

یاد آوری و تکمیل معادله خط :

* می دانیم از هر دو نقطه متمایز تنها یک خط راست عبور می کند .

* با داشتن مختصات نقطه از یک خط می توان معادله آن خط را نوشت .

برای این کار ابتدا شیب خط را که برابر است با نسبت جا به جایی عمودی به جا به جایی افقی پیدا می کنیم

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ شیب خط گذرا از دو نقطه } A \text{ و } B \text{ برابر است با}$$

* معادله خطی که شیب آن m و عرض از مبدأش h باشد به فرم $y = mx + h$

می باشد .

مثال : معادله خطی که از نقاط $A = (5,7)$ و $B = (3,1)$ عبور می کند بنویسید .

$$\text{حل: شیب خط } m_{AB} = \frac{7-1}{5-3} = 3 \text{ می شود پس معادله خط به صورت } y = 3x + h$$

است . حال مختصات یکی از دو نقطه A یا B را در معادله بدست آمده قرار می دهیم

$$7 = 3(5) + h \Rightarrow h = -8$$

در نتیجه معادله خط به صورت $y = 3x - 8$ است.

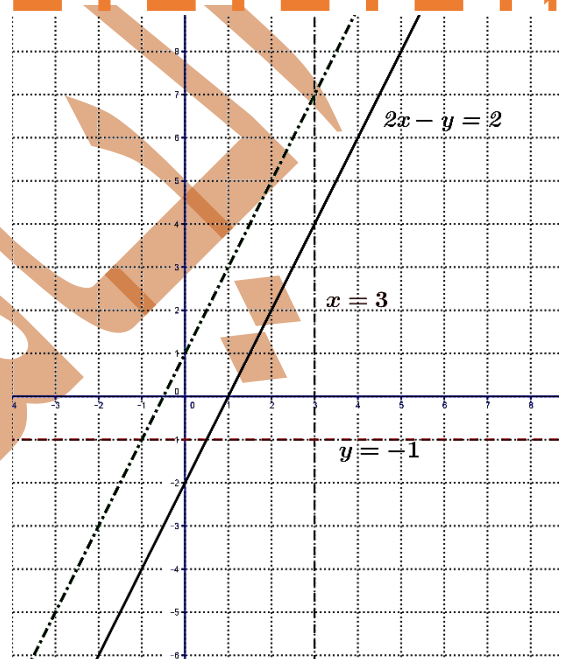
* وقتی معادله خط را داشته باشیم با انتخاب دو مقدار دلخواه بجای x دو مقدار برای y محاسبه

می کنیم در نتیجه مختصات دو نقطه از خط را داریم پس می توانیم نمودارش را رسم کنیم .

مثال: نمودار خط های زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2x + 1$ ب) $2x - y = 2$ پ) $y = -1$ ت) $x = 3$

3



تست ۱-

از نقطه A با مختصات $\begin{vmatrix} a \\ 2a+1 \end{vmatrix}$ خطی موازی خط $y = 2x + 5$ رسم می کنیم تا به نقطه B با مختصات $\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ برسیم. رابطه بین α و β کدام است؟

