

۱

$$y = x^2 - 1 \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{انتقال یک واحد}} y = (x+1)^2 - 1$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2} \text{ ضریب با}]{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = (-2x+1)^2 - 1$$

$$= (2x-1)^2 - 1 = 4x^2 - 4x$$

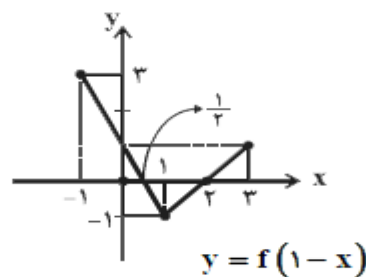
حال تابع به دست آمده را با خط $y = x$ تلاقی می دهیم. داریم:

$$4x^2 - 4x = x \Rightarrow 4x^2 - 5x = x(4x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

۲

با انتقال نمودار تابع f به اندازه یک واحد به سمت چپ و سپس قرینه کردن آن نسبت به محور y ها، نمودار تابع $y = f(1-x)$ به دست می آید.



حال داریم:

$$D_g = \{x \mid f(1-x) \geq 0\} \Rightarrow D_g = \left[-1, \frac{1}{2}\right] \cup [2, 3]$$

۳

ابتدا طول هارا یک واحد به چپ سپس در یک دوم ضرب می شوند پس گزینه ۲ درست است

۴

ابتدا دامنه و برد تابع $y = f(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$-2 < x \leq 3 \Rightarrow -3 < x-1 \leq 2 \Rightarrow D_f = (-3, 2]$$

$$-1 \leq 2f(x-1) < 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x-1) < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x) < 1 \Rightarrow R_f = \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$$

حال دامنه و برد تابع $y = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 4$ را حساب می‌کنیم:

$$-3 < \frac{x}{2} \leq 2 \Rightarrow -6 < x \leq 4 \Rightarrow D = (-6, 4]$$

$$-\frac{1}{2} \leq f(x) < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f\left(\frac{x}{2}\right) < 1 \Rightarrow -1 < -f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3 < -f\left(\frac{x}{2}\right) + 4 \leq \frac{9}{2} \Rightarrow \text{برد: } R = \left(3, \frac{9}{2}\right]$$

$$\Rightarrow R \cap D = (3, 4/5] \cap (-6, 4] = (3, 4]$$

۵

نقطه $(3, -2)$ روی تابع $y = -f(x-1)$ است، پس داریم:

$$-2 = -f(3-1) \Rightarrow f(2) = 2$$

$2x+1$ را مساوی ۲ قرار می‌دهیم:

$$2x+1=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

در تابع دوم، به جای x ، $\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$y = 2f(2x+1) - 1 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} y = 2f(2) - 1 = 3$$

پس نقطه (a, b) به صورت $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ در می‌آید و داریم:

$$a+b = \frac{1}{2} + 3 = 3\frac{1}{2}$$

۶

ابتدا مراحل تبدیل نمودار $y = f(x)$ را به $y = 2f(2+3x) - 1$ را

به دست می آوریم:

$$f(x) \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال ۲ واحد}} f(2+x) \xrightarrow[\text{باضرب } \frac{1}{3}]{\text{انقباض افقی}} f(2+3x)$$

$$\xrightarrow[\text{باضرب ۲}]{\text{انبساط عمودی}} 2f(2+3x) \xrightarrow[\text{به سمت پایین}]{\text{انتقال ۱ واحد}} y = 2f(2+3x) - 1$$

اگر مراحل فوق را از نمودار تابع $y = 2f(2+3x) - 1$ به صورت معکوس

انجام دهیم، به نمودار تابع $y = f(x)$ خواهیم رسید. بنابراین ترتیب مراحل

گفته شده در گزینه «۱» درست است.

۷

ضابطه تابع جدید به صورت زیر خواهد بود:

$$y = \begin{cases} |2(x-1)-2| - 2 & ; x-1 \geq 1 \\ (x-1)^2 - (x-1) - 2 & ; x-1 < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} |2x-5|-2 & ; x \geq 2 \\ x^2 - 3x & ; x < 2 \end{cases}$$

محل تلاقی نمودار این تابع را با محور x ها به دست می آوریم:

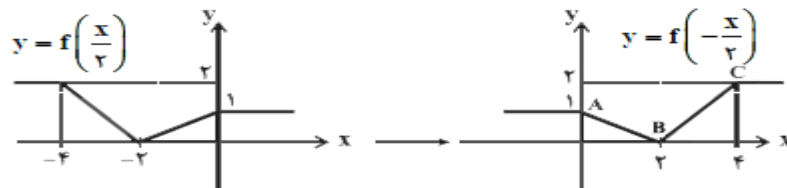
$$\Rightarrow \begin{cases} |2x-5|-2=0 \Rightarrow 2x-5=\pm 2 \xrightarrow{x \geq 2} x=3/5 \\ x^2-3x=0 \xrightarrow{x < 2} x=0 \end{cases}$$

در نتیجه فاصله نقاط برخورد نمودار جدید با محور x ها $3/5$ خواهد بود.

۸

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را دو برابر کرده و سپس آن را نسبت به

محور y ها قرینه کنیم، نمودار تابع $y = f\left(-\frac{x}{2}\right)$ حاصل می شود.



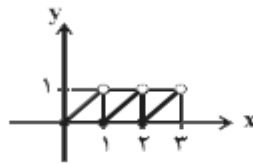
$$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

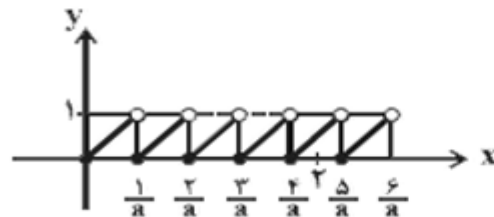
$$\Rightarrow AB + BC = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

۹

نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت زیر است:



بنابراین برای رسم نمودار تابع f کافی است طول نقاط روی نمودار تابع بالا را بر a تقسیم کنیم.



مطابق شکل فوق پنجمین نقطه مشترک نمودار تابع f و محور x ها نقطه‌ای

به طول $\frac{4}{a}$ است و ششمین نقطه، نقطه‌ای به طول $\frac{5}{a}$ است. بنابراین،

$$\frac{4}{a} \leq 2 < \frac{5}{a} \xrightarrow{a>0} 4 \leq 2a < 5 \Rightarrow 2 \leq a < \frac{5}{2}$$

۱۰

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، کافی است ابتدا نمودار

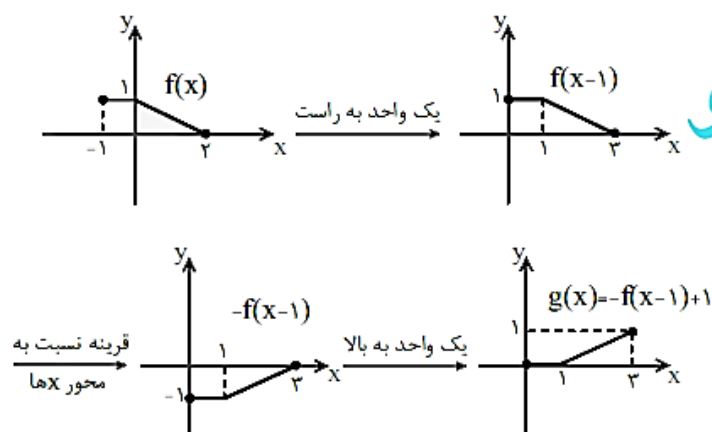
تابع $g(x) = -1 + \sqrt{x+1}$ را ۳ واحد به راست انتقال دهیم تا نمودار

تابع $y_1 = -1 + \sqrt{x-2}$ حاصل شود، سپس نمودار تابع y_1 را یک واحد به

بالا انتقال دهیم تا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ به دست آید.

