2 = -۱۴ \end{cases}$$

یعنی معادله‌ی دوم به شکل زیر است.



خط اول: $5x + 12y + 116 = 0$

خط دوم: $5x + 12y - 14 = 0$

که فقط در گزینه‌ها معادله خط دوم دیده می‌شود.

۴۰. قطر مربعی منطبق بر نیمساز ناحیه دوم و چهارم و یک رأس آن نقطه $(3, -2)$ است. مساحت این مربع کدام است؟

۱ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴)

۱ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ راهنمایی: اگر طول قطر مربع d باشد، مساحت آن $\frac{d^2}{2}$ است.

فاصله رأس از قطر همان نصف طول قطر است، پس داریم:

$$\begin{cases} A(3, -2) \\ y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow AH = \frac{|-2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس طول قطر مربع $\sqrt{2} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ است و مساحت مربع $1 = \frac{(\sqrt{2})^2}{2}$ است. $S = \frac{d^2}{2}$

۴۱. اگر ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2+5x}{x^2-4}$ مقادیر α و β باشد، مقدار $\beta\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\beta}$ کدام است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ اگر بین عبارت طرف اول مخرج مشترک بگیریم داریم:

$$\frac{(x+1)(x+2) + (x-1)(x-2)}{x^2-4} = \frac{x^2+5x}{x^2-4} \rightarrow \frac{2x^2+4}{x^2-4} = \frac{x^2+5x}{x^2-4}$$

باتوجه به برابر بودن مخرج‌ها، صورتها نیز باید با هم برابر باشند، پس:

$$2x^2 + 4 = x^2 + 5x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

هر دو ریشه هم قابل قبول می‌باشند، لذا داریم:

$$\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} \quad \underline{\underline{\alpha = 4, \beta = 1}} \quad 4\sqrt{1} + 1\sqrt{4} = 6$$

۴۲. معادله $\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} = -1$ چند جواب حقیقی دارد؟

بی‌شمار (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

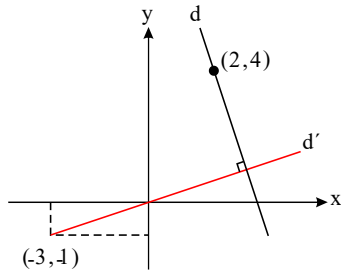


پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} = -1 \xrightarrow{x \neq 0, x \neq -1} x^2 - (x-1)(x+1) = -x(x+1)$$

$$\rightarrow x^2 - (x^2 - 1) = -x^2 - x \rightarrow 1 = -x^2 - x \rightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0. \text{ ریشه حقیقی ندارد.}$$

۴۳. در شکل زیر معادله خط d کدام است؟

$$y = -3x + 10 \quad \boxed{۲}$$

$$y = -2x + 10 \quad \boxed{۱}$$

$$y = -2x + 8 \quad \boxed{۴}$$

$$y = -3x + 8 \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$A(-3, -1), O(0, 0) \in d \rightarrow m_{d'} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{-1 - 0}{-3 - 0} \rightarrow m_{d'} = \frac{1}{3}$$

$$\cdot \text{ خط } d \text{ و } d' \text{ بر هم عمودند.} \rightarrow m_d = \frac{-1}{m_{d'}} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} \rightarrow m_d = -3, \quad B(2, 4) \in d$$

$$\rightarrow y - y_B = m_d(x - x_B) \rightarrow y - 4 = -3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 10$$

۴۴. مثلث ABC که مختصات رأس‌های آن $A(3, 5)$, $B(3, -1)$ و $C(7, 2)$ است، چگونه است؟

☐ ۱ متساوی الساقین
 ☐ ۲ متساوی الاضلاع
 ☐ ۳ مختلف الاضلاع
 ☐ ۴ قائم الزاویه

پاسخ: گزینه ۱ دو نقطه‌ی A و B هم‌طول هستند، پس:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad \text{طول پاره خط } AB$$

$$AB = |y_A - y_B| = |5 - (-1)| = 6$$

$$AC = \sqrt{(7 - 3)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(7 - 3)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

چون $BC = AC$ است، پس مثلث ABC متساوی الساقین است.

۴۵. کدام تابع ماکسیمم دارد و مینیمم ندارد؟

$$y = x^2 - 4x \quad \boxed{۱} \quad y = 4x - 2x^2 \quad \boxed{۲} \quad y = x^3 - 2x \quad \boxed{۳} \quad y = x - x^3 \quad \boxed{۴}$$

پاسخ: گزینه ۲ در تابع درجه‌ی دوم وقتی ضریب x^2 ، منفی است تابع فقط Max دارد.



۴۶. نمودار تابع $y = ax^2 - 4x + 4a$ بالای محور طول‌ها قرار دارد. مجموعه مقادیر ممکن a کدام است؟

(۱) $(1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

(۳) $(2, +\infty)$ (۴) $(1, 2)$

پاسخ: گزینه ۱ کافی است ضریب x^2 مثبت و Δ منفی باشد.

$$a > 0, \Delta = 16 - 16a^2 < 0 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow a > 1 \text{ یا } a < -1$$

بنابراین $a \in (1, +\infty)$

۴۷. اگر شی‌ای از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h قرار می‌گیرد

$$(t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}) \text{ . پس از ۱ ثانیه شی در چه ارتفاعی قرار دارد؟}$$

(۱) ۵۰ (۲) ۴۰ (۳) ۴۵ (۴) ۳۵

پاسخ: گزینه ۳ مقدار $t = 1$ را قرار می‌دهیم:

$$1 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \Rightarrow 1 = 10 - \frac{h}{5} \Rightarrow \frac{h}{5} = 9 \Rightarrow h = 45$$

۴۸. مجموع معکوس دو عدد طبیعی زوج متوالی، ۷ برابر اختلاف معکوس آن‌هاست، عدد بزرگ‌تر کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ دو عدد طبیعی زوج متوالی را به صورت x و $x+2$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = 7 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) \xrightarrow{\times x(x+2)} x+2+x = 7(x+2-x) \rightarrow 2x+2 = 14 \rightarrow 2x = 12$$

$$\rightarrow x = 6, x+2 = 8$$

۴۹. نقاط $A(2, k)$ ، $B(-1, -1)$ و $C(4, 1)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر طول میانه BM برابر با ۵ باشد،

عرض نقطه A کدام می‌تواند باشد؟

(۱) -۵ (۲) -۷ (۳) -۹ (۴) -۱۱

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا مختصات نقطه M وسط پاره خط AC را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{k+1}{2} \end{cases} \rightarrow M(3, \frac{k+1}{2})$$

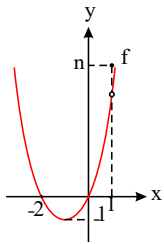
$$BM = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1 - \frac{k+1}{2})^2} = 5 \rightarrow \sqrt{16 + \frac{k^2 + 6k + 9}{4}} = 5$$

$$\rightarrow \frac{k^2 + 6k + 9}{4} = 9 \rightarrow k^2 + 6k - 27 = 0 \rightarrow (k-3)(k+9) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -9 \end{cases}$$



۵۰. اگر تابع $y = f(x)$ با نمودار زیر با تابع $g(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases}$ برابر باشد، مقدار

$n + b + c$ کدام است؟



۶ (۲)

۴ (۱)

۵ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \rightarrow c = 0 \\ f(-2) = 0 \rightarrow 4 - 2b + c = 0 \rightarrow b = 2 \\ f(1) = n \rightarrow n = 4 \end{cases} \rightarrow n + b + c = 6$$

۵۱. فاصله نقطه $A(2, 1)$ از نقطه‌ای به طول ۴ روی خط $3x + 2y = 2$ کدام است؟

$\sqrt{10}$ (۴)

$2\sqrt{10}$ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} 3x + 2y = 2 & \xrightarrow{x=4 \text{ (نقطه‌ای به طول ۴)}} 3(4) + 2y = 2 \rightarrow 12 + 2y = 2 \\ \rightarrow 2y = -10 & \rightarrow y = -5 \rightarrow B(4, -5), A(2, 1) \\ \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} &= \sqrt{(4 - 2)^2 + (-5 - 1)^2} \\ \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} &\rightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

۵۲. یک دانش‌آموز پس از پنج هفته در آزمون‌های هفتگی ریاضی ۳۶ امتیاز کسب کرده است. اگر از آزمون ششم به بعد در تمام آزمون‌ها ۹ امتیاز کسب کند، در هفته چندم میانگین نمرات او برابر ۸ می‌شود؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ فرض کنیم بعد از ۵ آزمون، در n آزمون دیگر شرکت کند. در این صورت مجموع امتیازات او $36 + 9n$ خواهد شد، پس میانگین امتیازات او برابر است با:

$$\frac{36 + 9n}{5 + n} = 8 \Rightarrow 36 + 9n = 40 + 8n \Rightarrow n = 4$$

پس کلاً در $4 + 5 = 9$ آزمون شرکت کرده است.



۵۳. $x = 0$ جواب کدام یک از معادله‌های گویای زیر است؟

$$\frac{3x+1}{6x+2} = \frac{4x+7}{8x-1} \quad (۲)$$

$$\frac{x^2-2x}{3x+1} = \frac{x^2}{x^2-x} \quad (۱)$$

$$\frac{x}{x} = 1 \quad (۴)$$

$$\frac{x^2+x-1}{x+1} = \frac{x-1}{3x+1} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳ در گزینه‌های ۱ و ۴ مقدار $x = 0$ ریشهٔ مخرج کسرها است. پس جواب قابل قبولی نیست.

بررسی گزینه‌های ۲ و ۳:

گزینه ۲:

$$\frac{3x+1}{6x+2} = \frac{4x+7}{8x-1} \xrightarrow{x=0} \frac{1}{2} = -7 \Rightarrow x = 0 \text{ جواب نیست}$$

گزینه ۳:

$$\frac{x^2+x-1}{x+1} = \frac{x-1}{3x+1} \xrightarrow{x=0} -1 = -1 \Rightarrow x = 0 \text{ جواب است}$$

۵۴. کدام خط زیر بر خط $3x + 2y = 4$ عمود است و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند؟

$$3y + 2x = 2 \quad (۴) \quad 3y + 2x = -4 \quad (۳) \quad 3y - 2x = 4 \quad (۲) \quad 3y - 2x = -4 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$3x + 2y = 4 \rightarrow 2y = -3x + 4 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2 \rightarrow m' = -\frac{3}{2}$$

پس شیب خط عمود بر خط بالا $m = \frac{2}{3}$ است که از نقطه $A \left(\frac{2}{3}, 0 \right)$ می‌گذرد:

$$y - 0 = \frac{2}{3}(x - \frac{2}{3}) \rightarrow 3y = 2x - 4 \rightarrow 3y - 2x = -4$$

۵۵. از نقطه A با مختصات $\begin{vmatrix} a \\ 2a+1 \end{vmatrix}$ خطی موازی خط $y = 2x + 5$ رسم می‌کنیم تا به نقطه B با مختصات

$\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ برسیم. رابطهٔ بین α و β کدام است؟

$$\beta = \frac{\alpha+1}{2} \quad (۴) \quad \beta = \frac{\alpha-1}{2} \quad (۳) \quad \alpha = \frac{\beta+1}{2} \quad (۲) \quad \alpha = \frac{\beta-1}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱ شیب خط $y = 2x + 5$ برابر $m = 2$ است، بنابراین خطی که موازی این خط رسم می‌شود شیبی برابر $m = 2$ خواهد