۴) $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$

۳) $\beta = \frac{\alpha-1}{2}$

۲) $\alpha = \frac{\beta+1}{2}$

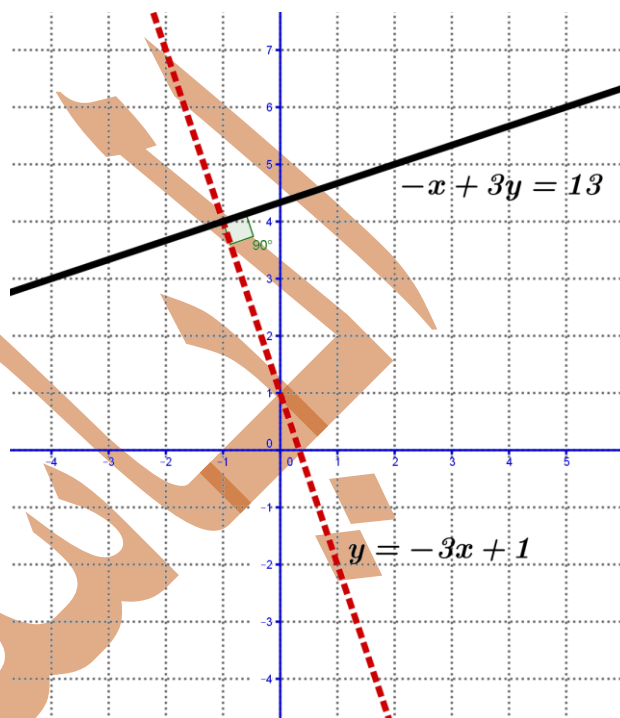
۱) $\alpha = \frac{\beta-1}{2}$

همانطور که ملاحظه کردید در مثال صفحه قبل دو خط $2x - y = 2$ و $y = 2x + 1$ با هم موازیند.

دلیل این است که دو خط برابر است.

مثال ۲: نمودار خط های $-x + 3y = 13$ و $y = -3x + 1$ در شکل زیر رسم شده اند.

ملاحظه می کنید برهم شیب آنها هم است.



تست ۲: خط l به معادله $y = mx + (m - 1)$ بر خط $\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$ عمود است.

خط l از کدام نقطه عبور می کند؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(1, 3)$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(2, 4)$

در حالت کلی

* دو خط با هم موازیند هرگاه شیب آنها برابر باشد.

* دو خط غیر موازی با محورهای مختصات برهم عمودند هرگاه حاصل ضرب شیب های آنها -1 شود. (یعنی شیب یکی قرینه و معکوس شیب دیگری است)

مثال: دو خط به معادله $-2x + (-m + 1)y = 2$ و $y = (m - 4)x - 1$ مفروضند

مقدار m را طوری بدست آورید که :

الف) دو خط موازی باشند

ب) برهم عمود باشند

تست ۳- یکی از خطوط به معادله $(k + 1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(8, 3)$ عمود است ، معادله آن خط کدام است ؟

$$3y + 2x = 4 \quad (1)$$

$$2y + 3x = 1 \quad (2)$$

$$2y - 3x = -5 \quad (3)$$

$$3y - 2x = -5 \quad (4)$$

تمرین ۱: معادله عمود منصف پاره خط AB که در آن $A(0, 1)$ و $B(6, 3)$ است را بنویسید.

تمرین ۲: زاویه بین دو خط به معادله $y - 2x = -1$ و به معادله $y = -3x - 5$ چند درجه است ؟

نکته : تانژانت زاویه بین دو خط به صورت مقابل محاسبه می شود

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

تمرین ۳: مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند .

الف) شیب ضلع AB را بنویسید .

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید .

پ) اگر بدانیم نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است ، مختصات رأس D را بیابید .

فاصله دو نقطه

(۱) اگر دو نقطه $A = (x_A, y_A)$ و $B = (x_B, y_B)$ هم طول باشند یعنی $x_A = x_B$ آنها برابر $AB = |y_A - y_B|$ است.

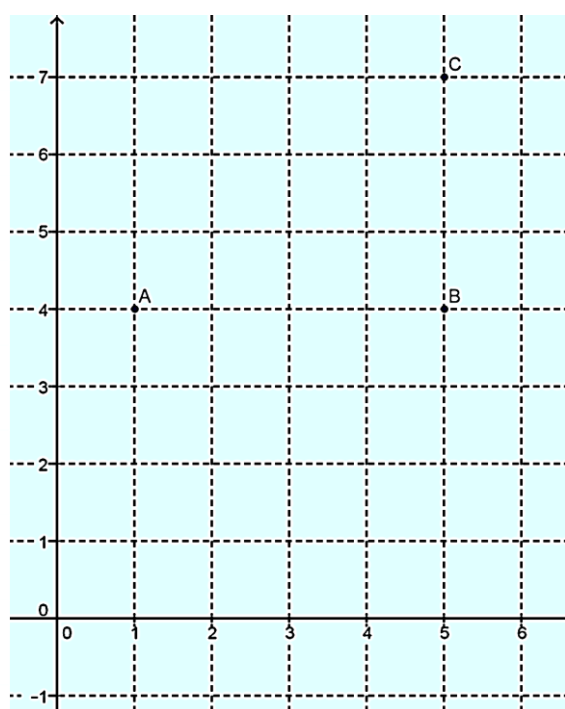
(۲) اگر دو نقطه $A = (x_A, y_A)$ و $B = (x_B, y_B)$ هم عرض باشند یعنی $y_A = y_B$ آنها برابر $AB = |x_A - x_B|$ است.