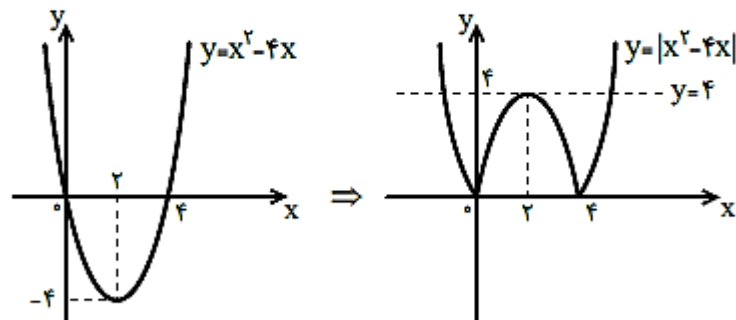
۱۱

برای تشکیل تابع g به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



۱۲ ابتدا نمودار تابع $y = x^2 - 4x$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های منفی

نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



بنابراین $k = 4$ می‌باشد.

۱۳ برای تبدیل هر نقطه روی نمودار $f(x)$ به نقطه متناظر آن روی

نمودار $1 + 2f(x+1)$ ، به طول نقطه (-1) واحد اضافه می‌شود، عرض

آن -2 برابر شده و سپس یک واحد به آن اضافه می‌شود.

$$A(x_0, y_0) \xrightarrow{-2f(x+1)+1} A'(x_0 - 1, -2y_0 + 1)$$

انتقال افقی روی برد تابع تأثیر ندارد اما انتقال‌های عمودی و انقباض (یا

انبساط) عمودی برد تابع را تغییر می‌دهند و دقیقاً همان تغییرات روی برد

اعمال می‌شود.

$$R_f = [-\sqrt{5}, 1] \Rightarrow -\sqrt{5} \leq f(x) \leq 1$$

$$\xrightarrow{\text{در انتقال افقی}} -\sqrt{5} \leq f(x+1) \leq 1$$

برد تغییر نمی‌کند.

$$\xrightarrow{x(-\sqrt{2})} -\sqrt{2} - \sqrt{2}f(x+1) \leq \sqrt{10}$$

$$\xrightarrow{-3} -\sqrt{2} - 3 \leq -\sqrt{2}f(x+1) - 3 \leq \sqrt{10} - 3$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} - 3 \leq g(x) \leq \sqrt{10} - 3$$

$$\Rightarrow R_g = [-\sqrt{2} - 3, \sqrt{10} - 3]$$

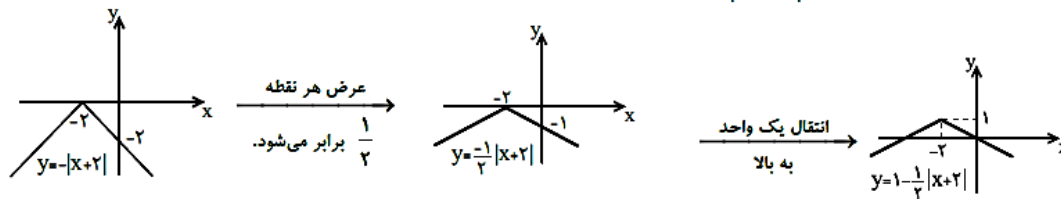
از آنجا که $1 < \sqrt{10} - 3 \leq g(x) \leq -\sqrt{2} - 3 < -5$ است، برد تابع g

شامل پنج عدد صحیح $-4, -3, -2, -1$ و صفر است.

۱۵

نمودار تابع $y = 1 - \frac{1}{4}|x+2|$ را به کمک نمودار تابع $y = |x|$

رسم می‌کنیم.



بنابراین نمودار تابع از ناحیه اول محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

۱۶

با توجه به نمودار، دامنه تابع f ، بازه $[-4, 6]$ است، دامنه توابع $f(-x)$ و $f(2x-4)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$-4 \leq -x \leq 6 \xrightarrow{\times(-1)} -6 \leq x \leq 4$$

$$\Rightarrow D_{f(-x)} = [-6, 4]$$

$$-4 \leq 2x-4 \leq 6 \xrightarrow{+4} 0 \leq 2x \leq 10 \xrightarrow{:2} 0 \leq x \leq 5$$

$$\Rightarrow D_{f(2x-4)} = [0, 5]$$

بنابراین دامنه تابع $g(x) = f(-x) + f(2x-4)$ برابر است با:

$$D_g = D_{f(-x)} \cap D_{f(2x-4)} = [-6, 4] \cap [0, 5] = [0, 4]$$

پس دامنه تابع g شامل ۵ عدد صحیح است.

۱۷

برای یافتن جواب‌های معادله $f(2x) = 0$ ، کافی است جواب‌های

معادله $f(x) = 0$ را بر ۲ تقسیم کنیم. محل تلاقی نمودار f با محور x ‌ها،

جواب‌های معادله $f(x) = 0$ است، بنابراین ۲، -۱ و -۳ جواب‌های

معادله $f(x) = 0$ و در نتیجه $\frac{2}{2} = 1$ ، $\frac{-1}{2}$ و $\frac{-3}{2}$ جواب‌های

معادله $f(2x) = 0$ هستند، بنابراین،

$$f(2x) = 0 \text{ معادله های جواب های } 1 + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-3}{2}\right) = -1$$

۱۸

برای آن که نمودار با ضریب ۲ در راستای محور x ها منبسط شود، باید در ضابطه تابع، x را بر ۲ تقسیم کنیم و برای آن که نمودار تابع ۳ واحد به سمت بالا منتقل شود، باید ضابطه را با ۳ جمع کنیم. برای یافتن محل تقاطع دو نمودار جدید و اولیه باید ضابطه‌های توابع جدید و اولیه را با هم برابر قرار دهیم.

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = f(x) \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 + 3 = x^2 - 1$$

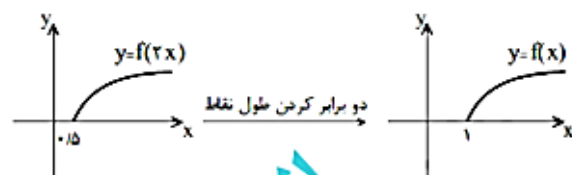
$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + 3 = x^2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

۱۹

از آنجا که $f\left(\frac{2x}{3}\right) = f(x)$ است. با دو برابر کردن طول نقاط تابع $y = f(2x)$ نمودار تابع $f(x)$ حاصل می‌شود. بنابراین، بنابراین دامنه تابع $f(x)$ بازه $[1, +\infty)$ است. از طرفی دامنه تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ برابر است با،

$$ax + b \geq 0 \Rightarrow ax \geq -b$$

$$\xrightarrow{\text{مشق } a} x \geq \frac{-b}{a} \Rightarrow D_f = \left[\frac{-b}{a}, +\infty\right)$$



بنابراین $\frac{-b}{a} = 1$ و در نتیجه $a = -b$ است. توجه کنید چون a مثبت است. پس گزینه (۲) صحیح است.

۲۰

عضو ۲ از مجموعه اول به دو عضو a و -1 مرتبط شده است. برای تابع بودن لازم است که $a = -1$ باشد. در این صورت عضو -1 نیز به دو عضو ۲ و $b+1$ مرتبط خواهد شد. بنابراین باید $b = 1$ باشد.

$$\Rightarrow a + b = 0$$

۲۱

تابع f شامل ۳ زوج مرتب است و مجموعه دامنه آن نیز سه عضوی است.