داشت و داریم:

$$A \begin{vmatrix} a \\ 2a+1 \end{vmatrix}, m = 2$$

$$\rightarrow y - (2a+1) = 2(x-a) \rightarrow y - 2a - 1 = 2x - 2a \rightarrow y = 2x + 1$$



$$B \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right. \rightarrow \beta = 2\alpha + 1 \rightarrow \beta - 1 = 2\alpha \rightarrow \alpha = \frac{\beta - 1}{2}$$

۵۶. اگر مجموع ریشه‌های معادله $2x^2 + mx + n = 0$ برابر ۲ و حاصل ضرب ریشه‌های آن برابر $-\frac{5}{2}$ باشد،

در این صورت $m + n$ کدام است؟

۱۴ -۹

۱۳ ۱

۱۲ ۹

۱۱ -۱

پاسخ: گزینه ۴

$$2x^2 + mx + n = 0 \rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{a} = -\frac{m}{2} = 2 \rightarrow m = -4 \\ P = \frac{c}{a} = \frac{n}{2} = -\frac{5}{2} \rightarrow n = -5 \end{cases} \rightarrow m + n = -9$$

۵۷. مثلث ABC در صفحه مفروض است. اگر معادله خط گذرنده از ضلع BC به صورت $y = x$ باشد، آن گاه معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس $A(1, 2)$ کدام است؟

۱۴ $y = x + 3$

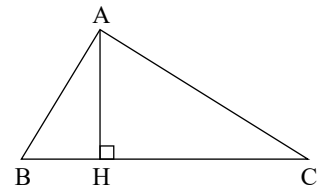
۱۳ $y = x + 1$

۱۲ $y = -x + 1$

۱۱ $y = -x + 3$

پاسخ: گزینه ۱ برای حل سوال توجه به این نکته الزامیست، هرگاه دو خط برهم عمود باشند، شیب یکی معکوس و قرینه دیگریست.

$$y = x \rightarrow m_{BC} = 1 \rightarrow m_{AH} = -1$$



حال می‌توان معادله خطی را نوشت که یک نقطه و شیب آن را داریم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow[A(1,2)]{m_{AH}=-1} y - 2 = -1(x - 1) \rightarrow y = -x + 3$$

۵۸. تعداد اعداد صحیحی که تفاضل آن‌ها از جذرشان برابر نصف خود آن‌هاست، کدام است؟

۱۴ ۳

۱۳ ۲

۱۲ ۱

۱۱ صفر

پاسخ: گزینه ۲ رابطه داده شده در صورت سؤال به صورت زیر است:

$$\sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3x}{2} \xrightarrow{\text{بم توان ۲}} x = \frac{9x^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{9x^2}{4} - x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{9x}{4} - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$x = \frac{4}{9}$ صحیح نیست و $x = 0$ صحیح است.



۵۹. معادله $k = \sqrt{6k + 8}$ چند جواب دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲ به توان ۲ می‌رسانیم:

$$k = \sqrt{6k + 8} \Rightarrow k^2 = 6k + 8 \Rightarrow k^2 - 6k - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 4(1)(-8) = 68$$

$$\Rightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{68}}{2} = 3 \pm \sqrt{17}$$

تذکر: چون باید $k \geq 0$ باشد پس $k = 3 - \sqrt{17}$ قابل قبول نیست.

۶۰. معادله خطی که با خط $2x - y = 3$ موازی بوده و نیمساز ناحیه دوم و چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند، به صورت $y = ax + b$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟

-۷ (۴)

۸ (۳)

-۱۳ (۲)

۱۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ نکته: معادله خطی با شیب m که از نقطه $A(x_0, y_0)$ عبور می‌کند به صورت $y - y_0 = m(x - x_0)$ است.

$$2x - y = 3 \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{2}{-1} = 2$$

خط موردنظر با خط $2x - y = 3$ موازی است، پس شیب آن برابر با شیب این خط و در نتیجه $m = 2$ می‌باشد.

$$y = -x \xrightarrow{y=5} 5 = -x \Rightarrow x = -5$$

بنابراین می‌خواهیم معادله خطی با شیب $m = 2$ را بنویسیم که از نقطه $A(-5, 5)$ عبور می‌کند:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = 2(x + 5) \Rightarrow y = 2x + 15 \Rightarrow a + b = 17$$

۶۱. قرینه نقطه $A(1, -2)$ نسبت به خط $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ را B می‌نامیم. طول پاره خط AB کدام است؟

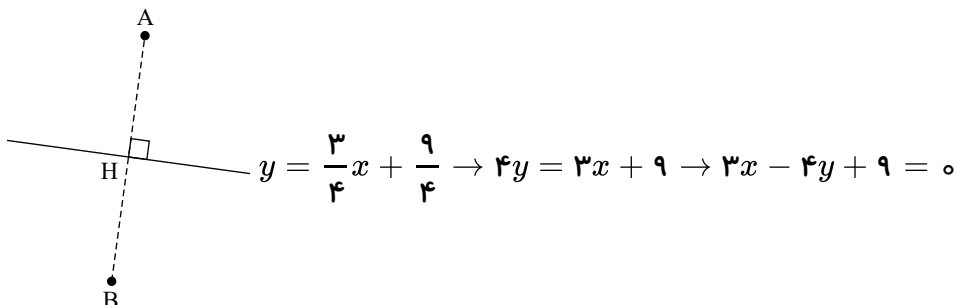
۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ طول پاره خط AB دو برابر طول پاره خط AH (فاصله نقطه A از خط) می‌باشد و داریم:



$$AH = d = \frac{|3(1) - 4(-2) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4 \rightarrow AB = 2 \times 4 = 8$$



۶۲. اگر فاصله نقطه $A(2, -3)$ از خط $12x + 5y = 15$ برابر $7a + 1$ باشد، مقدار a کدام است؟

☐ ۱ $\frac{49}{13}$
☐ ۲ $\frac{1}{13}$
☐ ۳ $-\frac{49}{13}$
☐ ۴ $-\frac{1}{13}$

پاسخ: گزینه ۴

$$d = \frac{|12(2) + 5(-3) - 15|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{6}{13} = 7a + 1$$

$$\rightarrow \frac{6}{13} - 1 = 7a \rightarrow 7a = -\frac{7}{13} \rightarrow a = -\frac{1}{13}$$

۶۳. فاصله دو خط موازی $7x - 4y + 8 = 0$ و $-14x + 8y + 2 = 0$ کدام است؟

☐ ۱ ۱۰
 ☐ ۲ ۶
 ☐ ۳ $\frac{9}{\sqrt{65}}$
☐ ۴ $\frac{6}{\sqrt{65}}$

پاسخ: گزینه ۳

$$7x - 4y + 8 = 0$$

$$-14x + 8y + 2 = 0 \xrightarrow{\div(-2)} 7x - 4y - 1 = 0$$

فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|8 - (-1)|}{\sqrt{7^2 + (-4)^2}} = \frac{9}{\sqrt{49 + 16}} = \frac{9}{\sqrt{65}}$$

۶۴. اگر خطوط $y = 2$ و $ax + ay - x = 1$ همدیگر را در نقطه‌ای به طول یک قطع کنند، a کدام است؟

☐ ۱ $\frac{1}{4}$
☐ ۲ $\frac{2}{3}$
☐ ۳ $\frac{3}{4}$
☐ ۴ ۱

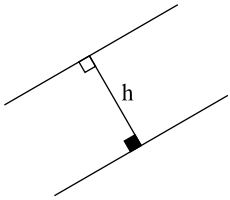
پاسخ: گزینه ۲

$$\xrightarrow[y=2]{x=1} a(1) + a(2) - 1 = 1 \rightarrow 3a = 2 \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

۶۵. دو خط $y = \frac{3}{4}x - 2$ و $6x - 8y + 10 = 0$ بر دایره C مماس شده‌اند. شعاع این دایره چقدر است؟

☐ ۱ ۲٫۶
 ☐ ۲ ۳٫۲
 ☐ ۳ ۱٫۳
 ☐ ۴ ۱٫۶

پاسخ: گزینه ۳ نکته: فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $h = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

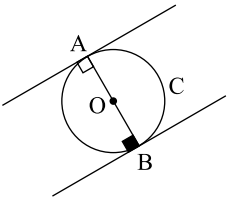


نکته: شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس بر دایره عمود است.

$$y = \frac{3}{4}x - 2 \xrightarrow{(\times 4)} 4y = 3x - 8 \Rightarrow 3x - 4y - 8 = 0 \Rightarrow \text{پس این دو خط موازی هستند}$$

$$6x - 8y + 10 = 0 \xrightarrow{(\div 2)} 3x - 4y + 5 = 0$$

پاره خط AB قطر دایره است که همان فاصله دو خط موازی است.



$$AB = \frac{|-8-5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{13}{5} \Rightarrow r = \frac{AB}{2} \Rightarrow r = 1,3$$

۶۶. نقاط $A(2, -4)$ ، $B(-3, 5)$ و $C(6, -1)$ سه رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند. مجموع فاصله

نقطه D از محورهای مختصات کدام است؟

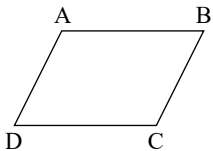
۲۱ ☐ ۴

۲ ☐ ۳

۱۸ ☐ ۲

۱ ☐ ۱

پاسخ: گزینه ۴ در متوازی الاضلاع $ABCD$ داریم:



$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

با استفاده از نکته فوق داریم:

$$\left. \begin{aligned} 2 + 6 &= -3 + x_D \Rightarrow x_D = 11 \\ -4 - 1 &= 5 + y_D \Rightarrow y_D = -10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(11, -10)$$

فاصله نقطه D از محور x ها برابر با $|y_D|$ و فاصله نقطه D از محور y ها برابر با $|x_D|$ است، پس خواسته سوال برابر است با:

$$|x_D| + |y_D| = |11| + |-10| = 11 + 10 = 21$$

۶۷. نقاط $A(-2, 1)$ و $C(4, 3)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. مساحت این مربع کدام است؟

۳۶ ☐ ۴

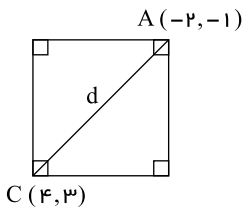
۴۰ ☐ ۳

۱۸ ☐ ۲

۲۰ ☐ ۱

پاسخ: گزینه ۱ فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



با توجه به شکل فرضی مقابل، اندازه پاره خط AC برابر با قطر مربع است.

$$d = AC = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

مساحت مربع برحسب قطر به صورت زیر است:

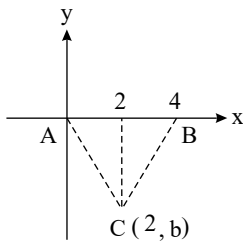
$$S = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{40})^2 = \frac{1}{2} \times 40 = 20$$

۶۸. اگر نقاط $A(0, 0)$ و $B(4, 0)$ دو رأس از یک مثلث متساوی الاضلاع باشند، مختصات رأس سوم با عرض منفی کدام است؟

- ☐ ۱ $(2, 2\sqrt{3})$
 ☐ ۲ $(2, -\sqrt{3})$
 ☐ ۳ $(2, -2\sqrt{3})$
 ☐ ۴ $(2, -2)$

پاسخ: گزینه ۳ اول: رسم شکل

معلوم است که رأس C روی عمود منصف پاره خط AB یعنی روی خط $x = 2$ است، پس طول آن ۲ است.



