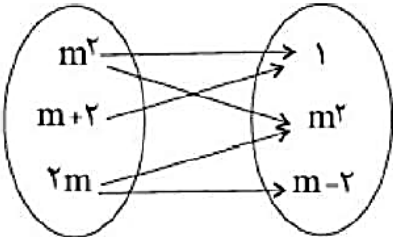
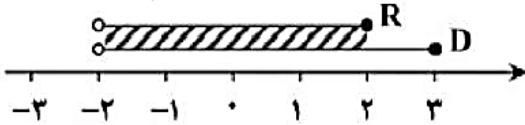


۱	$f(\sqrt{x}) = x + \sqrt{x}, \quad x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 + \sqrt{1} = 2 \Rightarrow 2 + 6 = 8$ $x = 4 \Rightarrow f(2) = 4 + \sqrt{4} = 6$
۲	چون f تابعی ثابت است به ازای همه مقادیر ورودی، یک خروجی ثابت تولید می‌نماید پس داریم: $(I) m^2 + 1 = 2m \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$ $= 0 \rightarrow m = 1 \rightarrow f : \{(3, 2), (2, 1 + n)\}$ $(II) 1 + n = 2 \rightarrow n = 1 \rightarrow m \times n = 1$
۳	$4 \times -3 = -12$
۴	نکته: در نمایش تابع به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه اول یکسان نیستند. با توجه به نکته‌ی بالا و اینکه در تابع f دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(1, a^2 - a)$ وجود دارد، نتیجه می‌شود: $a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \times \\ a = 2 \end{cases}$ اکنون توجه کنید که مقدار $a = -1$ غیرقابل قبول است، زیرا باعث ایجاد زوج مرتب $(1, 5)$ می‌شود، پس فقط مقدار $a = 2$ قابل قبول است.
۵	گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم شرط تابع بودن نمودار پیکانی این است که از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک فلش خارج شود. پس باید:  $\begin{cases} m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1 \\ m^2 = m - 2 \Rightarrow m^2 - m + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\Delta < 0} \text{معادله ریشه حقیقی ندارد}$ چون اشتراک جواب‌های دو معادله فوق تهی است، پس برای m مقداری وجود ندارد که به ازای آن نمودار پیکانی فوق نمایش یک تابع باشد.
۶	یک رابطه وقتی تابع است که به ازای هر x فقط یک مقدار y حاصل شود. از بین گزاره‌ها فقط $y = x + x$ این خواص را دارد.

۷	گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل $D = (-۲, ۳]$ و $R = (-۲, ۲]$ با استفاده از محور داریم:  $\Rightarrow D \cap R = (-۲, ۲]$
۸	گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم. مطابق نکته، برد تابع تک‌عضوی است، پس: با جای‌گذاری مقدار a در مجموعه، برد تابع f به صورت $\{۱\}$ و ضابطه تابع به صورت $f(x) = ۱$ درمی‌آید. بنابراین: $f(۵) = ۱$
۹	گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. اگر دامنه تابع همانی را R در نظر بگیریم نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می‌شود. نکته: تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم. $3f(2) = g(4) \Rightarrow g(4) = 4 \xrightarrow{3f(2) = g(4)} 3f(2) = 4$ $\Rightarrow f(2) = \frac{4}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{4}{3}$ تابعی ثابت است $g(۵) + 9f(-۱) = ۵ + 9 \times \frac{4}{3} = ۵ + ۱۲ = ۱۷$ بنابراین:
۱۰	گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: معادله خطی که از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد عبارتست از: $y - y_1 = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{شیب خط}} (x - x_1)$ خط مورد نظر از دو نقطه $(۱, ۰)$ و $(۰, ۳)$ می‌گذرد، پس معادله آن به صورت زیر است: $m = \frac{۰ - ۳}{۱ - ۰} = -۳$ شیب خط $y - ۰ = -۳(x - ۱) \Rightarrow y = -۳x + ۳ \Rightarrow f(x) = -۳x + ۳$ $f(۱) = -۳ + ۳ = ۰$ بنابراین:
۱۱	$9 + 9 + a = 6 - a$ در نتیجه $2a = -12$ و $a = -6$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون تابع در نقاط $x = 0$ و $x = 3$ تغییر ضابطه داده، پس $x = 0$ و $x = 3$ همان ریشه‌های داخل قدرمطلق‌اند. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:
(۱) اگر $a = 0$ و $b = -3$ داریم:

$$y = |x| - |x - 3| = \begin{cases} -x + x - 3 \\ x + x - 3 \\ x - x + 3 \end{cases} \quad x < 0 \quad \begin{cases} -3 \\ 2x - 3 \\ 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x < 0 \\ 0 \leq x \leq 3 &\Rightarrow (\text{ق ق}) \\ x > 3 \end{aligned}$$

(۲) اگر $a = -3$ و $b = 0$ داریم:

$$y = |x - 3| - |x| = \begin{cases} -x + 3 + x \\ -x + 3 - x \\ x - 3 - x \end{cases} \quad x < 0 \quad \begin{cases} 3 \\ -2x + 3 \\ -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x < 0 \\ 0 \leq x \leq 3 &\xrightarrow{(\text{ق ق})} \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ k = 3 \end{cases} \Rightarrow a - b + k = (-3) - 0 + 3 = 0 \\ x > 3 \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + 2 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} + 2 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} \leq \frac{10}{3}$$

پس بیشترین مقدار تابع $\frac{10}{3}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) < 0$$

پس $x \in (3, 4)$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی نمودار داده شده برابر $R - \{-1\}$ است، پس گزینه‌های ۳ یا ۴ صحیح است. اما از طرفی ضابطه باید برای $x \neq -1$ به صورت خطی (با شیب منفی) باشد:

$$y = \frac{2x^2 + 2x}{-x - 1} = \frac{2x(x + 1)}{-(x + 1)} \xrightarrow{x \neq -1} y = -2x$$

پس ضابطه‌ی مورد نظر $y = \frac{2x^2 + 2x}{-x - 1}$ می‌باشد.

و خدایی که در این نزدیکی است، لای این شب بویا پای آن کاج بلند روی آگاهی آب روی قانون گیاه...

موفق باشید الیاسی

سهراب سپهری

آموزشگاه علمی قلم مسجد سلیمان فلکه باغ ملی جنب بنیاد مسکن



۰۹۱۶۶۸۱۷۶۰۲