بنابراین باید یکی از دو حالت زیر برقرار باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a - b = 2 \\ a + 2b = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a + 2b = 7$$

یا

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a - b = 5 \\ a + 2b = 2 \end{array} \right\}$$

۲۲

$$f(f(a+1)) = 5 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(a+1) = 4 \Rightarrow a+1 = 3 \Rightarrow a = 2 \\ \text{یا} \\ f(a+1) = -2 \Rightarrow a+1 = -5 \Rightarrow a = -6 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ حاصل ضرب مقادیر } = (2)(-6) = -12$$

۲۳

با توجه به اینکه تابع $y = x$ همانی است، خواهیم داشت:

$$2a + b = 2a^2 + b + 1 \Rightarrow 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (b-1)^2 = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow (2a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$2a + b^2 = 2b + 1 \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} 2 + b^2 = 2b + 1 \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = 0$$

$$R_f = [-2, 7]$$

$$\Rightarrow -2 \leq y = f(x) \leq 7 \Rightarrow -2 \leq 5x - 3 \leq 7$$

$$\Rightarrow 1 \leq 5x \leq 10 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_f = \left[\frac{1}{5}, 2 \right]$$

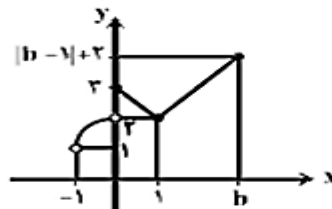
این بازه شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

۲۴

ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس از روی شکل، برد آن

را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & ; -1 < x < 0 \\ |x-1| + 2 & ; 0 \leq x \leq b \end{cases}$$



با توجه به نمودار داریم:

$$R_f = (1, |b-1| + 2] = (a, 4] \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ |b-1| + 2 = 4 \Rightarrow |b-1| = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-1 = 2 \Rightarrow b = 3 \\ b-1 = -2 \Rightarrow b = -1 \end{cases} \text{ غ.ق.ق.}$$

$$\Rightarrow a - b = 1 - 3 = -2$$

۲۵

۲۶

f یک تابع سه ضابطه‌ای است که هر سه ضابطه آن خطی هستند. ضابطه هر

کدام را می‌نویسیم؟

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x+9 & ; x < -2 \\ 3 & ; -2 \leq x \leq 1 \\ -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} & ; x > 1 \end{cases}$$

ضابطه اول: $A(-2, 3), B(-2, 0) \Rightarrow m = \frac{3-0}{-2+2} = 3$

$$y-0 = 3(x+2) \Rightarrow y = 3x+9$$

حال مقدار $f(11)$ و $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ را حساب می‌کنیم.

ضابطه دوم $\xrightarrow{\text{تابع ثابت}} y = 3$

ضابطه سوم: $C(1, 3), D(5, 0) \Rightarrow m = \frac{3-0}{1-5} = -\frac{3}{4}$

$$y-0 = -\frac{3}{4}(x-5) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$11 > 1 \Rightarrow f(11) = -\frac{3}{4}(11) + \frac{15}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$-\frac{1}{3} < -2 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 9 = 1$$

$$\Rightarrow f(11) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{4} + 1 = -\frac{5}{4} = -3/5$$

۲۷

با توجه به شکل، $-b$ برابر با -1 است و در نتیجه $b = 1$ است.

مقدار c برابر با $f(0)$ است.

ضابطه تابع به صورت $f(x) = |x+a| - 1$ در آمده است. نقطه $(5, 0)$ را

$$\Rightarrow c = 4 - 1 = 3$$

در ضابطه قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow f(c) = f(3) = |3-4| - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(5) = |5+a| - 1 = 0 \Rightarrow |5+a| = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5+a=1 \Rightarrow a=-4 \\ 5+a=-1 \Rightarrow a=-6 \end{cases} \text{ (با توجه به شکل) غ.ق.ق.}$$

$$\Rightarrow f(x) = |x-4| - 1$$

۲۸

اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$ باشد، داریم:

$$f(1) = a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - a$$

$$f(-1) = -a + b \Rightarrow f(f(-1)) = f(-a + b) = a(-a + b) + b$$

$$= -a^2 + ab + b = -8$$

$$\Rightarrow -a^2 + a(2-a) + 2-a = -8 \Rightarrow -a^2 + 2a - a^2 + 2 - a = -8$$

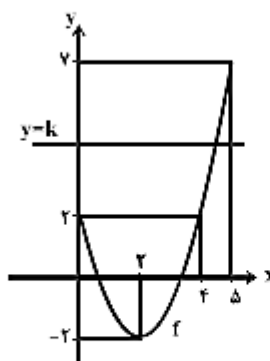
$$\Rightarrow 2a^2 - a - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = \frac{5}{2} \end{cases}$$

چون شیب نمودار f منفی است، $a = \frac{5}{2}$ قابل قبول نیست. بنابراین داریم:

$$a = -2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow f(x) = -2x + 4 \Rightarrow f(2) = 0$$

۲۹

نمودار تابع f به صورت زیر است.



اگر خط $y=k$ و نمودار تابع f در یک نقطه مشترک باشند، k می تواند مقادیر $-2, 2, 4, 5, 6$ و 7 را داشته باشد.

۳۰

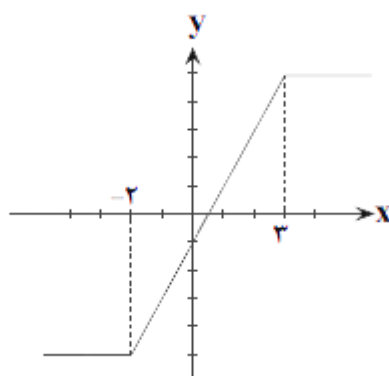
تابع $y = |x-a| - |x-b|$ را تابع آشاری (سرسره) می گویند که نمودار آن به یکی از شکل های زیر است:



$$y = |x+2| - |x-3|$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=-5$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=5$$



با توجه به نمودار، تابع در فاصله $(-2, 3)$ اکیداً صعودی است.

۳۱

چون g تابع همانی است، پس $g(-1) = -1$ و $g(2) = 2$ است، لذا داریم:

$$\frac{2f(2)}{\Delta g(-1)} = 1 \Rightarrow \frac{2f(2)}{-5} = 1 \Rightarrow f(2) = -\frac{5}{2}$$

f تابعی ثابت است، پس $f(2) = f(2) = -\frac{5}{2}$ و لذا داریم:

$$f(2) \times g(2) = \frac{-5}{2} \times 2 = -5$$

۳۲

نمودار تابع $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ از نقطه $(0,0)$ می‌گذرد:

$$g(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

چون $x=0$ تنها ریشه معادله $g(x) = 0$ است، بنابراین داریم:

$$g(x) = x^2(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

مقدار b باید صفر باشد تا $x=0$ تنها ریشه معادله $g(x) = 0$ شود. از

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} = a\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow a = 2$$

طرفی داریم:

$$\Rightarrow a + b + c = 2 + 0 + 0 = 2$$

۳۳

دو تابع زمانی برابرند که ابتدا $D_f = D_g$ و سپس برای هر x از این دامنه

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_g = (0, +\infty) \end{cases} \text{ گزینه «۳»}$$

یکسان، $f(x) = g(x)$ باشد. بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۴»:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \text{ گزینه «۱»}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \text{ گزینه «۲»}$$

است. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

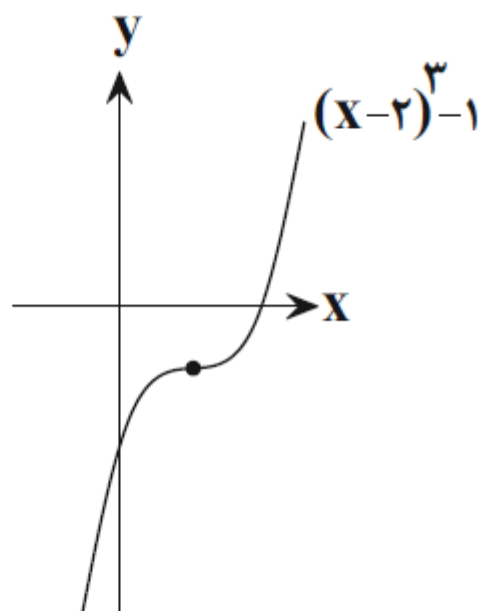
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{x}{-x} = -1 & x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D_g = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_f = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

۳۴

ضابطه تابع را به صورت $y = (x-2)^3 - 1$ می نویسیم و برای رسم آن، نمودار

تابع $y = x^3$ را ۲ واحد به راست و یک واحد به پایین می بریم:



نمودار تابع از ناحیه دوم عبور نمی کند.