دوم: عرض آن را b در نظر می گیریم. پس مختصات آن $(2, b)$ است.

می دانیم فاصله $AC = AB = 4$. پس:

$$AC = \sqrt{(2 - 0)^2 + (b - 0)^2} = 4 \Rightarrow 4 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 12 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{3}$$

با توجه به صورت سؤال $b = -2\sqrt{3}$ صحیح است.

۶۹. دو واحد بیشتر از جذر عددی برابر است با جذر ۵ واحد بیشتر از همان عدد ریشه سوم دو برابر این عدد کدام است؟

- ☐ ۱ $\frac{1}{4}$
 ☐ ۲ $\frac{1}{2}$
 ☐ ۳ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
 ☐ ۴ $2\sqrt[3]{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\sqrt{x} + 2 = \sqrt[3]{x + 5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x + 4\sqrt{x} + 4 = x + 5 \Rightarrow 4\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{16} \Rightarrow 2x = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} = \text{ریشه سوم } \frac{1}{2}$$



۷۰. اگر $A(۵, ۱)$ و $B(۳, ۳)$ باشند، فاصلهٔ وسط پاره‌خط AB از خط $۳x - ۴y + ۲ = ۰$ کدام است؟

$$\frac{۶\sqrt{۵}}{۵} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{۶}{۵} \quad \boxed{۳}$$

$$۶\sqrt{۵} \quad \boxed{۲}$$

$$۵ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را به دست می‌آوریم.

$$M = \left[\begin{array}{c} \frac{۳+۵}{۲} \\ \frac{۳+۱}{۲} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} ۴ \\ ۲ \end{array} \right]$$

$$\text{فاصلهٔ } M \text{ از خط داده شده} = \frac{|۳ \times ۴ - ۴ \times ۲ + ۲|}{\sqrt{۳^2 + (-۴)^2}} = \frac{۶}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۶}{۵}$$

۷۱. خط $۴x + ۲y - ۸ = ۰$ محورهای مختصات را دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. فاصلهٔ مبدأ مختصات تا وسط

پاره‌خط AB کدام است؟

$$\frac{\sqrt{۵}}{۲} \quad \boxed{۴}$$

$$\sqrt{۵} \quad \boxed{۳}$$

$$\frac{۱}{۲} \quad \boxed{۲}$$

$$۲ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$۴x + ۲y - ۸ = ۰ \xrightarrow[\text{محل تقاطع با محور } x \text{ ها}]{y=۰} ۴x - ۸ = ۰ \rightarrow x = ۲ \rightarrow A \left| \begin{array}{c} ۲ \\ ۰ \end{array} \right.$$

$$۴x + ۲y - ۸ = ۰ \xrightarrow[\text{محل تقاطع با محور } y \text{ ها}]{x=۰} ۰ + ۲y - ۸ = ۰ \rightarrow y = ۴ \rightarrow B \left| \begin{array}{c} ۰ \\ ۴ \end{array} \right.$$

$$AB \text{ پاره‌خط } M \text{ وسط} \rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۲ + ۰}{۲} = ۱ \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۰ + ۴}{۲} = ۲ \end{cases} \rightarrow M \left| \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \end{array} \right.$$

$$OM = \sqrt{(۱ - ۰)^2 + (۲ - ۰)^2} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

۷۲. یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(m + ۲)x^2 + ۶x - n = ۰$ دو واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر است و مجموع دو

ریشه برابر -۶ است. مقدار $m + n$ کدام است؟

$$۷ \quad \boxed{۴}$$

$$-۱ \quad \boxed{۳}$$

$$-۹ \quad \boxed{۲}$$

$$-۸ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنید α و β ریشه‌های معادلهٔ $(m + ۲)x^2 + ۶x - n = ۰$ باشند و $\alpha > \beta$ داریم:



$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = -6 \end{cases} \rightarrow 2\alpha = -4 \rightarrow \boxed{\alpha = -2}, \boxed{\beta = -4}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow -6 = -\frac{6}{m+2} \rightarrow \boxed{m = -1}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow 8 = \frac{-n}{m+2} \rightarrow 8 = \frac{-n}{1} \rightarrow \boxed{n = -8}$$

$$\Rightarrow \boxed{m + n = -9}$$

۷۳. یک سهمی محور x ها را در نقاط $x = 1$ و $x = -3$ و محور y ها را در $y = 2$ قطع می کند. در این صورت عرض نقطه ای به طول ۵ روی این سهمی کدام است؟

$$\boxed{1} \quad -\frac{64}{5} \quad \boxed{2} \quad -16 \quad \boxed{3} \quad -\frac{16}{3} \quad \boxed{4} \quad -\frac{64}{3}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$y = a(x-1)(x+3) \xrightarrow{(0,2)} 2 = a(0-1)(0+3) \rightarrow 2 = -3a$$

$$\rightarrow \boxed{a = -\frac{2}{3}} \rightarrow y = -\frac{2}{3}(x-1)(x+3) \xrightarrow{x=5} y = -\frac{2}{3}(5-1)(5+3)$$

$$\rightarrow y = -\frac{2}{3}(4)(8) \rightarrow y = -\frac{64}{3}$$

$$۷۴. اگر $x = 2$ جواب معادله $\frac{(x^2+1)^2}{(x+k)^2} = \frac{3x+1}{(k+2)^2} + 2$ باشد، مقدار k کدام است؟$$

$$\boxed{1} \quad -5, -1 \quad \boxed{2} \quad 1, -2 \quad \boxed{3} \quad -5, 1 \quad \boxed{4} \quad 1, 2$$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا ریشه معادله را در معادله جایگذاری می نماییم:

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x+k)^2} = \frac{3x+1}{(k+2)^2} + 2 \xrightarrow{x=2} \frac{(2^2+1)^2}{(2+k)^2} = \frac{3(2)+1}{(k+2)^2} + 2 \rightarrow \frac{25}{(2+k)^2} = \frac{7+2(k+2)^2}{(k+2)^2}$$

می توان عامل را از مخرج دو طرف حذف نمود چون مخالف صفر است:

$$25 = 7 + 2(k+2)^2 \rightarrow 2(k+2)^2 = 18 \rightarrow (k+2)^2 = 9$$

$$\rightarrow |k+2| = 3 \begin{cases} k+2 = +3 \rightarrow k = 1 \\ k+2 = -3 \rightarrow k = -5 \end{cases}$$

$$۷۵. اگر k جواب معادله $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$ باشد، جواب معادله $\sqrt{x+k} = k$ کدام است؟$$

$$\boxed{1} \quad 6 \quad \boxed{2} \quad 3 \quad \boxed{3} \quad 15 \quad \boxed{4} \quad 9$$

پاسخ: گزینه ۱

برای حل ابتدا یکی از رادیکال ها را به طرف دوم منتقل می نماییم.

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{2x-5} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x+1 = 1 + 2x-5 + 2\sqrt{2x-5}$$



$$\rightarrow -x + 5 = 2\sqrt{2x - 5} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} x^2 - 10x + 25 = 4(2x - 5)$$

$$\rightarrow x^2 - 10x + 25 = 8x - 20 \rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$(x - 3)(x - 15) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow k = 3 \\ x = 15 \text{ غ ق} \end{cases}$$

حال باید معادله‌ی نهائی را بسازیم و حل کنیم:

$$\sqrt{x + k} = k \xrightarrow{k=3} \sqrt{x + 3} = 3 \xrightarrow{()^2} x + 3 = 9 \rightarrow x = 6$$

۷۶. تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{3x - 2} + 2x = 3$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sqrt{3x - 2} + 2x = 3 \rightarrow \sqrt{3x - 2} = 3 - 2x \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 3x - 2 = 9 - 12x + 4x^2$$

$$\rightarrow 4x^2 - 15x + 11 = 0 \xrightarrow{4-15+11=0} \begin{cases} x = 1 \rightarrow \sqrt{1} = 1\checkmark \\ x = \frac{c}{a} = \frac{11}{4} \rightarrow \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{5}{2} \text{ (غ ق)} \end{cases}$$

۷۷. مجموعه جواب معادله $\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$ کدام است؟

$\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ (۴)

$\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$ (۳)

$\left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$ (۲)

$\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ می‌توان معادله را از حالت کسری خارج کرد، لذا معادله را در ک.م.م خارج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \times(x-3)(x+4) \\ x \neq 3, -4 \end{smallmatrix}]{\quad} 2x(x+4) + (x+1)(x-3) = (x-1)(x+4)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 8x + x^2 - 2x - 3 = x^2 + 3x - 4 \rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\rightarrow (2x+1)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

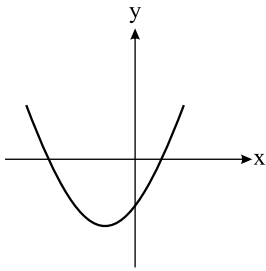
یا

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 1}{4} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



۷۸. نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. کدام گزینه درست است؟ $(\Delta = b^2 - 4ac)$



$$\frac{\Delta}{c} > 0, a \cdot b < 0 \quad (2)$$

$$\frac{\Delta}{c} < 0, a \cdot b < 0 \quad (1)$$

$$\frac{\Delta}{c} > 0, a \cdot b > 0 \quad (4)$$

$$\frac{\Delta}{c} < 0, a \cdot b > 0 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳ سهمی رو به بالا است، پس $a > 0$ و از طرفی نمودار سهمی محور x ها را در دو نقطه متمایز قطع می کند. یعنی معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه متفاوت است. بنابراین: $\Delta > 0$ ، همچنین عرض از مبدأ سهمی منفی است، پس:

$$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=0} y = c < 0$$

طول رأس سهمی نیز منفی است، پس:

$$x \text{ رأس} = -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a>0} b > 0$$

حال موارد مشخص شده در گزینه ها را بررسی می کنیم.

$$c < 0, \Delta > 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{c} < 0$$

$$a > 0, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$$

۷۹. نقاط $A(-2, 3)$ و $B(1, -6)$ دو سر قطر دایره C هستند. مساحت این دایره کدام است؟

$$135\pi \quad (4)$$

$$90\pi \quad (3)$$

$$45\pi \quad (2)$$

$$22,5\pi \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ طول پاره خط AB ، قطر دایره C است. بنابراین:

$$\begin{cases} A(-2, 3) \\ B(1, -6) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 + 6)^2} = \sqrt{90}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{90}}{2} \Rightarrow S = \pi \left(\frac{\sqrt{90}}{2} \right)^2 = \frac{90\pi}{4} = 22,5\pi$$

۸۰. در معادله $2x^2 - 3x - 8 = 0$ ، مجموع معکوس ریشه ها چقدر است؟

$$-\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{8} \quad (2)$$

$$\frac{8}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ اگر α و β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

$$2x^2 - 3x - 8 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \begin{cases} S = \frac{3}{2} \\ P = -4 \end{cases}$$



$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{s}{p} = \frac{\frac{3}{2}}{-4} = -\frac{3}{8}$$

۸۱. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$ کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad \boxed{4}$$

$$2\sqrt{3} \quad \boxed{3}$$

$$2\sqrt{2} \quad \boxed{2}$$

$$\sqrt{6} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها: } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 6 \\ \text{ضرب ریشه‌ها: } \alpha\beta = \frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} = A \rightarrow A^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta} \rightarrow A^2 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha\beta)^2} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^2} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{6^3 - 3(4)(6)}{16} + \frac{2}{2} = \frac{144}{16} + 1 = 9 + 1 \rightarrow A^2 = 10 \xrightarrow{A>0} A = \sqrt{10}$$

۸۲. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + kx + 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ به صورت $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ است؟

$$-8 \quad \boxed{4}$$

$$-10 \quad \boxed{3}$$

$$-14 \quad \boxed{2}$$

$$-12 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به معادله $x^2 + kx + 1 = 0$ داریم:

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \quad \text{و} \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -k$$

چون ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ به صورت $\{\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}\}$ است.

