



اصلان الیاسی

نام آزمون: ریشه گیری

تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۰۳/۲۸

زمان برگزاری: ۲۰ دقیقه

۱- اگر $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 27$ ، مقدار $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$ کدام است؟

- ① ۳ ② ۹ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{9}$

پاسخ: گزینه ۴

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1}) \stackrel{\text{مزدوج}}{=} x-2 - (x+1)$$

$$\Rightarrow 27(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1}) = -3 \Rightarrow \sqrt{x-2} - \sqrt{x+1} = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = \frac{1}{9}$$

۲- اگر $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt[3]{x^2 - x - 2}$ کدام است؟

- ① ۲ ② $\frac{4}{3}$ ③ ۱ ④ $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم $(a-b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3$ است.

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2}} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-2)}}{(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-2)})} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x^2 - x - 2}}{x+1 - (x-2)} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x^2 - x - 2} = 3 \quad *$$

$$\text{از طرفی: } \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} - 2\sqrt[3]{(x+1)(x-2)} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} = 1 + 2\sqrt[3]{x^2 - x - 2} \quad **$$

در رابطه * به جای $\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}$ مساویش را از رابطه ** قرار می‌دهیم.

$$1 + 2\sqrt[3]{x^2 - x - 2} + \sqrt[3]{x^2 - x - 2} = 3$$



$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2 - x - 2} = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - x - 2} = \frac{2}{3}$$

۳- حاصل عبارت $(2 - \sqrt{3})^{-1} + \frac{\sqrt{27} - 1}{4 + \sqrt{3}}$ ، کدام است؟

- ① $1 + 2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $1 + \sqrt{3}$ ④ 1

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{27} - 1}{4 + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 1}{4 + \sqrt{3}} \times \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3} - 9 - 4 + \sqrt{3}}{16 - 3} = \frac{13\sqrt{3} - 13}{13}$$

$$= \frac{13(\sqrt{3} - 1)}{13} = \sqrt{3} - 1$$

$$(2 - \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

پس: $\frac{\sqrt{27} - 1}{4 + \sqrt{3}} + (2 - \sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3}$

۴- اگر حاصل عبارت $(2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (2 + \sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}}$ به صورت $\sqrt[3]{A}$ باشد، کدام است؟

- ① $\sqrt{3} - 1$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{3} + 1$

پاسخ: گزینه ۱

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[3]{A} = (2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (2 + \sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}}$$

$$A = \left((2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (2 + \sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}} \right)^3$$

$$A = (2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3} \times 3} (2 + \sqrt{3})^{\frac{4}{3} \times 3} \sqrt{2} = (2 - \sqrt{3})^2 (2 + \sqrt{3})^4 \times \sqrt{2}$$

$$= (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} ((2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}))^4 \times \sqrt{2} = (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} (4 - 3)^4 \times \sqrt{2}$$

$$= (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{2} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \times \sqrt{2} = \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3 + 1 - 2\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1$$

۵- اگر $7^x = \sqrt{3}$ و $3^y = \sqrt{7}$ باشد، مقدار xy کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 4 ④ 3



پاسخ: گزینه ۲

$$3^y = \sqrt{7} \xrightarrow{(\cdot)^2} 3^{2y} = 7 \xrightarrow{(\cdot)^x} 3^{2xy} = 7^x \xrightarrow{7^x = \sqrt{3}} 3^{2xy} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3^{2xy} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2xy = \frac{1}{2} \xrightarrow{\div 2} xy = \frac{1}{4}$$

۶- اگر $a = \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ و $b = \sqrt{4 + \sqrt{15}}$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