۳۵

دامنه یک تابع کسری گویا وقتی تمامی اعداد حقیقی است که مخرج کسر فاقد

ریشه باشد، یعنی برای عبارت درجه دوم مخرج باید $\Delta < 0$ باشد، لذا داریم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4(a+1)^2 - 4(1)(9a-5) < 0 \Rightarrow 4(a^2 + 2a + 1 - 9a + 5) < 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 7a + 6 < 0 \Rightarrow (a-1)(a-6) < 0 \Rightarrow 1 < a < 6$$

۳۶

$$(a-b, b), (a-b, a-3) \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} b = a-3 \quad (1)$$

$$D_f = \{a, a-b, b, a+2\} \xrightarrow{b=a-3} \{a, 3, a-3, a+2\}$$

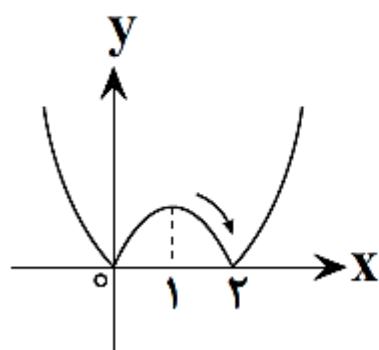
$$R_f = \{-4b, b, a, b+4\} \xrightarrow{b=a-3} \{-4a+12, a-3, a, a+1\}$$

$$D_f = R_f \Rightarrow \begin{cases} a+1=3 \\ -4a+12=a+2 \end{cases} \Rightarrow a=2 \xrightarrow{(1)} b=-1 \Rightarrow a+b=1$$

دقت کنید که $a+2$ نمی‌تواند با $a+1$ برابر باشد!

۳۷

نمودار تابع $y = |x||x-2| = |x^2 - 2x|$ را رسم می‌کنیم:



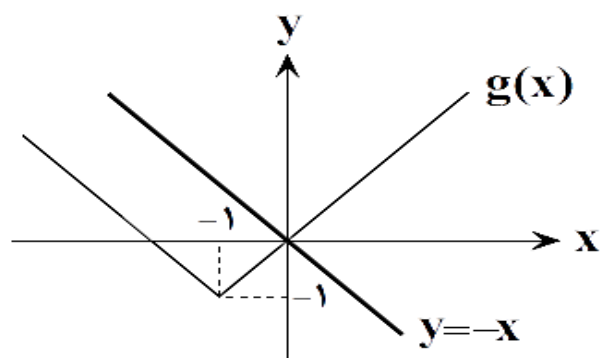
تابع در بازه $(1, 2)$ نزولی است.

$$f(x) = |x-1| - 4 \Rightarrow g(x) = |x-1+2| - 4 + 3 \Rightarrow g(x) = |x+1| - 1$$

۳۸

نمودار دو تابع $g(x) = |x+1| - 1$ و نیمساز ربع چهارم یعنی $y = -x$ را رسم

می کنیم:



با توجه به نمودار دو تابع، در بازه $(0, +\infty)$ نمودار تابع g بالاتر از نمودار نیمساز ربع چهارم است.

۳۹

در توابع اکیداً صعودی داریم:

$$2 > 1 \Rightarrow f(2) > f(1) \Rightarrow m - 4 > m^2 - 4m \Rightarrow m^2 - 5m + 4 < 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-4) < 0 \Rightarrow m \in (1, 4)$$

چون m عددی طبیعی است، مقادیر طبیعی $m = 2, 3$ در بازه موردنظر قرار دارد:

$$m \in \mathbb{N} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 2 \Rightarrow f = \{(1, -4), (2, -2), (2, 6), (3, 8)\} \\ \text{در این صورت به دلیل وجود دو زوج مرتب } (2, -2) \\ \text{و } (2, 6) \text{ دیگر } f \text{ تابع نیست. (غیرقابل قبول)} \\ m = 3 \Rightarrow f = \{(1, -3), (2, -1), (3, 6), (3, 8)\} \\ \text{در این صورت به دلیل وجود دو زوج مرتب } (3, 6) \\ \text{و } (3, 8) \text{ دیگر } f \text{ تابع نیست. (غیرقابل قبول)} \\ \text{هیچ مقدار طبیعی برای } m \text{ وجود ندارد.} \end{array} \right.$$

۴۰	گزینه «۴»	اگر عرض نقاط نمودار تابع f را بر ۳ تقسیم کنیم (در $\frac{1}{3}$ ضرب کنیم) نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(x)$ به دست می‌آید و در واقع نمودار تابع f منقبض می‌شود. نمودار تابع گزینه «۱» از انبساط افقی نمودار تابع f، گزینه «۲» از انقباض افقی نمودار تابع f و گزینه «۳» از انبساط عمودی نمودار تابع f حاصل می‌شود.
۴۱	گزینه «۲»	ابتدا تغییراتی را که بر روی تابع f صورت گرفته اعمال می‌کنیم. $y = f(x) \xrightarrow{\text{طول نقاط ۲ برابر شود}} g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) \xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به راست}} g(x-4) = f\left(\frac{1}{2}(x-4)\right) = f\left(\frac{1}{2}x-2\right)$ حال برای آنکه تابع حاصل به تابع $y = f\left(\frac{1}{2}x-4\right)$ تبدیل شود، آن را ۴ واحد دیگر به سمت راست انتقال می‌دهیم. $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x-2\right) \xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به راست}} h(x-4) = f\left(\frac{1}{2}(x-4)-2\right) = f\left(\frac{1}{2}x-4\right)$
۴۲		با توجه به دامنه و برد، نتیجه می‌گیریم f روی خط گذرنده از دو نقطه $(-21, 7)$ و $(4, -3)$ قرار دارد. ضابطه f را به دست می‌آوریم: $m = \frac{7 - (-3)}{-21 - 4} = \frac{-2}{-25} = \frac{2}{25}$ $f(x) = -\frac{2}{25}x + b \xrightarrow{(4, -3)} -3 = -\frac{8}{25} + b \Rightarrow b = -\frac{7}{25}$ $\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{25}x - \frac{7}{25} \Rightarrow f(1) = -\frac{9}{25} \Rightarrow 3f(1) = -\frac{27}{25} = -5/4$ $\Rightarrow [3f(1)] = [-5/4] = -6$

ضابطه تابع همانی f را به صورت $f(x) = x$ و ضابطه تابع ثابت g را به صورت $g(x) = k$ در نظر می گیریم. داریم: $\frac{f(g(2)) - g(f(-1))}{f(2) - g(0)} = \frac{f(k) - g(-1)}{2 - 2k} = \frac{2k - k}{2 - 2k}$ $= \frac{2k}{2 - 2k} = 2 \Rightarrow k = 1$ پس تابع ثابت g به صورت $g(x) = 1$ است. $\Rightarrow g(0) = 1$	۴۳
برای اینکه رابطه داده شده یک تابع باشد، باید $m - 2$ و $m^2 - 8$ برابر باشند، (زیرا مؤلفه های دوم زوج های مرتبی هستند که مؤلفه های اول برابر دارند). $m^2 - 8 = m - 2 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0$ $\Rightarrow (m - 3)(m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases} \text{ غقی}$ دقت کنید که به ازای $m = -2$، دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(2, -4)$ عضو مجموعه خواهند شد، بنابراین f نمی تواند تابع باشد. پس تابع f به صورت زیر است: $f = \{(-2, 1), (2, 1), (7, 1)\}$ برد تابع f، $\mathbb{R}_f = \{1\}$ است و فقط یک عضو دارد.	۴۴

۴۵

محیط مستطیل برابر ۱۲ است، بنابراین،

$$2(x+y)=12 \Rightarrow x+y=6 \Rightarrow y=6-x$$

همچنین قطر مستطیل از رابطه $d^2 = x^2 + y^2$ به دست می‌آید. برای اینکه قطر مستطیل را به عنوان تابعی از طول آن بنویسیم، در رابطه اخیر قرار می‌دهیم، $y=6-x$.

$$d^2 = x^2 + y^2 \xrightarrow{y=6-x} d^2 = x^2 + (6-x)^2$$

$$\Rightarrow d^2 = 2x^2 - 12x + 36 \Rightarrow d = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$$

۴۶

عبارت زیر رادیکال را بزرگتر از صفر در نظر می‌گیریم (به دلیل اینکه مخرج، نباید برابر صفر شود).