بنابراین:

$$S' = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \frac{-b}{a} = 4 \xrightarrow{\text{توان } 2} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 16$$

$$\rightarrow -k + 2\sqrt{1} = 16 \Rightarrow -k = 14 \Rightarrow k = -14$$

۸۳. به ازای کدام مقدار m ، رابطه $x_1x_2 + x_1 + x_2 = 4$ بین ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + (2m - 1)x = 5$ برقرار است؟

$$m \text{ هیچ مقدار } \boxed{4}$$

$$-\frac{3}{2} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{2}{3} \quad \boxed{2}$$

$$-\frac{2}{3} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ معادله درجه‌ی دوم را مرتب می‌کنیم:

$$x_1x_2 + x_1 + x_2 = 4 \rightarrow -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 4 \rightarrow \frac{1 - 2m}{m} - \frac{5}{m} = 4$$



$$\begin{aligned} \times m \\ \rightarrow 1 - 2m - 5 = 4m \rightarrow 6m = -4 \rightarrow m = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} -\frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x - 5 = 0 \rightarrow \Delta < 0 : \text{غ ق ق}$$

۸۴. نقاط $A|_2^1$ و $B|_2^{-5}$ و $C|_5^{-2}$ سه رأس یک مربع هستند مجموع طول و عرض رأس چهارم آن کدام است؟

- ۱) -3 ۲) -5 ۳) -1 ۴) 1

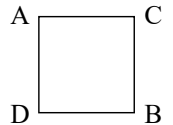
پاسخ: گزینه ۱ طول پاره خطهای AB و AC و BC را پیدا می‌کنیم تا مشخص شود ترتیب قرار گرفتن رئوس، در مربع چگونه است.

$$AB = \sqrt{(1+5)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{36+0} = 6$$

$$AC = \sqrt{(1+2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$BC = \sqrt{(-5+2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

واضح است که AB قطر مربع است. (قطر مربع، از حاصلضرب یک ضلع در $\sqrt{2}$ بدست می‌آید) یعنی:



$$\left. \begin{aligned} x_A + x_B = x_C + x_D &\rightarrow 1 - 5 = -2 + x_D \rightarrow x_D = -2 \\ y_A + y_B = y_C + y_D &\rightarrow 2 + 2 = 5 + y_D \rightarrow y_D = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow x_D + y_D = -3$$

۸۵. ریشه‌های کدام معادله از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 5x + 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (1) \quad x^2 - 3x - 2 = 0 \quad (2)$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (3) \quad 2x^2 - x - 2 = 0 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی را می‌نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله داده شده باشد و سپس معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌هایش یک واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی نوشته شده باشد. برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله‌ی داده شده‌ای باشد باید b را در k و c را در k^2 ضرب کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

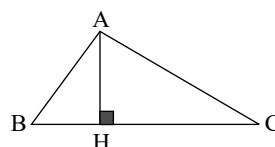
$$2x^2 - 5x + 1 = 0 \xrightarrow{\substack{2 \text{ در } b \\ 2 \text{ در } c}} 2x^2 - 10x + 4 = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x+1} 2(x+1)^2 - 10(x+1) + 4 = 0$$

$$\rightarrow 2x^2 + 4x + 2 - 10x - 10 + 4 = 0 \rightarrow 2x^2 - 6x - 4 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$$

۸۶. مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ ، مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC ،

کدام است؟

- ۱) 4 ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) 5 ۴) $4\sqrt{2}$



پاسخ: گزینه ۴ شکل فرضی را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادله خطی را که از دو نقطه B و C می‌گذرد می‌نویسیم



و سپس فاصله نقطه A از خط را به دست می آوریم.

$$BC : \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 7} = \frac{3 + 2}{7 - 2} = 1 \Rightarrow y - 3 = x - 7 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |A|_5 \\ x - y - 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow AH = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

توجه کنید فاصله نقطه A از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می آید.

۸۷. مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات $y + x = 2$ و $2y - x = 4$ و ضلع دیگر آن بر محور x قرار دارد کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

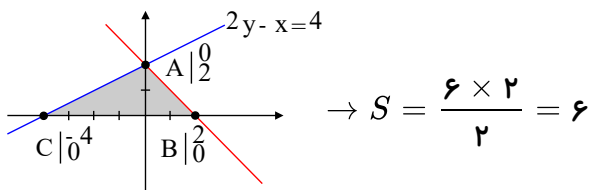
۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا محل برخورد این خطوط را با محورهای مختصات پیدا می کنیم.

$$y + x = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}, \quad 2y - x = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

سپس با رسم این خطوط، مساحت مثلث را به دست می آوریم.



۸۸. در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر رابطه $9a + c = 3b$ بین ضرایب معادله برقرار باشد، کدام گزینه، یکی از ریشه های معادله است؟

 $-\frac{c}{a}$ (۴) $-\frac{c}{3a}$ (۳) $\frac{c}{3a}$ (۲) $\frac{c}{a}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ با کمی دقت متوجه می شویم که یک ریشه معادله $x_1 = -3$ است، زیرا اگر $x_1 = -3$ را در معادله صدق دهیم به رابطه داده شده در سوال می رسیم:

$$x_1 = -3 \xrightarrow{\text{معادله}} a(-3)^2 - 3b + c = 0 \rightarrow 9a + c = 3b$$

می دانیم: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ، بنابراین:

$$-3x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow x_2 = \frac{c}{-3a}$$

۸۹. معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m ، کدام است؟

(-۶, -۴) (۴)

(-۶, ۰) (۳)

(-۴, -۲) (۲)

(-۴, ۰) (۱)

پاسخ: گزینه ۴ برای این منظور باید $\Delta > 0$ ، $S > 0$ ، $P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow m^2 - 8(m + 6) > 0 \rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0 \rightarrow (m - 12)(m + 4) > 0$$



تعیین علامت

$$\longrightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \rightarrow -m > 0 \rightarrow m < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \rightarrow m+6 > 0 \rightarrow m > -6 \quad (III)$$

از اشتراک I, II, III به جواب $-6 < m < -4$ می‌رسیم.

۹۰. خط $2x + y = 4$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1, 1)$ مماس است. اگر نقطه‌ای روی خط مماس داده شده باشد، طول مماس AM کدام است؟ (M نقطه‌ی تماس خط و دایره است).

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad \boxed{۴}$$

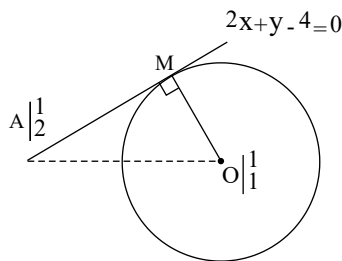
$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \boxed{۳}$$

$$\sqrt{5} \quad \boxed{۲}$$

$$2\sqrt{5} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا می‌توان یک تصویر کلی را رسم نمود.

باتوجه به تصویر ابتدا شعاع دایره یا OM را محاسبه می‌کنیم:

$$2x + y - 4 = 0, a = 2, b = 1, c = -4, x_0 = 1, y_0 = 1$$

$$d = OM = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(1) + 1(1) - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

حال با استفاده از فرمول فاصله‌ی دو نقطه طول OA را محاسبه می‌نماییم:

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} \rightarrow OA = \sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - 1)^2} = 1$$

باتوجه به فیثاغورث داریم:

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \rightarrow AM = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۹۱. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = x^2 - (m-1)x + 4$ در بالای محور x ها قرار می‌گیرد؟

$$-1 < m < 4 \quad \boxed{۴}$$

$$-3 < m < 4 \quad \boxed{۳}$$

$$-2 < m < 4 \quad \boxed{۲}$$

$$-3 < m < 5 \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱ شرط آنکه تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد آن است که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد. بنابراین:

$$I): a > 0 \rightarrow 1 > 0 \text{ همواره برقرار است}$$

$$II): \Delta < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow (-(m-1))^2 - 16 < 0 \rightarrow (m-1)^2 < 16$$



$$\rightarrow -4 < m - 1 < 4 \rightarrow -3 < m < 5$$

۹۲. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 3 = 0$ دو عدد طبیعی متوالی است، مقدار m کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ قدر مطلق تفاضل دو عدد طبیعی برابر یک باشد.

$$|x' - x''| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|1|} = 1 \Rightarrow \sqrt{(2m+1)^2 - 4(m^2 + 3)} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{4m^2 + 1 + 4m - 4m^2 - 12} = 1 \Rightarrow \sqrt{4m - 11} = 1$$

$$\Rightarrow 4m - 11 = 1 \Rightarrow 4m = 12 \Rightarrow m = 3$$

۹۳. به ازای کدام مقدار m ، رأس سهمی $y = mx^2 - 3x + 1$ بر روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

۳ (۴)

۱۵ (۳)

-۱۵ (۲)

-۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ یعنی باید مختصات نقطه‌ی K را بدست آوریم و سپس نقطه را در خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) صدق دهیم.

$$\left. \begin{aligned} x_s &= \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_s = \frac{3}{2m} \\ y_s &= \frac{4aa - b^2}{4a} \Rightarrow y_s = \frac{4m - 9}{4m} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{y=x} \frac{4m - 9}{4m} = \frac{3}{2m}$$

$$\Rightarrow 8m - 18 = 12 \Rightarrow 8m = 30 \Rightarrow m = \frac{15}{4}$$

۹۴. خط $y = -4$ در پایین‌ترین نقطه سهمی به معادله $y = ax^2 - \sqrt{8}x + a - 3$ بر آن مماس است. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

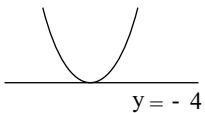
-۲ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ مطابق شکل مقابل $y = -4$ باید عرض رأس سهمی باشد.



عرض رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ برابر $\frac{4ac - b^2}{4a}$ است.

پس:

$$\frac{4a(a - 3) - (-\sqrt{8})^2}{4a} = -4$$

$$4a^2 - 12a - 8 = -16a \Rightarrow 4a^2 + 4a - 8 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$$

$$a = -2, a = 1$$



جواب ۲- قابل قبول نیست چون سهمی مینیمم ندارد. پس مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۱ است.