- ① $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ ② $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{15}}{5}$ ④ $-\frac{2\sqrt{15}}{5}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}}{\sqrt{4 - \sqrt{15}} + \sqrt{4 + \sqrt{15}}} \times \frac{\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}}{\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}} = \frac{(\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}})^2}{4 - \sqrt{15} - (4 + \sqrt{15})}$$

$$= \frac{4 - \sqrt{15} + 4 + \sqrt{15} - 2\sqrt{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})}}{4 - \sqrt{15} - 4 - \sqrt{15}} = \frac{8 - 2\sqrt{16 - 15}}{-2\sqrt{15}}$$

$$= \frac{6}{-2\sqrt{15}} = \frac{3}{-\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = -\frac{3\sqrt{15}}{15} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$$

۷- حاصل $A = \frac{20 - 8\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2} + (\sqrt[4]{25} + 2)^{-2}$ کدام است؟

- ① ۹ ② ۸ ③ ۷ ④ ۶

پاسخ: گزینه ۱ حاصل هر کسر را جداگانه حساب می‌کنیم و سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$A = \frac{20 - 8\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2} + (\sqrt{5} + 2)^{-2} = \frac{4\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5} - 2} + \frac{1}{(\sqrt{5} + 2)^2}$$

$$= 4\sqrt{5} + \frac{(\sqrt{5} - 2)^2}{(\sqrt{5} + 2)^2(\sqrt{5} - 2)^2} = 4\sqrt{5} + \frac{5 + 4 - 4\sqrt{5}}{(5 - 4)^2} = 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5} = 9$$

۸- اگر $a - b = 3$ ، $ab = \frac{3}{4}$ و a و b هر دو مثبت باشند، آنگاه مقدار $(a + b)^{-3}$ کدام است؟

- ① ۱ ② $24\sqrt{3}$ ③ ۷۲ ④ $\frac{\sqrt{3}}{72}$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم:

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab \Rightarrow (a + b)^2 = 9 + 4 \times \frac{3}{4} = 12 \xrightarrow{a, b > 0} a + b = \sqrt{12}$$

$$(a + b)^{-3} = (\sqrt{12})^{-3} = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^3 = \frac{1}{12 \times \sqrt{12}} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}$$



$$= \frac{\sqrt{12}}{12 \times 12} = \frac{2\sqrt{3}}{12 \times 12} = \frac{\sqrt{3}}{6 \times 12} = \frac{\sqrt{3}}{72}$$

۹- حاصل عبارت $A = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1$ به ازای $x = \sqrt[12]{2}$ کدام است؟

۴ $\sqrt[4]{2}$

۳ $\sqrt{2}$

۲ ۲

۱ ۱

پاسخ: گزینه ۳

$$A = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) + 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) + 1 = x^6 - 1 + 1 = x^6$$

$$\stackrel{x=\sqrt[12]{2}}{=} \left(\sqrt[12]{2}\right)^6 = \sqrt{2}$$

۱۰- حاصل $\frac{9^{x-1} + 3^{2x+1}}{3^{nx-1} + 9^{x+1}}$ به ازای جميع مقادير x با مقدار ثابت m برابر است. مقدار $m + n$ کدام است؟

۴ $\frac{19}{9}$

۳ $\frac{10}{9}$

۲ $\frac{7}{3}$

۱ $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{9^{x-1} + 3^{2x+1}}{3^{nx-1} + 9^{x+1}} = \frac{3^{2x-2} + 3^{2x+1}}{3^{nx-1} + 3^{2x+2}} = \frac{3^{2x}(3^{-2} + 3^1)}{3^{2x}(3^{(n-2)x} \times 3^{-1} + 3^2)} = \frac{3^{-2} + 3^1}{3^{(n-2)x} \times 3^{-1} + 3^2}$$

مشخص است برای آن که عبارت بالا مستقل از x باشد، می بایست $n - 2$ برابر صفر باشد، یعنی $n = 2$ و داریم:

$$m = \frac{3^{-2} + 3}{3^{-1} + 3^2} = \frac{\frac{1}{9} + 3}{\frac{1}{3} + 9} = \frac{\frac{28}{9}}{\frac{28}{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow m + n = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$