$$D_g : -(f(x))^2 - f(x) + 2 > 0 \Rightarrow (f(x))^2 + f(x) - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (f(x)+2)(f(x)-1) < 0 \Rightarrow -2 < f(x) < 1$$

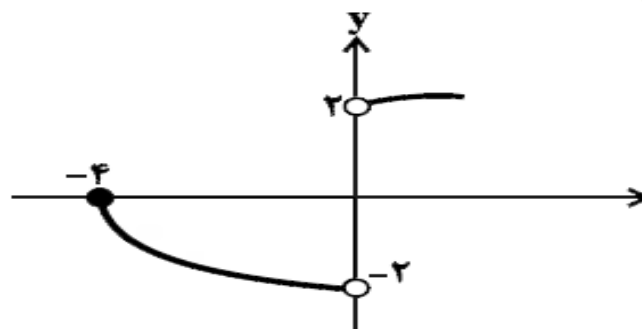
این مجموعه شامل ۵ عدد صحیح است. $\Rightarrow x \in (-4, 3) - \{1\}$ با توجه به نمودار

۴۷

ضابطه تابع f را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم،

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & ; x > 0 \\ -\sqrt{x+4} & ; -4 \leq x < 0 \end{cases}$$

پس نمودار تابع f به صورت زیر است،



برد این تابع مجموعه $(-2, 0] \cup (2, +\infty)$ است.

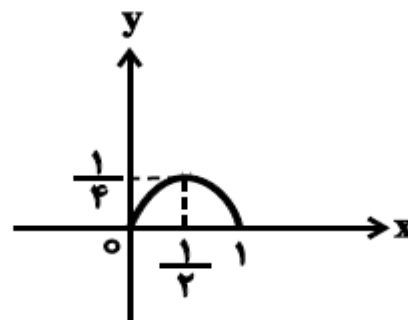
۴۸

ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{1-x}{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1 \Rightarrow D_y = (0, 1]$$

$$y = x \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{x^2 \left(\frac{1-x}{x} \right)} = \sqrt{x-x^2}$$

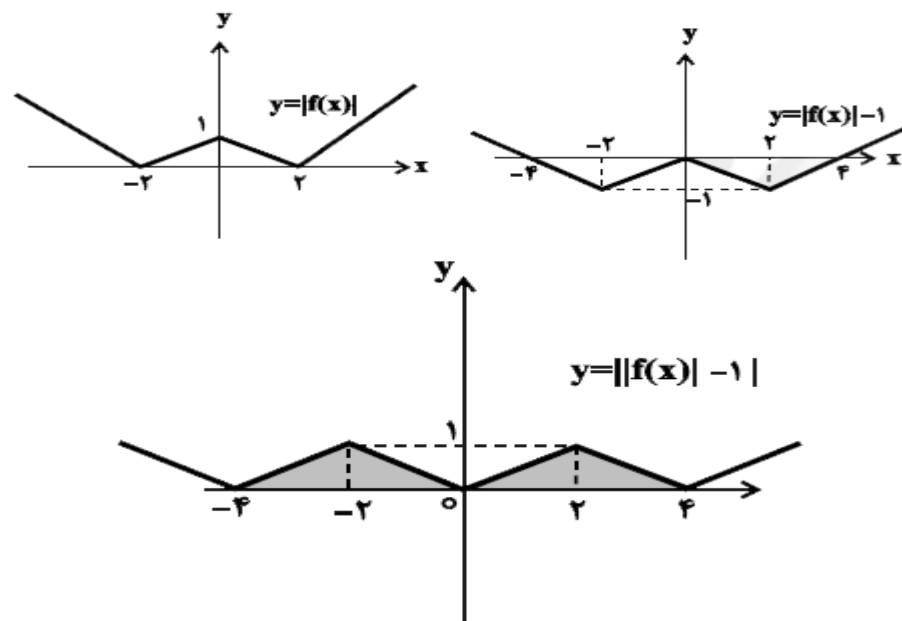
اگر فرض کنیم $g(x) = x - x^2$ باشد، نمودار تابع g در بازه $(0, 1]$ قسمتی از یک سهمی به صورت شکل زیر است.



یعنی g همه مقادیر بازه $[0, \frac{1}{4}]$ را می‌پذیرد. پس تابع $y = \sqrt{g(x)}$ همه مقادیر بازه $[0, \frac{1}{2}]$ را می‌پذیرد.

$$\Rightarrow R_y = [0, \frac{1}{2}]$$

۴۹



$$\Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}} = 2 (\text{مساحت مثلث}) = 2 \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 1 \right) = 4$$

۵۰

با ساده کردن f داریم،

$$f(x) = \frac{x[2x]}{\sqrt{x^2}} = \frac{x[2x]}{|x|} = \begin{cases} \frac{x[2x]}{x}; x > 0 \\ \frac{x[2x]}{-x}; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [2x] & ; x > 0 \\ -[2x] & ; x < 0 \end{cases}$$

با برابر قرار دادن دو تابع f و g داریم،

$$[2x] = 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \quad (\text{I}) \quad \text{اگر } x > 0 \text{ باشد،}$$

$$[2x] = -1 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0 \quad (\text{II}) \quad \text{اگر } x < 0 \text{ باشد،}$$

$$\xrightarrow{(\text{I}) \cup (\text{II})} x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) = \left[-\frac{1}{2}, 1\right) - \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

۵۱

ابتدا توجه کنید که ضابطه توابع g و h به صورت زیر است،

$$g(x) = f(x-k) = x-k-[2(x-k)] = x-k-[2x-2k]$$

$$h(x) = f(x) + k = x-[2x] + k$$

اگر $2k$ عددی صحیح باشد، داریم،

$$g(x) = x-k-[2x]+2k = x-[2x]+k$$

یعنی نمودار تابع g بر نمودار تابع h منطبق می‌شود. بنابراین k برابر ۱، ۲

و $\frac{1}{2}$ می‌تواند باشد، ولی برابر $\frac{1}{4}$ نمی‌تواند باشد.

توجه کنید که به ازای $k = \frac{1}{4}$ داریم،

$$\begin{cases} g(0) = 0 - \frac{1}{4} - \left[0 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} \\ h(0) = 0 - [0] + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow g(0) \neq h(0)$$

۵۲

واضح است که اگر $x \geq 0$ باشد، $[x] \geq 0$ و در نتیجه $x[x] \geq 0$ است و اگر $x < 0$ باشد، $[x] < 0$ و در نتیجه $x[x] > 0$ است. بنابراین در هر حالت $x[x] \geq 0$ خواهد بود. برای این که معادله جواب داشته باشد، باید $1 - |x| \geq 0$ یعنی $-1 \leq x \leq 1$ باشد. حال اگر $0 \leq x < 1$ باشد، معادله به صورت $0 = 1 - x$ در می آید که جواب ندارد. اگر $-1 \leq x < 0$ باشد، معادله به صورت $-x = 1 + x$ در می آید که جواب آن $x = -\frac{1}{2}$ است و اگر $x = 1$ باشد، معادله به صورت $1 = 1 - 1$ در می آید که برقرار نیست. پس تنها جواب معادله (طول تنها نقطه مشترک دو نمودار) $x = -\frac{1}{2}$ است.

۵۳

نقطه $A = (2, -1)$ روی تابع $y = -f(2x) + 1$ است، پس،

$$-f(4) + 1 = -1 \Rightarrow f(4) = 2$$

حال نقطه متناظر آن روی $y = 2f(3x - 2) - 2$ را به صورت زیر می یابیم،

$$3x - 2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 2f(4) - 2 = (2 \times 2) - 2 = 2$$

پس نقطه متناظر آن $A' = (2, 2)$ است. که مجموع طول و عرض آن برابر ۴ است.