۹۵. معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن، مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x - 2 = 0$ باشند، کدام است؟

$$x^2 - 58x + 4 = 0 \quad \boxed{۲}$$

$$x^2 - 58x + 16 = 0 \quad \boxed{۱}$$

$$x^2 - 29x + 4 = 0 \quad \boxed{۴}$$

$$x^2 - 29x + 16 = 0 \quad \boxed{۳}$$

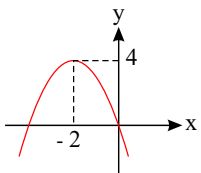
پاسخ: گزینه ۴ اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده را α و β بنامیم باید معادله‌ی درجه‌ی دوم جدیدی بنویسیم که ریشه‌هایش α^2 و β^2 باشند.

$$S_{\text{قدیم}} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5, \quad P_{\text{قدیم}} = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -2$$

$$S_{\text{جدید}} = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 2(-2) = 29$$

$$P_{\text{جدید}} = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2 = (-2)^2 = 4$$

می‌دانیم که اگر مجموع (S) و حاصل ضرب دو ریشه (P) را داشته باشیم معادله‌ی درجه‌ی دوم مطلوب به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است پس معادله‌ی مطلوب به صورت $x^2 - 29x + 4 = 0$ است.



۹۶. با توجه به نمودار تابع $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ مقدار a کدام است؟

$$۲ \quad \boxed{۴}$$

$$-۲ \quad \boxed{۳}$$

$$-۱ \quad \boxed{۲}$$

$$۱ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ طول رأس سهمی برابر $x_s = -2$ است و چون تابع درجه‌ی دوم از مبدأ مختصات گذشته، پس یکی از نقاط برخورد تابع با محور

x ها $x_1 = 0$ است، بنابراین محل دیگر برخورد تابع با محور x ها $x_2 = -4$ است $(x_s = \frac{x_1 + x_2}{2})$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow[x_2 = -4]{x_1 = 0} f(x) = a(x - 0)(x + 4) \rightarrow f(x) = ax(x + 4)$$

چون نقطه $(-2, 4)$ روی سهمی قرار دارد، پس مختصاتش در معادله سهمی صدق می‌کند.

$$\left| \begin{array}{l} -۲ \\ ۴ \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 4 = -2a(-2 + 4) \rightarrow 4 = -4a \rightarrow a = -1$$

۹۷. پنج عدد طبیعی متوالی مفروضند. مجموع مربعات سه تای اول برابر است با مجموع مربعات دوتای آخر، کوچک ترین آن‌ها کدام است؟

$$۱۸ \quad \boxed{۴}$$

$$۱۰ \quad \boxed{۳}$$

$$۵ \quad \boxed{۲}$$

$$۲ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ کافی است اعداد $x, x+1, x+2, x+3, x+4$ را در نظر بگیریم:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 10 & \text{ق ق} \\ x = -2 & \text{غ ق (طبیعی نمی‌باشد)} \end{cases}$$



۹۸. اگر α ریشه معادله $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ باشد حاصل $7\alpha^2 - 5\alpha + 1$ کدام گزینه است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ برای حل می‌توان عبارت $x^2 - 2x + 3$ را t در نظر گرفت و پس معادله را در ک.م.م مخارج ضرب کرد:

$$\frac{1}{t-1} + \frac{2}{t} = \frac{6}{t+1}$$

$$\xrightarrow{\times(t-1)t(t+1)} t(t+1) + 2(t-1)(t+1) = 6t(t-1)$$

$$\rightarrow t^2 + t + 2t^2 - 2 = 6t^2 - 6t \rightarrow 3t^2 - 7t + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 25$$

$$t_1 = \frac{7+5}{6} = 2 \rightarrow x^2 - 2x + 3 = 2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$t_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{3} \rightarrow x^2 - 2x + \frac{8}{3} = 0 \rightarrow \Delta < 0$$

پس عبارت مورد نظر مسئله برابر است با:

$$7\alpha^2 - 5\alpha + 1 \stackrel{\alpha=1}{=} +3$$

۹۹. دایره‌ای به مرکز $(2, 1)$ ، بر دو خط به معادلات $3x + 4y = 5$ و $12y - 5x = a$ مماس است. دو مقدار ممکن برای a کدام است؟

-۱ و -۳ (۴)

۱۵ و -۱۱ (۳)

۱ و ۳ (۲)

-۱۵ و ۱۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ چون دایره بر دو خط مماس است، پس فاصله مرکز دایره با دو خط، مساوی و برابر شعاع دایره است:

$$O(2, 1), 3x + 4y - 5 = 0, -5x + 12y - a = 0$$

$$d_1 = \frac{|3(2) + 4(1) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$d_2 = \frac{|-5(2) + 12(1) - a|}{\sqrt{(-5)^2 + 12^2}} = \frac{|2 - a|}{\sqrt{169}} = \frac{|2 - a|}{13}$$

$$d_1 = d_2 \rightarrow \frac{|2 - a|}{13} = 1 \rightarrow |2 - a| = 13 \rightarrow \begin{cases} 2 - a = 13 \rightarrow 2 - 13 = a \rightarrow a = -11 \\ 2 - a = -13 \rightarrow 2 + 13 = a \rightarrow a = 15 \end{cases}$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.



۱۰۰. در معادله ی $x^2 - 8x + 4 = 0$ حاصل $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ کدام است؟ (x_1, x_2) ریشه های معادله هستند

۱۸ (۴)

۱۲ (۳)

۳ (۲)

۲√۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ اگر x_1 و x_2' ریشه های معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند ($x_1, x_2 > 0$) حاصل $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ از رابطه ی $\sqrt{S + 2\sqrt{P}}$ به دست می آید.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 8, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 4$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{4}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

۱۰۱. بزرگترین ریشه ی معادله ی $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{5}{2x - 1} + 5$ کدام است؟

-۲ (۴)

$\frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

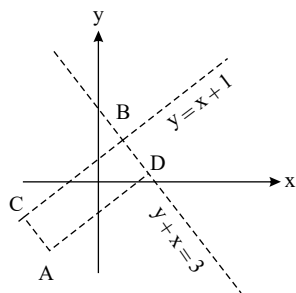
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{5}{2x - 1} + 5 \rightarrow \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{5 + 10x - 5}{2x - 1} \rightarrow \frac{x - 2}{x + 1} = \frac{10x}{2x - 1}$$

$$\rightarrow 2x^2 - x - 4x + 2 = 10x^2 + 10x \rightarrow 8x^2 + 15x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 225 + 64 = 289 \Rightarrow x_1 = \frac{-15 + 17}{16} = \frac{1}{8} \quad x_2 = \frac{-15 - 17}{16} = -2$$

ریشه ی بزرگتر، $x = \frac{1}{8}$ است.

۱۰۲. معادله دو ضلع یک متوازی الاضلاع برابر $BC: y - x = 1$ و $BD: y + x = 3$ است. اگر نقطه $A(-1, -2)$ یک رأس این متوازی الاضلاع باشد، طول قطر CD کدام است؟



۲√۵ (۲)

√۵ (۱)

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۴)

۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} BC: y = x + 1 \rightarrow m_{BC} = 1 \\ BD: y = -x + 3 \rightarrow m_{BD} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp BD$$

پس متوازی الاضلاع $ACBD$ یک مستطیل است و طول دو قطر با هم برابر است:

$$CD = AB$$



$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 3 \end{cases}$$

$$2y = 4 \rightarrow y = 2, x = 1 \rightarrow B(1, 2)$$

$$AB = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \rightarrow AB = CD = 2\sqrt{5}$$

۱۰۳. نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن کدام است؟

$$(3, 0) \quad \boxed{4}$$

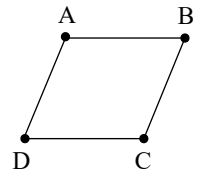
$$(3, 1) \quad \boxed{3}$$

$$(4, 1) \quad \boxed{2}$$

$$(4, 2) \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ بین مختصات چهار رأس رابطه زیر را برقرار است.

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



کافیست مختصات رئوس مطرح شده را جایگذاری نماییم.

$$2 + 1 = x_D + (-1) \Rightarrow x_D = 4$$

$$\Rightarrow D(4, 1)$$

$$3 + (-2) = y_D + 0 \Rightarrow y_D = 1$$

۱۰۴. دو نقطه A و B واقع بر خط $2x - y = 0$ از خط به معادله $3x = 4y + 5$ به فاصله ۲ قرار دارند. طول پاره خط AB کدام است؟

$$\frac{7}{10} \quad \boxed{4}$$

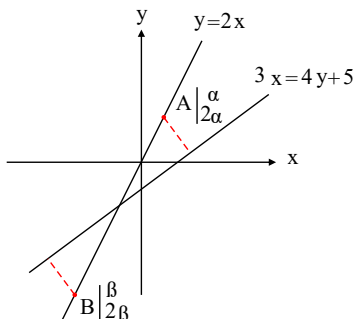
$$4\sqrt{5} \quad \boxed{3}$$

$$3\sqrt{2} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{4}{10} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا با رسم یک نمودار، وضعیت کلی نقاط و خطوط را مشخص می‌نماییم.



با توجه به معادله می‌توان مختصات نقاط A و B را شکل پارامتری نوشت و فاصله آن را تا خط $3x - 4y - 5 = 0$ محاسبه نمود.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \frac{|3\alpha - 4(2\alpha) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$$



$$\rightarrow \frac{|-5\alpha - 5|}{5} = 2 \rightarrow \frac{5|\alpha + 1|}{5} = 2 \rightarrow |\alpha + 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 1 = 2 \rightarrow \alpha = 1 \\ \alpha + 1 = -2 \rightarrow \alpha = -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -3 \\ -6 \end{vmatrix} \rightarrow AB = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

۱۰۵. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - ax + a + 2 = 0$ تفاضل دو ریشه برابر ۲ است. a کدام است؟

- ۱) $-2, -6$ ۲) $2, -6$ ۳) $-2, 6$ ۴) $2, 6$

پاسخ: گزینه ۳

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{a^2 - 4a - 8}}{1} = 2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a - 8 = 4 \Rightarrow a^2 - 4a - 12 = 0 \Rightarrow (a - 6)(a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -2 \end{cases}$$

هر دو جواب Δ را مثبت می‌کنند پس قابل قبول اند.

۱۰۶. در معادله $x^2 - 4x - 7 = 0$ با ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل $\frac{x_2}{x_1 - 4}$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ راهنمایی: مجموع ریشه‌ها را به‌دست آورید.