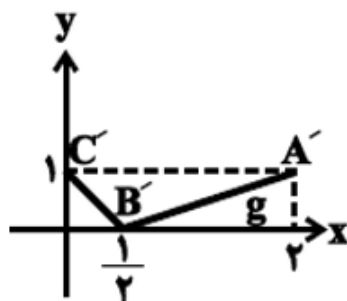
۵۴

روش اول، نمودار تابع f را ابتدا یک واحد به سمت چپ منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y_1 = f(x+1)$ به دست آید. سپس طول نقاط آن را بر ۲ تقسیم می کنیم تا نمودار $y_2 = f(2x+1)$ به دست آید. سپس برای به دست آوردن نمودار تابع $y_3 = -f(-2x+1)$ ، نمودار y_2 را نسبت به مبدأ مختصات (قرینه نسبت به هر دو محور طول و عرض) قرینه می کنیم. در انتها نمودار y_3 را یک واحد به بالا منتقل می کنیم تا نمودار تابع g به دست آید.

روش دوم (مشابه روش سؤال قبل)، نقاط $A(-3, 0)$ ، $B(0, 1)$ و $C(1, 0)$

روی نمودار تابع f به نقاط $A'(2, 1)$ ، $B'(\frac{1}{2}, 0)$ و $C'(0, 1)$ روی نمودار

تابع g متناظر می شود. با وصل کردن نقاط A' ، B' و C' نمودار g حاصل می شود.



۵۵

مراحل را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{و یک واحد به پایین}]{\text{قرینه نسبت به محور } y} y = \sqrt{-x} - 1$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به محور } x]{\text{قرینه نقاط با عرض مثبت}} y = -|\sqrt{-x} - 1|$$

$$\xrightarrow[\text{به راست}]{\text{انتقال یک واحد}} g(x) = -|\sqrt{-(x-1)} - 1| = -|\sqrt{1-x} - 1|$$

دقت کنید که اگر بخواهیم نقاط با عرض منفی را در نمودار f نسبت به محور x قرینه کنیم، از تبدیل $|f(x)|$ استفاده می‌کنیم. برای قرینه کردن نقاط با عرض مثبت نیز از تبدیل $-|f(x)|$ استفاده می‌کنیم.

۵۶

ابتدا نمودار تابع $g(x)$ را ۴ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

$$g(x) = f\left(\frac{1}{4}x - 2\right) + 1 \xrightarrow{x \rightarrow x+4} g(x+4) = f\left(\frac{1}{4}(x+4) - 2\right) + 1$$

$$= f\left(\frac{1}{4}x + 2 - 2\right) + 1 = f\left(\frac{1}{4}x\right) + 1$$

حال نمودار حاصل را ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

$$y = f\left(\frac{1}{4}x\right) + 1 \xrightarrow{y \rightarrow y-3} h(x) = f\left(\frac{1}{4}x\right) + 1 - 3 = f\left(\frac{1}{4}x\right) - 2$$

۵۷

ابتدا ضابطه g را به دست می آوریم:

$$f(x) = (x+1)^2 \xrightarrow{\text{طول نقاط دو برابر می شود.}} y = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به پایین یک واحد به چپ}} g(x) = \left(\frac{x+1}{2} + 1\right)^2 - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{(x+3)^2}{4} - 1$$

$$\xrightarrow{f(x)=g(x)} x^2 + 2x + 1 = \frac{x^2 + 6x + 9}{4} - 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{x^2 + 6x + 5}{4}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

معادله بالا دو جواب حقیقی دارد که مجموع آنها برابر $-\frac{2}{3}$ است. پس

مجموع طول نقاط برخورد نمودارهای f و g برابر $-\frac{2}{3}$ است.

۵۸

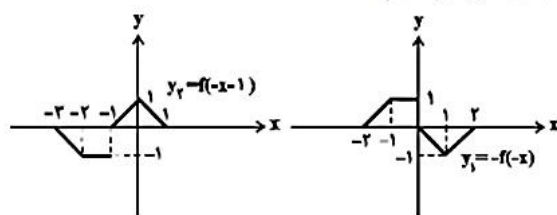
ابتدا نمودار توابع $y_1 = -f(-x)$ و $y_2 = f(-x-1)$ را رسم می کنیم.

سپس از y_1 قسمت سمت چپ محور y و از y_2 قسمت راست محور y را نگه می داریم تا نمودار g حاصل شود.

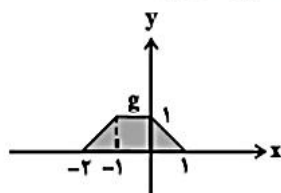
دقت کنید که y_1 قرینه نمودار تابع f نسبت به مبدأ مختصات است. برای

y_2 نیز ابتدا f را یک واحد به راست می بریم. سپس آن را نسبت به محور

y قرینه می کنیم. داریم:



پس نمودار تابع g مطابق شکل زیر است.



مساحت ذوزنقه هاشورخورده برابر $1 \times \left(\frac{3+1}{2}\right) = 2$ است.

۵۹

$$(3, m^2) = (3, m+2) \Rightarrow m^2 = m+2$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow m = 2, m = -1$$

با جای گذاری این مقادیر m و تشکیل رابطه داریم:

$$(1) m = -1: A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

A به ازای $m = -1$ تابع است.

$$(2) m = 2: A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

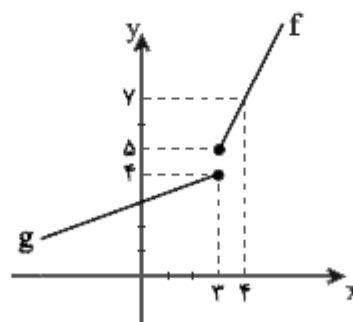
به ازای $m = 2$ تابع نیست. بنابراین فقط $m = -1$ قابل قبول است.

۶۰

نمودار توابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم:

$$f(x) = 2x - 1, \quad D_f = [3, +\infty) \quad \begin{array}{c|cc} x & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 5 & 7 \end{array}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x + 3, \quad D_g = (-\infty, 3] \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline g(x) & 3 & 4 \end{array}$$



با توجه به نمودار توابع f و g . اجتماع برد دو تابع f و g برابر است با $(-\infty, 5) - \mathbb{R}$.

۶۱

تنها در صورتی دامنه تابع $f(x) = \frac{x+4}{2x^2 - ax + b - 5}$ به صورت

$\mathbb{R} - \{2\}$ است که مخرج کسر، ریشه مضاعف $x=2$ داشته باشد. پس با

توجه به ضریب x^2 در مخرج کسر، ضابطه تابع f به صورت زیر است،

$$f(x) = \frac{x+4}{2(x-2)^2} = \frac{x+4}{2x^2 - 4x + 8} = \frac{x+4}{2x^2 - ax + b - 5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = -4 \Rightarrow a = 4 \\ b - 5 = 8 \Rightarrow b = 13 \end{cases} \Rightarrow a + b = 17$$

۶۲

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

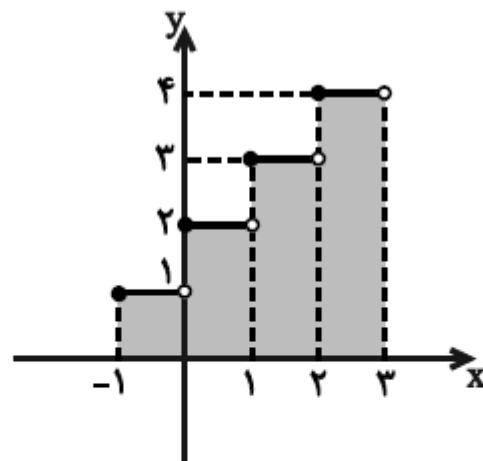
$$-1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \\ 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 \\ 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 - 1 + 0 = -2$$

ابتدا نمودار تابع را در فاصله $[-1, 3]$ رسم می‌کنیم. توجه کنید که،

$$[x+2] = [x] + 2$$

$$\begin{cases} -1 \leq x < 0 \Rightarrow y = [x] + 2 = -1 + 2 = 1 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = [x] + 2 = 0 + 2 = 2 \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = [x] + 2 = 1 + 2 = 3 \\ 2 \leq x < 3 \Rightarrow y = [x] + 2 = 2 + 2 = 4 \end{cases}$$



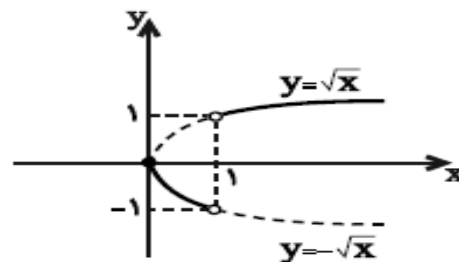
مساحت بین نمودار و محور x ها برابر با مساحت قسمت سایه‌زده شده است. بنابراین،

$$S = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4 = 10$$

معادله تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & ; x > 1 \\ -\frac{(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & ; 0 \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x > 1 \\ -\sqrt{x} & ; 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

دقت کنید که $x=1$ ریشه مخرج است و در دامنه معادله قرار ندارد. بنابراین، نمودار تابع به شکل زیر است:



با استفاده از نمودار تابع f ، ابتدا نمودار تابع $y = f(1+x)$ را رسم می‌کنیم که با یک واحد انتقال به چپ به دست می‌آید. سپس با تبدیل x به $-x$ به نمودار $y = f(1-x)$ می‌رسیم که قرینه نمودار $y = f(1+x)$ نسبت به محور y هاست و در نهایت $y = 2f(1-x)$ را رسم می‌کنیم که با انبساط در راستای محور y ها به دست می‌آید.

دامنه تابع f بازه $D_f = [-1, 4]$ است. پس برای به دست آوردن برای

دامنه تابع $g(x) = -3f\left(\frac{-x}{2} + 2\right)$ باید مقدار $\frac{-x}{2} + 2$ در بازه $[-1, 4]$ قرار داشته باشد،

$$\left(\frac{-x}{2} + 2\right) \in [-1, 4] \Rightarrow -1 \leq \frac{-x}{2} + 2 \leq 4$$

$$\Rightarrow -3 \leq \frac{-x}{2} \leq 2 \Rightarrow -4 \leq x \leq 6$$

$$\Rightarrow D_g = [-4, 6]$$

بنابراین دامنه تابع g شامل ۶ عدد طبیعی ۱ تا ۶ است.

۶۷

$$f(x) = ax + b \text{ تابع خطی}$$

$$(0, 2) \xrightarrow{\text{تلاقی با محور } y} b = 2$$

$$(-1, -1) \Rightarrow -1 = -a + 2 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = 3x + 2$$

$$f(1) = 3 + 2 = 5 \quad f(2) = 8$$

$$(f(1))^2 - 4f(2) = 5^2 - 4 \times 8 = 25 - 32 = -7$$

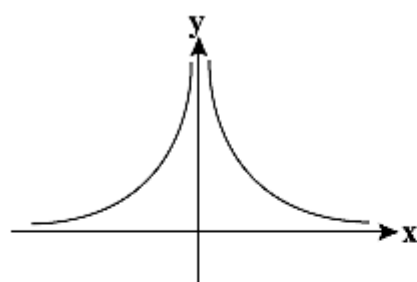
۶۸

اگر $f(x)$ اکیداً صعودی و همواره مثبت باشد، آنگاه $\frac{1}{f(x)}$ اکیداً نزولی

است. تابع $y = \sqrt{x}$ اکیداً صعودی است. پس تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ اکیداً نزولی

خواهد بود. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: نمودار $y = \frac{1}{x}$ شبیه شکل زیر است.



گزینه «۳»: به ازای x های مثبت چون با افزایش مقادیر x ، مقدار x^2

زیاد می‌شود، پس مقادیر $\frac{1}{x^2}$ کم می‌شود. به علاوه به ازای x های منفی

چون با افزایش مقادیر x ، مقادیر x^2 کم می‌شود، پس $\frac{1}{x^2}$ زیاد می‌شود.

نمودار این تابع تا حدودی شبیه گزینه «۲» است و تابع غیریکنواست.

۶۹

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{2x}{x-1}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \quad (1)$$

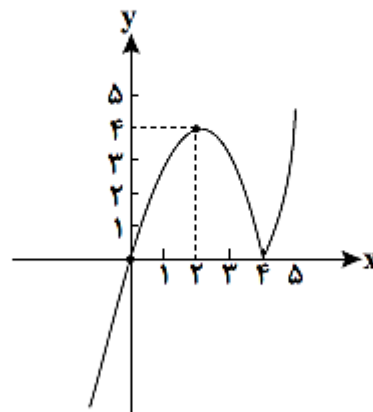
$$\frac{2x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & - & 0 & + \\ \hline & + & - & + \end{array} \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x > 1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x > 1$$

۷۰

ابتدا قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم و تابع را رسم می کنیم:

$$y = x|x-4| = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases}$$



تابع در بازه $[2, 4]$ و هر زیرمجموعه‌ای از آن نزولی است، بنابراین

$$\text{Max}(b - a) = 4 - 2 = 2$$

۷۱

اگر f و g مساوی باشند، باید $Df = Dg$ باشد. چون دامنه g یک

عضو دارد، پس باید دامنه f هم یک عضو باشد. در نتیجه:

$$a = 4 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{4-x} + b$$

$$Df = \{4\} \Rightarrow c = 4$$

$$f(4) = b \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a + b + c = 4 + 2 + 4 = 10$$

۷۲

$$\left[\frac{x}{2}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{-1}{x} < -\frac{1}{4}$$

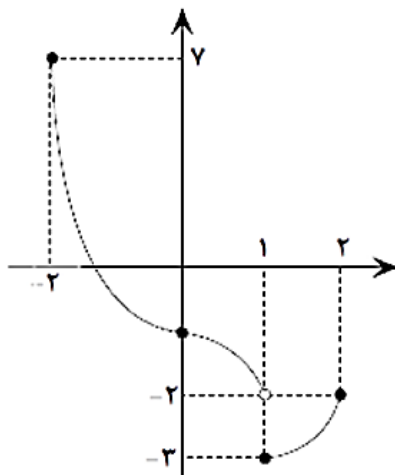
پس می توان نتیجه گرفت که $\left[-\frac{1}{x}\right] = -1$ و داریم:

$$x + \left[-\frac{1}{x}\right] = x - 1$$

$$2 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq x - 1 < 3 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x-1} < \sqrt{3} \Rightarrow [\sqrt{x-1}] = 1$$

۷۳

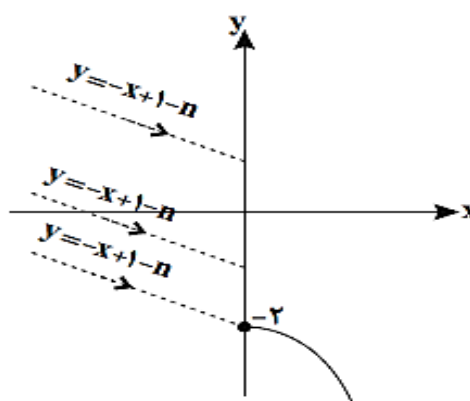
بهترین راه برای پیدا کردن برد تابع چند ضابطه ای رسم نمودار آن هاست. ضابطه بالایی را در بازه $(-2, 1)$ و ضابطه پایینی را در بازه $[1, 2]$ رسم می کنیم. با توجه به نمودار رسم شده، برد این تابع به صورت $[-3, 7]$ است و طول بازه یا همان $b - a$ برابر ۱۰ واحد است.



۷۴

با رسم تقریبی تابع f می توانیم به خوبی آنرا بررسی کنیم. بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 - n & x < 0 \\ mx^2 - 2 & x \geq 0 \end{cases}$$



برای اینکه f اکیداً نزولی باشد، باید $m < 0$ باشد و حداکثر مقدار n برابر خواهد بود با:

$$1 - n \geq -2 \Rightarrow -n \geq -3 \Rightarrow n \leq 3$$

۷۵

$$f(1) = g(1) \quad , \quad f(-2) = g(-2)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} 1 + a + b = 3 \\ -8 + 4a - 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a - 2b = 14 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -1$$

لذا $f(x) = x^3 + 3x^2 - x$. در نتیجه باید معادله $f(x) = g(x)$ را حل کنیم که به صورت زیر است:

$$x^3 + 3x^2 - x = x^2 + 2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

بنابراین طول نقطه تلاقی سوم، $x = -1$ است.