مجموع ریشه‌ها برابر $4 = -\frac{b}{a}$ است. یعنی:

$$x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow x_1 - 4 = -x_2$$

حالا عبارت به‌دست آمده را در $\frac{x_2}{x_1 - 4}$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{x_2}{x_1 - 4} = \frac{x_2}{-x_2} = -1$$

۱۰۷. می‌خواهیم با ۴۴۰ متر تور سیمی در ساحل دریا محوطه مستطیل‌شکلی را حصار بکشیم. در این صورت

بیشترین مساحت محوطه تور کشیده‌شده کدام است؟



- ۱) ۲۴۰۰۰ ۲) ۴۲۰۰۰ ۳) ۱۲۱۰۰ ۴) ۲۴۲۰۰

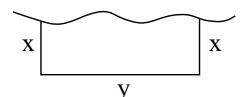
پاسخ: گزینه ۴

$$2x + y = 440 \rightarrow y = 440 - 2x$$

$$\text{مساحت} = xy = x(440 - 2x) = -2x^2 + 440x$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-440}{2(-2)} \Rightarrow x_s = 110$$

$$\rightarrow \text{مساحت حداکثر } S_{\max} = -2(110)^2 + 440 \times 110 = 24200$$





۱۰۸. دو نقطه روی خط به معادله $x - y = 1$ قرار دارند که فاصله‌ی آنها از خط به معادله $2x + 3y = 6$ برابر $\sqrt{13}$ است. مجموع عرض این دو نقطه کدام است؟

$$\frac{4}{5} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{8}{5} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{22}{5} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{17}{5} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ مختصات نقاط روی خط $y = x - 1$ به صورت $\begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha - 1 \end{vmatrix}$ هستند حال، فاصله‌ی این نقاط را از خط به معادله $2x + 3y - 6 = 0$ به دست آورده و برابر $\sqrt{13}$ قرار می‌دهیم.

$$\frac{|2\alpha + 3(\alpha - 1) - 6|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|\alpha - 9|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \rightarrow |\alpha - 9| = 13$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha - 9 = 13 \rightarrow \alpha = \frac{22}{5} \rightarrow \alpha - 1 = \frac{22}{5} - 1 = \frac{17}{5} \\ \alpha - 9 = -13 \rightarrow \alpha = -\frac{4}{5} \rightarrow \alpha - 1 = -\frac{4}{5} - 1 = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

بنابراین مجموع عرض این دو نقطه برابر $\frac{17}{5} - \frac{9}{5} = \frac{8}{5}$ است.

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

۱۰۹. اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل $A = (\alpha + \frac{2}{\beta})^2 + (\beta + \frac{2}{\alpha})^2$ کدام است؟

$$84 \quad \boxed{4}$$

$$40 \quad \boxed{3}$$

$$32 \quad \boxed{2}$$

$$20 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$ و $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 5$ است.

$$A = (\alpha + \frac{2}{\beta})^2 + (\beta + \frac{2}{\alpha})^2 = (\frac{\alpha\beta + 2}{\beta})^2 + (\frac{\alpha\beta + 2}{\alpha})^2$$

$$\Rightarrow A = (\frac{2+2}{\beta})^2 + (\frac{2+2}{\alpha})^2 = \frac{16}{\beta^2} + \frac{16}{\alpha^2} = \frac{16(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha\beta)^2} = \frac{16((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^2} = \frac{16(25 - 4)}{4} = 84$$

۱۱۰. در معادله‌ی $3x^2 - 15x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها ۱ واحد از ریشه‌ی دیگر بیش تر باشد، m کدام است؟

$$21 \quad \boxed{4}$$

$$16 \quad \boxed{3}$$

$$18 \quad \boxed{2}$$

$$15 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی داده شده باشند داریم:



$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 1 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 6 \Rightarrow \frac{m}{3} = 6 \Rightarrow m = 18$$

روش دوم: یعنی قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها برابر یک است.

$$|x_1 - x_2| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{225 - 12m}}{|3|} = 1$$

$$\sqrt{225 - 12m} = 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 225 - 12m = 9 \Rightarrow 12m = 216 \Rightarrow m = \frac{216}{12} = 18$$

۱۱۱. کمترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 - 4x - 3$ برابر ۱۰- است. معادلهٔ محور تقارن نمودار تابع f کدام است؟

$$y = \frac{7}{4} \quad \boxed{۴}$$

$$y = \frac{7}{2} \quad \boxed{۳}$$

$$x = \frac{4}{7} \quad \boxed{۲}$$

$$x = \frac{7}{2} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱ کمترین مقدار تابع برابر است با:

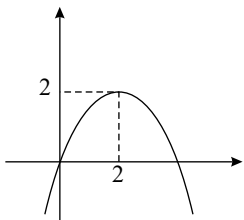
$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4a(-3) - (-4)^2}{4a} = \frac{-12a - 16}{4a} = -10$$

$$\Rightarrow -12a - 16 = -40a \Rightarrow 28a = 16 \Rightarrow a = \frac{4}{7}$$

بنابراین معادلهٔ محور تقارن به صورت زیر است:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times \frac{4}{7}} = \frac{7}{2}$$

۱۱۲. نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f(ab)$ کدام است؟



$$-\frac{3}{2} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{3}{2} \quad \boxed{۱}$$

$$-2 \quad \boxed{۴}$$

$$-\frac{5}{2} \quad \boxed{۳}$$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به این که $x = 2$ محور تقارن نمودار است و $x = 0$ یکی از ریشه‌های $f(x)$ است، پس $x = 4$ ریشهٔ دیگر است.

$$f(x) = x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} = 4 \Rightarrow b = -4a \end{cases} \Rightarrow f(x) = ax^2 - 4ax$$

از طرف دیگر نمودار از نقطهٔ $(2, 2)$ عبور کرده است. پس:

$$f(2) = 2 \Rightarrow 4a - 8a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$



$$f(ab) = f(-1) = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$

۱۱۳. معادله $\frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x^2 + 1}$ چند ریشه متمایز دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۲ مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x^2 + 1} \Rightarrow \frac{x^2 - x + 1 - x^2 - x - 1}{(x^2 + 1)^2 - x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{-2x}{x^4 + 2x^2 + 1 - x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \Rightarrow x^2 + 1 = -2x$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

۱۱۴. دو ضلع مربعی روی دو خط $3x + 4y - k = 0$ و $6x + 8y = 50$ قرار دارند. اگر محیط مربع برابر

$\frac{8k}{5}$ باشد، مقدار k^2 کدام است؟

۲۵ (۴)

۶۲۵ (۳)

$\frac{625}{9}$ (۲)

$\frac{25}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$6x + 8y = 50 \xrightarrow{\div 2} 3x + 4y - 25 = 0$$

پس دو خط $3x + 4y - k = 0$ و $3x + 4y - 25 = 0$ باهم موازی هستند و فاصله این دو خط موازی برابر با طول ضلع مربع است و داریم:

$$d = \frac{|-25 - (-k)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|k - 25|}{5}$$

$$\text{محیط مربع} = \frac{8k}{5} = 4d \rightarrow d = \frac{2k}{5}$$

در نتیجه:

$$\frac{|k - 25|}{5} = \frac{2k}{5} \rightarrow \begin{cases} k - 25 = 2k \rightarrow k = -25 \\ k - 25 = -2k \rightarrow 3k = 25 \rightarrow k = \frac{25}{3} \end{cases} \rightarrow k^2 = \frac{625}{9}$$



۱۱۵. اگر $x = k$ جواب معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x}{x+2}$ باشد، مجموع جواب‌های معادله $2x^2 - 15kx - 1 = 0$ کدام است؟

$$-\frac{5}{2} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{5}{2} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{3}{2} \quad \boxed{2}$$

$$-\frac{3}{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{x}{x-2} - \frac{x+1}{(x+2)(x-2)} = \frac{x}{x+2}$$

دو طرف معادله را در $(x+2)(x-2)$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\rightarrow x(x+2) - (x+1) = x(x-2) \rightarrow x^2 + 2x - x - 1 = x^2 - 2x \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$\text{معادله: } 2x^2 - 15\left(\frac{1}{3}\right)x - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 - 5x - 1 = 0 \rightarrow \text{مجموع جواب‌ها: } S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$$

۱۱۶. نقطه M روی خط $y = x + 1$ از دو نقطه $A(-3, +1)$ و $B(0, -1)$ به یک فاصله می‌باشد. $4(x_M^2 + y_M^2)$ کدام است؟

$$10 \quad \boxed{4}$$

$$34 \quad \boxed{3}$$

$$24 \quad \boxed{2}$$

$$15 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ طول نقطه M را α فرض می‌نمائیم. با توجه به اینکه روی خط $y = x + 1$ قرار دارد، مختصات آن به صورت $M(\alpha, \alpha + 1)$ خواهد بود و می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} |AM| &= |BM| \rightarrow \sqrt{(\alpha+3)^2 + (\alpha+1-1)^2} = \sqrt{(\alpha-0)^2 + (\alpha+1+1)^2} \\ \rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 6\alpha + 9 + \alpha^2} &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + 4\alpha + 4} \xrightarrow{()^2} 2\alpha^2 + 6\alpha + 9 = 2\alpha^2 + 4\alpha + 4 \\ \rightarrow 2\alpha &= -5 \rightarrow \alpha = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

پس مختصات نقطه M برابر است با: $M(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$

$$4(x_M^2 + y_M^2) = 4\left(\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right) = 4\left(\frac{25}{4} + \frac{9}{4}\right) = 34$$

۱۱۷. تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$ کدام است؟

$$1 \quad \boxed{4}$$

$$2 \quad \boxed{3}$$

$$3 \quad \boxed{2}$$

$$\text{صفر} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{x+2} - 1 = \sqrt{2x-3} \xrightarrow{\text{توان } 2} x+2+1-2\sqrt{x+2} = 2x-3$$



$$\rightarrow x + 3 - 2x + 3 = 2\sqrt{x+2} \rightarrow 2\sqrt{x+2} = 6 - x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(x+2) = 36 + x^2 - 12x$$

$$\rightarrow x^2 - 16x + 28 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x-14) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{قق} \\ x=14 & \text{غقق} \end{cases}$$

۱۱۸. از مبدأ مختصات خطی با شیب m رسم کرده‌ایم. این خط منحنی $(x-3)^2 + y^2 = 1$ را در دو نقطه قطع می‌نماید. حدود m کدامست؟

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \text{۲} \quad \quad \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \text{۱}$$

$$(-1, +1) \quad \text{۴} \quad \quad \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, +\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{۳}$$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا معادله‌ی خط مورد نظر را می‌نویسیم.

$$y - 0 = m(x - 0) \rightarrow y = mx$$

حال باید معادله‌ی برخورد خط و منحنی را تشکیل دهیم.

$$(x-3)^2 + y^2 = 1 \xrightarrow{y=mx} (x-3)^2 + (mx)^2 = 1 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + m^2x^2 = 1$$

$$\rightarrow (m^2 + 1)x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4(m^2 + 1)(8) \rightarrow \Delta = 36 - 32m^2 - 32$$

چون خط و منحنی در دو نقطه یکدیگر را قطع کرده‌اند پس معادله دو ریشه دارد و $\Delta > 0$

$$\rightarrow \Delta = 4 - 32m^2 \xrightarrow{\Delta > 0} 4 - 32m^2 > 0 \rightarrow m^2 < \frac{1}{8} \rightarrow |m| < \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{\sqrt{8}} < m < \frac{1}{\sqrt{8}} \xrightarrow{\text{گویا}} -\frac{\sqrt{2}}{4} < m < \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۱۹. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 3 = 0$ باشند. حاصل $\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

$$6 \quad \text{۴}$$

$$3 \quad \text{۳}$$

$$-6 \quad \text{۲}$$

$$-3 \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P, \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -1 + 9(-1) = -10$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2(-3) = 7$$



$$\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2 + \beta^2 = -10 + 7 = -3$$