۷۶

ضابطه نمودار جدید به صورت $y = \frac{1}{2}|x + 4| - 2 + 1$ می باشد. با مساوی

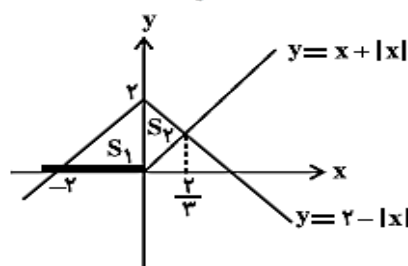
قرار دادن آن با ضابطه نمودار اولیه داریم:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}|x + 4| - 1 \\ y = \frac{1}{2}|x| - 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}|x + 4| - 1 = \frac{1}{2}|x| - 2$$

$$\Rightarrow |x + 4| - 2 = |x| - 4 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} x = -3$$

۷۷

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x & x \geq 0 \\ x + 2 & x < 0 \end{cases}$$



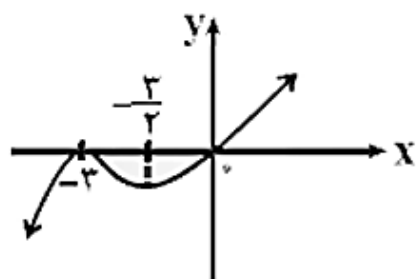
در محل تلاقی دو نمودار داریم:

$$2 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = 2 + \frac{2}{9} = \frac{20}{9}$$

۷۸

$$f(x) = x|x+3| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x \geq -3 \\ -x^2 - 3x & x < -3 \end{cases}$$



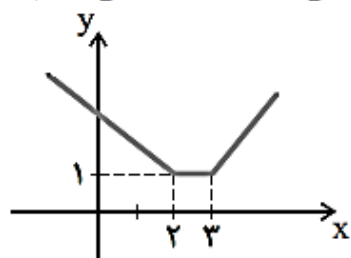
همانطور که می‌بینید تابع در بازه $[-3, -\frac{3}{2}]$ نزولی است. بنابراین:

$$b - a = -\frac{3}{2} - (-3) = \frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \left| -\frac{3}{2} + 3 \right| = \frac{27}{4} = 6.75$$

۷۹

با رسم تابع $f(x)$ ، بازه‌ای را که تابع اکیداً نزولی است، به‌دست می‌آوریم:



$$f(x) = |x-2| + |x-3| = \begin{cases} -2x+5 & x \leq 2 \\ 1 & 2 < x < 3 \\ 2x-5 & x \geq 3 \end{cases}$$

تابع مورد نظر به‌ازای $x \leq 2$ اکیداً نزولی است. برای به‌دست آوردن نقاط

مشترک توابع $f(x)$ و $g(x)$ داریم:

$$x \leq 2: f(x) = g(x)$$

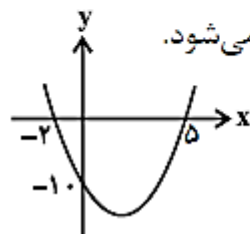
$$-2x+5 = 2x^2-x-10 \rightarrow 2x^2+x-15=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 & \text{قق} \\ x=\frac{5}{2} & \text{قق (بزرگ‌تر از ۲ است).} \end{cases}$$

۱۰

ابتدا نمودار $y = x^2 - 3x - 10$ را رسم می کنیم

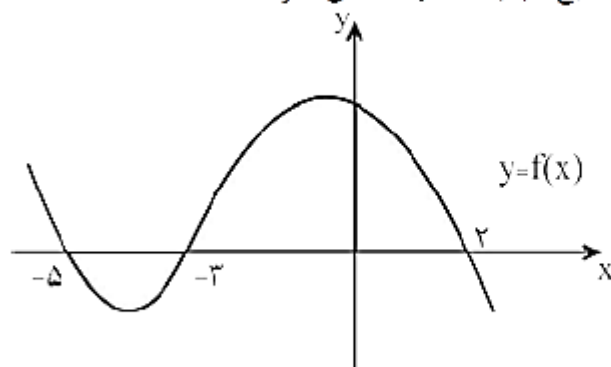
$$y = x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

از روی نمودار مشخص است که اگر نمودار را ۲ واحد به سمت راست منتقل کنیم، طول نقاط تلاقی با محور x ها غیرمنفی می شود.



۱۱

ابتدا نمودار تابع $y = f(x - 2)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل می کنیم تا نمودار تابع $y = f(x)$ حاصل شود.



برای تعیین دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

جدول تعیین علامت را تشکیل می دهیم:

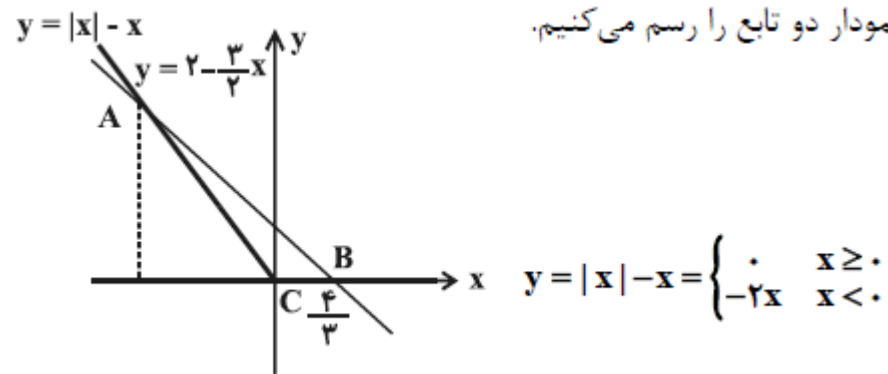
	-۵	-۳	۰	۲	
x	-	-	-	+	+
$f(x)$	+	+	+	+	-
$xf(x)$	-	+	-	+	-

پس مجموعه جواب نامعادله بالا و در نتیجه دامنه تابع برابر است با:

$$x \in [-5, -3] \cup [0, 2]$$

۱۲

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.



نقطه تلاقی دو نمودار را در ربع دوم به دست می‌آوریم:

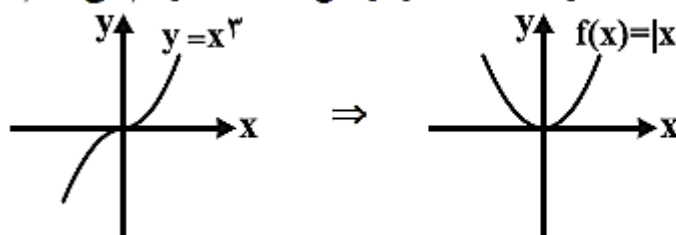
$$2 - \frac{3}{4}x = -2x \Rightarrow x = -4 \Rightarrow y = 8$$

مساحت ناحیه محدود به نمودار دو تابع برابر مساحت مثلث ABC است.

$$S = \frac{1}{2} y_A (x_B - x_C) = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

۱۳

نمودار تابع $f(x) = |x^3|$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع غیر یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌ناپذیر است.

۱۴

$$-1 < 0 < 1 \xrightarrow{f \text{ صعودی}} f(-1) \leq f(0) \leq f(1) \Rightarrow 4m + 1 \leq 5 \leq m^2 + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 + 1 \geq 5 \Rightarrow m^2 \geq 4 \Rightarrow m \geq 2 \text{ یا } m \leq -2 \\ 4m + 1 \leq 5 \Rightarrow 4m \leq 4 \Rightarrow m \leq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} m \leq -2$$

$$[x-2]=1 \Rightarrow 1 \leq x-2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

$$f(x) = |x-3| - |x-4| \quad \underline{3 \leq x < 4} \quad f(x) = x-3 + x-4 = 2x-7$$

برای بدست آوردن نقاط مشترک توابع $f(x)$ و $g(x)$ داریم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 + x - 17 = 2x - 7$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{4} \begin{matrix} \nearrow \text{ع.ق.ق } -2 \\ \searrow \text{ع.ق.ق } 2/5 \end{matrix}$$

و خدایی که در این نزدیکی است، لای این شب بوها پای آن کاج بلند روی آگاهی آب روی قانون گیاه...



موفق باشید الیاسی