۱۲۰. در یک لوزی قطر بزرگ دو برابر قطر کوچک است. اگر معادله قطر کوچک $3x - 4y + 1 = 0$ و یک رأس لوزی $(-1, 2)$ باشد، محیط لوزی کدام است؟

۲ [۴]

۴ [۳]

$2\sqrt{5}$ [۲]

$4\sqrt{5}$ [۱]

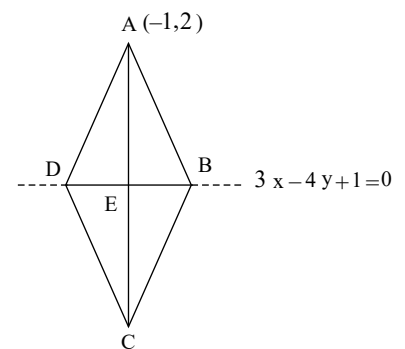
پاسخ: گزینه ۱ نقطه $A(-1, 2)$ در معادله قطر کوچک ($3x - 4y + 1 = 0$) صدق نمی‌کند، بنابراین نقطه A روی قطر بزرگ قرار دارد و فاصله $A(-1, 2)$ از خط $3x - 4y + 1 = 0$ ، برابر نصف قطر بزرگ است داریم:

$$AE = \frac{|3(-1) - 4(2) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$BD \times 2 = (AC \text{ قطر بزرگ}) \rightarrow BE = 1$

$$\rightarrow AB^2 = AE^2 + BE^2 \rightarrow AB^2 = 2^2 + 1^2 \rightarrow AB = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow \text{محیط لوزی} = 4\sqrt{5}$$



۱۲۱. نقاط $A(m - n, 2m + 3)$ و $B(m + n, 2n - 3)$ نسبت به نقطه $C(-2, 2)$ قرینه یکدیگرند. در این صورت $3m - 2n$ کدام است؟

۴ [۴]

-۲ [۳]

-۱۴ [۲]

-۶ [۱]

پاسخ: گزینه ۲ A و B نسبت به C قرینه‌اند. پس C وسط AB است. بنابراین:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow \frac{m - n + m + n}{2} = -2 \Rightarrow m = -2$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow \frac{2m + 3 + 2n - 3}{2} = 2 \Rightarrow m + n = 2$$

$$\xrightarrow{m=-2} n - 2 = 2 \Rightarrow n = 4$$

در نتیجه:

$$3m - 2n = 3 \times (-2) - 2 \times (4) = -14$$

۱۲۲. سه نقطه متمایز $A(3, 2)$ ، $B(m + 1, m)$ و $C(m^2, m + 1)$ روی یک خط قرار دارند. در این صورت عرض از مبدأ خط کدام است؟

۱ [۴]

-۱ [۳]

۵ [۲]

-۴ [۱]

پاسخ: گزینه ۳

اگر ۳ نقطه A و B و C روی یک امتداد قرار داشته باشند، آن‌گاه شیب همه‌ی پاره‌خط‌های موجود با هم برابر می‌باشد.

$$m_{AB} = m_{AC}$$



$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - m}{3 - (m + 1)} = \frac{2 - m}{2 - m} = 1, \quad m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{m + 1 - 2}{m^2 - 3} = \frac{m - 1}{m^2 - 3}$$

$$\rightarrow \frac{m - 1}{m^2 - 3} = 1 \rightarrow m^2 - 3 = m - 1 \rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

حال باید هر دو مقدار را جایگذاری نماییم

$$m = 2 \rightarrow A(3, 2), B(3, 2), (4, 3) \text{ غیر قابل قبول}$$

$m = 2$ غیر قابل قبول است، زیرا در نقطه A و B بر هم منطبق می‌شوند.

$$m = -1 \rightarrow A(3, 2), B(0, -1), C(1, 0)$$

حال می‌توان معادله‌ی خط گذرنده از این نقاط را محاسبه کرد.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - (-1)}{3 - 0} = \frac{3}{3} = 1$$

$$m_{AB} = 1 \rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y + 1 = 1(x - 0) \rightarrow y = x - 1$$

۱۲۳. ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + mx + n = 0$ ، نصف ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 7 = 0$ است، حاصل $m + n$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)} \quad -\frac{1}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۳)} \quad -\frac{1}{2} \text{ (۴)}$$

پاسخ: گزینه ۲ نکته: معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل ضرب ریشه‌های آن P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 7 = 0$ باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{3}{1} = -3, \quad P = \alpha \cdot \beta = -\frac{7}{1} = -7$$

ریشه‌های معادله $x^2 + mx + n = 0$ برابر $\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\beta}{2}$ هستند، پس:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = -\frac{m}{1} \Rightarrow \frac{1}{2}S = -m \Rightarrow \frac{1}{2} \times (-3) = -m \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} \times \frac{\beta}{2} = \frac{n}{1} \Rightarrow n = \frac{1}{4}P = \frac{1}{4}(-7) \Rightarrow n = -\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow m + n = \frac{3}{2} - \frac{7}{4} = \frac{6 - 7}{4} = -\frac{1}{4}$$

۱۲۴. اگر $x = a$ ریشه معادله $\sqrt{3x + 4} = 1 + \sqrt{x + 5}$ باشد، حاصل $\sqrt{a^2 - a - 3}$ کدام است؟

$$3 \text{ (۱)} \quad 2 \text{ (۲)} \quad 2\sqrt{2} \text{ (۳)} \quad \sqrt{6} \text{ (۴)}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt{3x + 4} = 1 + \sqrt{x + 5} \rightarrow (\sqrt{3x + 4})^2 = (1 + \sqrt{x + 5})^2 \rightarrow 3x + 4 = 1 + x + 5 + 2\sqrt{x + 5}$$



$$\rightarrow 2x - 2 = 2\sqrt{x+5} \rightarrow (x-1)^2 = (\sqrt{x+5})^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 5 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

این جوابها را در معادله اصلی جای گذاری می کنیم. می بینیم که فقط $x = 4$ صدق می کند و جواب معادله است.

$$a = 4 \Rightarrow \sqrt{a^2 - a - 3} = \sqrt{16 - 4 - 3} = \sqrt{9} = 3$$

۱۲۵. به ازای چند مقدار صحیح m ، نمودار تابع $y = mx^2 - 2(m+1)x + m + 2$ محور x ها را در دو نقطه در سمت چپ محور y ها قطع می کند؟

۴ صفر

۳ ۶

۲ ۷

۱ ۵

پاسخ: گزینه ۴ چون نمودار تابع، محور x ها را در دو نقطه در سمت چپ محور y ها قطع کرده است، پس تابع دو ریشه حقیقی منفی دارد.

$$y = mx^2 - 2(m+1)x + m + 2$$

$$I) \Delta > 0 \rightarrow [-2(m+1)]^2 - 4(m)(m+2) > 0 \rightarrow \cancel{4m^2} + \cancel{4m} + 4 - \cancel{4m^2} - \cancel{8m} > 0$$

$\rightarrow 4 > 0$ همواره برقرار است

$$II) S < 0 \rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow \frac{2(m+1)}{m} < 0 \rightarrow \frac{m}{S} \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & \\ + & 0 & - \end{array} \right. \begin{array}{c} \text{ن} \\ \text{ت} \end{array} \Rightarrow \text{جواب: } -1 < m < 0$$

$$III) P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m+2}{m} > 0 \rightarrow \frac{m}{S} \left| \begin{array}{ccc} -2 & 0 & \\ + & 0 & - \end{array} \right. \begin{array}{c} \text{ن} \\ \text{ت} \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{جواب: } (m < -2) \cup (0, +\infty)$$

باید بین جوابهای به دست آمده در سه قسمت بالا اشتراک بگیریم. واضح است که $(I) \cap (II) \cap (III) = \emptyset$. بنابراین به ازای هیچ مقدار m ، نمودار تابع داده شده محور x ها را در دو نقطه با طول منفی قطع نمی کند.

۱۲۶. اگر معادله $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$ دارای دو ریشه مضاعف باشد، مقدار m کدام می تواند باشد؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

پاسخ: گزینه ۲ با فرض $x^2 = u$ داریم:

$$u^2 - mu + m - 1 = 0$$

معادله بر حسب u باید ریشه مضاعف داشته باشد تا معادله بر حسب x دارای دو ریشه مضاعف باشد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4 \times (1) \times (m-1) = m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\xrightarrow{m=2} x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1)^2 = 0$$

معادله دارای دو ریشه مضاعف $x = -1$ و $x = 1$ است.



۱۲۷. دو ضلع یک مستطیل بر دو خط $y - 2x = 3$ و $4x + 8y - 4 = 0$ واقع‌اند. اگر نقطه $A \begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ یکی

از رئوس این مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۷٫۵ (۴)

۱۵ (۳)

۵ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$y - 2x = 3 \rightarrow m_1 = 2, \quad 4x + 8y - 4 = 0 \rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$$

دو ضلع گفته شده بر هم عمودند و نقطه $A \begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ در هیچکدام صدق نمی‌کند، بنابراین فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ از دو ضلع گفته شده برابر طول و عرض مستطیل است:

$$d_1 = \frac{|-4 - 2(-1) - 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$d_2 = \frac{|4(-1) + 8(-4) - 4|}{\sqrt{4^2 + 8^2}} = \frac{40}{\sqrt{80}} = \frac{40}{\sqrt{16 \times 5}} = \frac{40}{4\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow \text{مساحت مستطیل } S = d_1 \times d_2 = \sqrt{5} \times \frac{10}{\sqrt{5}} = 10$$

۱۲۸. اگر نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) فقط از ناحیه اول محورهای مختصات عبور نکند، علامت a ، b و c چگونه‌اند؟

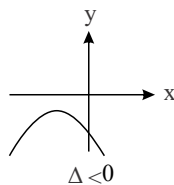
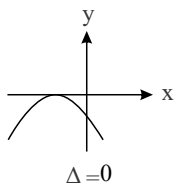
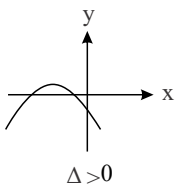
$c < 0$ و $b \geq 0$ ، $a < 0$ (۲)

$c \geq 0$ و $b < 0$ ، $a < 0$ (۱)

$c \leq 0$ و $b < 0$ ، $a < 0$ (۴)

$c > 0$ و $b \leq 0$ ، $a > 0$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴ برای آن که نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ از ناحیه اول عبور نکند باید دارای ماکزیمم و به صورت باشد، یعنی باید ضریب x^2 منفی باشد. ($a < 0$)
حال به بررسی حالت‌های احتمالی می‌پردازیم:



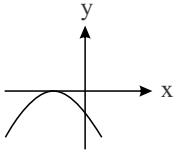
در حالت اول که $\Delta > 0$ است: (α و β ریشه‌های تابع موردنظر هستند).

$$\alpha + \beta < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$$

$$\alpha \cdot \beta \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \geq 0 \xrightarrow{a < 0} c \leq 0$$



و حالت‌های $\Delta = 0$ و $\Delta < 0$ قابل قبول نیستند، زیرا در این حالت از ناحیه دوم نیز نمودار عبور نمی‌کند. اما باید توجه داشت که اگر $a < 0$ و $b = 0$ و $c = 0$ باشند، نمودار به صورت شکل زیر خواهد بود که قابل قبول نیست:



۱۲۹. اگر $A(x-2, 0)$ و $B(x, 2x)$ و فاصله‌ی نقطه‌ی M وسط AB ، از مبدأ مختصات $\sqrt{5}$ باشد، مقادیر x کدام‌اند؟

$$-3, 2 \quad \boxed{4}$$

$$-1, 3 \quad \boxed{3}$$

$$-2, 1 \quad \boxed{2}$$

$$-1, 2 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتد نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB را محاسبه می‌نماییم.

$$M \left\{ \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x-2 + x}{2} = x-1 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 2x}{2} = x \end{aligned} \right.$$

در این مرحله فاصله‌ی دو نقطه مبدأ و M را محاسبه می‌نماییم و برابر $\sqrt{5}$ قرار می‌دهیم.

$$OM = \sqrt{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + x^2} = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + x^2 = 5 \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

۱۳۰. مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ کدام گزینه است؟

$$-2 \quad \boxed{4}$$

$$2 \quad \boxed{3}$$

$$6 \quad \boxed{2}$$

$$\text{صفر} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا $x^2 = t$ فرض می‌نماییم تا به یک معادله‌ی درجه‌ی دو برسیم

$$t^2 - 10t + 9 = 0 \rightarrow (t-1)(t-9) = 0 \quad \begin{cases} t=1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1 \\ t=9 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های معادله صفر است.

۱۳۱. به ازای کدام مقدار a یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - ax + 1 = 0$ ربع ریشه‌ی دیگر است؟

$$\pm \frac{5}{4} \quad \boxed{4}$$

$$\pm \frac{5}{3} \quad \boxed{3}$$

$$\pm \frac{5}{2} \quad \boxed{2}$$

$$\pm 5 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

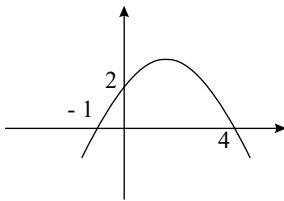
$$x' = \frac{1}{4}x'' \Rightarrow x' = 4x''$$

شرط آن که در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم یک ریشه، k برابر ریشه‌ی دیگر باشد (یعنی $x' = kx''$) آن است که داشته باشیم:



$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{a^2}{1} = \frac{25}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{5}{2}$$

۱۳۲. نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a + b + c$ کدام است؟



۲ (۲)

۱ (۱)

۳ (۴)

۵/۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به این که $f(4) = f(-1) = 0$ ضابطه تابع را به صورت $f(x) = k(x+1)(x-4)$ می نویسیم. چون $f(0) = 2$ پس:

$$k(0+1)(0-4) = 2 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4) = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x - 4) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$$

بنابراین $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 2$ و در نتیجه: $a + b + c = 3$

۱۳۳. مجموع سه برابر عددی با دو برابر عددی دیگر برابر ۱۲۰ شده است. بیشترین مقدار حاصل ضرب این دو عدد مثبت کدام است؟

۶۰۰ (۴)

۹۰۰ (۳)

۱۲۰۰ (۲)

۳۶۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ عدد اول را x و عدد دوم را y در نظر می گیریم:

$$3x + 2y = 120 \Rightarrow 2y = 120 - 3x \Rightarrow y = 60 - \frac{3}{2}x$$

$$p = x \cdot y = x(60 - \frac{3}{2}x) \Rightarrow p = -\frac{3}{2}x^2 + 60x$$

برای به دست آوردن بیشترین مقدار حاصل ضرب دو عدد کافی است بیشترین مقدار سهمی $p(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 60x$ را پیدا کنیم، پس ابتدا طول رأس سهمی را به دست می آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-60}{2(-\frac{3}{2})} = 20 \Rightarrow P_{max} = p(20) = -600 + 1200 = 600$$

نکته: می توان مقدار max یا min یک سهمی را از رابطه $y = -\frac{\Delta}{4a}$ نیز به دست آورد.

راه دوم، نکته: هرگاه، مجموع دو عدد مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب آن ها وقتی ماکزیمم است که این دو عدد با هم برابر باشند:

$$3x + 2y = 120 \Rightarrow 3x = 2y = 60 \Rightarrow x = 20, y = 30 \Rightarrow \text{ماکزیمم} = 20 \times 30 = 600$$

۱۳۴. مجموع مربعات ریشه های معادله $(x^2 - x) + 12 = 8(x^2 - x)$ کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۴ (۳)

۲۰ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ بعضی از معادلات با استفاده از تغییر متغیر، به معادله درجه دوم تبدیل شده و با حل آن، معادله اصلی نیز حل می شود.



$$(x^2 - x)^2 + 12 = 8(x^2 - x)$$

از تغییر متغیر $x^2 - x = t$ استفاده می‌کنیم:

$$t^2 + 12 = 8t \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = (t - 2)(t - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1 \\ x^2 - x = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -2 \end{cases}$$

مجموع مربعات ریشه‌ها برابر است با:

$$2^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-2)^2 = 4 + 1 + 9 + 4 = 18$$

۱۳۵. معادله $\frac{4x+2}{x+2} = \frac{2+x}{x} - \frac{x^2}{x^3+2x^2}$ چند ریشه صحیح دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ برای حل یک معادله گویا، ابتدا دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم. سپس معادله حاصل را با در نظر گرفتن غیر قابل قبول بودن جواب‌ها حل می‌کنیم:

با فرض $x \neq 0$ و $x \neq -2$

$$\begin{aligned} \frac{4x+2}{x+2} - \frac{2+x}{x} &= \frac{-x^2}{x^3+2x^2} \Rightarrow \frac{4x^2+2x-x^2-4x-4}{x(x+2)} = -\frac{1}{x+2} \Rightarrow \frac{3x^2-2x-4}{x} = -1 \\ \Rightarrow 3x^2-2x-4 &= -x \Rightarrow 3x^2-x-4=0 \Rightarrow (3x-4)(x+1)=0 \Rightarrow x=-1, x=\frac{4}{3} \end{aligned}$$

۱۳۶. علی زمینی مستطیل شکل به ابعاد ۲۰ در ۸۰ متر داخل زمین حسین دارد. علی می‌خواهد عرض زمینش را افزایش دهد، شرط حسین این است که دو برابر مقداری که عرض زمین افزایش می‌یابد، طولش کاهش یابد. پس از تغییرات بیشترین مقدار مساحت زمین علی چند متر مربع است؟

- ۱۶۰۰ (۱) ۱۸۰۰ (۲) ۲۰۰۰ (۳) ۲۴۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$S(x) = (20 + x)(80 - 2x) = -2x^2 + 40x + 1600$$

$$x_{max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{-4} = 10 \Rightarrow S_{max} = S(10) = -2 \times 10^2 + 40 \times 10 + 1600 = 1800$$

۱۳۷. اگر $x = k$ جواب معادله $\sqrt{x+3} - x = -3$ باشد، مجموع جواب‌های معادله $3x^2 + (k+1)x = x+1$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $-\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\sqrt{x+3} - x = -3 \Rightarrow \sqrt{x+3} = x-3 \xrightarrow{x \geq 3} x+3 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$



$$\Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & (\text{غ ق}) \\ x=6 & (\text{ق ق}) \end{cases} \xrightarrow{k=6} 3x^2 + (6+1)x = x+1 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$S = -\frac{6}{3} = -2 \quad \text{مجموع جوابها}$$

۱۳۸. تعداد جوابهای معادله $\frac{3x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{3x(x-1) + x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1} \quad \text{و} \quad x \neq \pm 1 \Rightarrow \frac{3x^2 - 3x + x^2 + x}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$$

$$\xrightarrow{x \neq \pm 1} 4x^2 - 2x = 2 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2 - x - 1 = 0$$

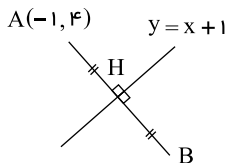
$$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 & (\text{غ ق}) \\ x_2 = -\frac{1}{2} & (\text{ق ق}) \end{cases}$$

۱۳۹. قرینه نقطه $A(-1, 4)$ نسبت به خط $y = x + 1$ ، نقطه B است. مجموع طول و عرض نقطه B کدام است؟

۴ (۴) ۳,۵ (۳) ۳ (۲) ۴,۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ اول یک شکل فرضی رسم می کنیم:

شیب خط AB ، قرینه معکوس شیب خط $y = x + 1$ است:معادله خط AB را می نویسیم:

$$y - 4 = -1(x + 1) \Rightarrow y = -x + 3$$

دو خط $y = x + 1$ و $y = -x + 3$ را قطع می دهیم تا مختصات H به دست آید:

$$x + 1 = -x + 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow H(1, 2)$$

نقطه H وسط A و B است:

$$x_H = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{-1 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 3$$

$$y_H = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{4 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 0$$

پس:



$$x_B + y_B = 3 + 0 = 3$$

۱۴۰. اگر خطوط $y = (k + 2)x + 3$ و $ky - x - 5 = 0$ معادلات قطرهای یک مربع باشند، فاصله نقطه تلاقی دو قطر مربع از مبدأ مختصات کدام است؟

$$\sqrt{19} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt{18} \quad \text{۳}$$

$$\sqrt{17} \quad \text{۲}$$

$$\sqrt{15} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ قطرهای مربع بر هم عمودند، پس شیب قطرهای قرینه معکوس هم هستند.

$$\begin{cases} y = (k + 2)x + 2 \Rightarrow m = k + 2 \\ ky - x - 5 = 0 \Rightarrow m' = \frac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow (m'm = -1 \text{ (شرط عمود بودن)}) \Rightarrow \frac{k+2}{k} = -1 \Rightarrow k+2 = -k \Rightarrow k = -1$$

حال با معلوم بودن k ، معادلات دو خط را نوشته و آن‌ها را با هم تلاقی می‌دهیم.

$$k = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ -y - x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4, y = -1$$

$$A \left| \begin{matrix} -4 \\ -1 \end{matrix} \right|_O \Rightarrow AO = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

۱۴۱. اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

$$\text{جواب دیگر ندارد.} \quad \text{۴}$$

$$3 \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$x = 4 \Rightarrow 4 + a = \sqrt{20 - 16} \Rightarrow a = -2$$

$x = 4$ ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x - 2 = \sqrt{5x - x^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 4x + 4 = 5x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{9}{2} \xrightarrow{x_1=4} 4 + x_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \text{ در معادله صدق نمی‌کند } (x - 2 = \sqrt{5x - x^2}) \text{ پس به عنوان ریشه محسوب نمی‌شود.}$$

۱۴۲. حدود m برای آن که معادله $(m - 1)x^2 + mx + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه مختلف‌العلامت باشد، کدام است؟

$$0 < m < 1 \quad \text{۴}$$

$$m < 1 \quad \text{۳}$$

$$1 < m < 3 \quad \text{۲}$$

$$m > 2 \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ شرط آن که یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a}$ منفی باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-3}{m-1} < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} m & -\infty & 1 & 3 & +\infty \\ \hline m-3 & - & - & 0 & + \\ \hline m-1 & - & 0 & + & + \\ \hline \text{عبارت} & + & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow 1 < m < 3$$