(۳) اگر $A = (x_A, y_A)$ و $B = (x_B, y_B)$ دو نقطه دلخواه باشند آنگاه فاصله آنها برابر $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ است.

(۴) فاصله نقطه $D = (x_D, y_D)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OD = \sqrt{x_D^2 + y_D^2}$$

مثال: نقاط $A = (1, 4)$ و $B = (5, 4)$ و $C = (5, 7)$ مفروض اند:



الف) سه نقطه را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید و فاصله آنها از یکدیگر را محاسبه کنید

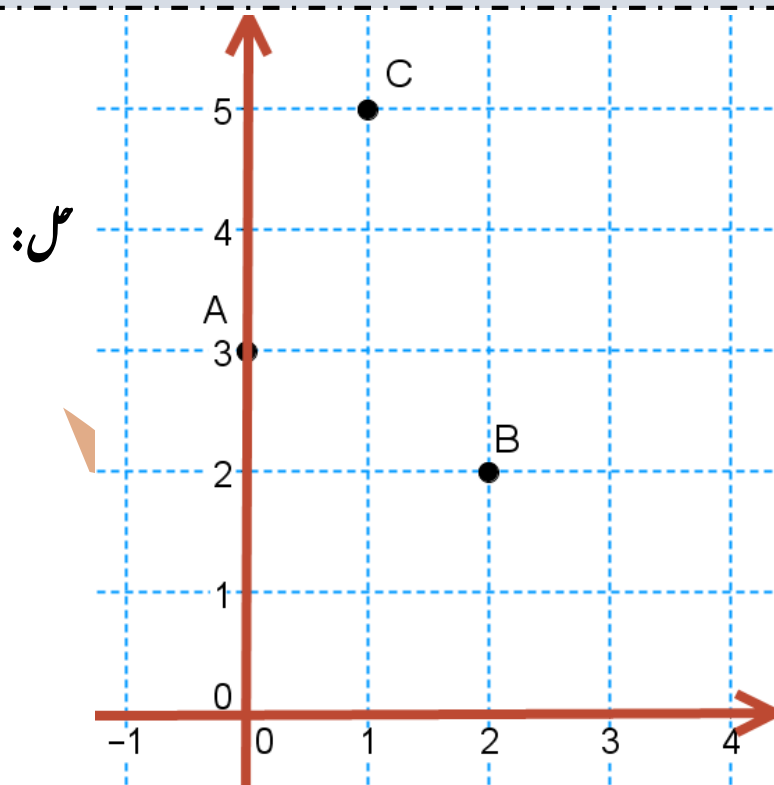
ب) اگر این سه نقطه رئوس مثلثی باشند نوع مثلث را مشخص کنید. (متساوی الساقین یا متساوی الاضلاع یا قائم الزاویه)

$$AB = |5 - 1| = 4, BC = |7 - 4| = 3$$

$$AC = \sqrt{(1 - 5)^2 + (4 - 7)^2} = 5$$

مثلث ABC قائم الزاویه است زیرا $5^2 = 4^2 + 3^2$

تمرین : نقاط $A = (0,3)$ و $B = (2,2)$ و $C = (1,5)$ سه رأس یک مثلث هستند نوع مثلث را معلوم کنید محیط آن چند است ؟ فاصله نقطه C تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید .



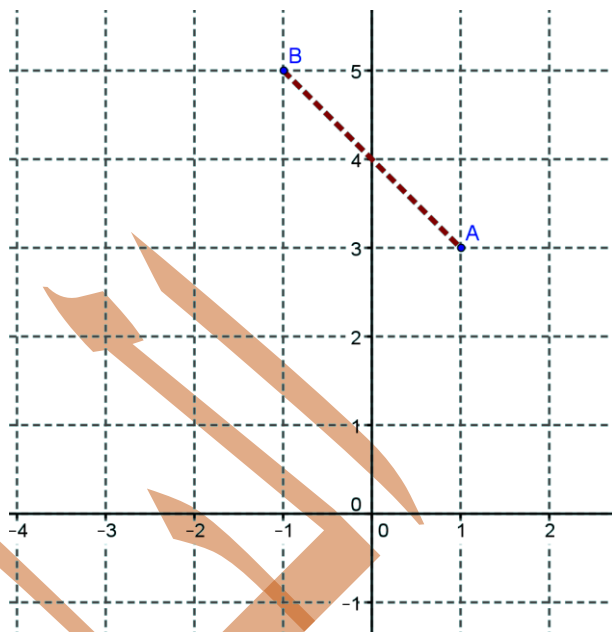
تست ۴- نقطه $(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $2y - x = 5$ است،

مساحت این مربع کدام است؟ سراسری تجربی خاز ۹۳

۸۰ (۴ ۷۵ (۳ ۴۵ (۲ ۴۰ (۱)

تمرین: مربع $ABCD$ در ناحیه اول و دوم صفحه مختصات قرار دارد و $A = (1,3)$ و $B = (-1,5)$ دو رأس آن هستند:

الف) شیب خط AD و معادله آن را بنویسید. ب) اگر $C = (-3,3)$ باشد مختصات D را بیابید.



مختصات نقطه وسط یک پاره خط:

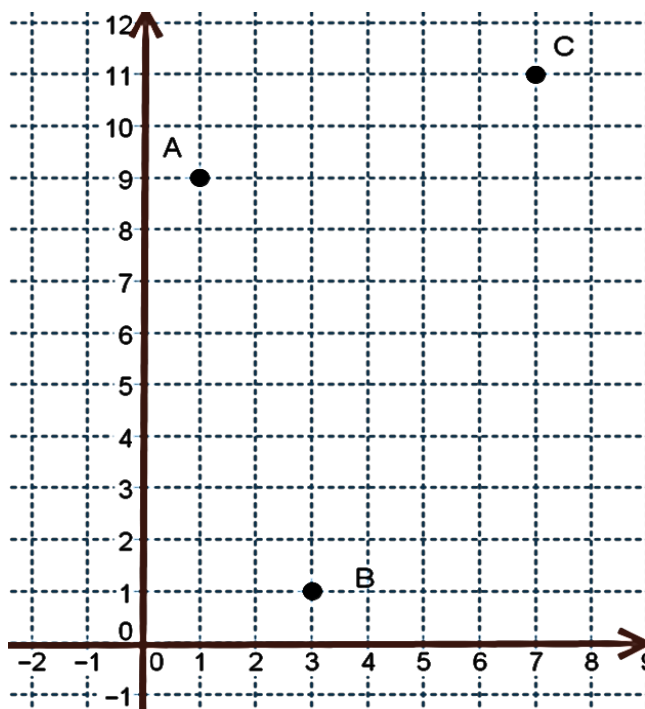
اگر $A = (x_A, y_A)$ و $B = (x_B, y_B)$ دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند مختصات نقطه وسط این دو نقطه برابر $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ در این حالت نقطه A قرینه نقطه B نسبت به نقطه M می‌گوییم.

مثال ۱: مختصات نقطه وسط دو نقطه $A = (3, -2)$ و $B = (4, 8)$ را بیابید.

مثال ۲: قرینه نقطه $C = (2, 5)$ نسبت به نقطه $E = (0, -3)$ چه نقطه‌ای است؟

مثال ۳: نقطه $F = (5, -4)$ وسط پاره خط بین دو نقطه A و $B = (7, -2)$ است مختصات نقطه A چیست؟

تمرین ۱) مختصات سه رأس مثلثی $A = (1,9)$ و $B = (3,1)$ و $C = (7,11)$ را در نظر بگیرید و آن را در دستگاه مشخص کنید.



الف) مختصات M ، نقطه وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب) طول میانه AM را محاسبه کنید و معادله خطی که این میانه بخشی از آن است را بنویسید.

تمرین ۲) چهار نقطه $A = (-1,3)$ و $B = (8,6)$ و $C = (3,11)$ و $D = (-6,8)$ را در صفحه مختصات مشخص کرده و نشان دهید که وسط پاره AC بر وسط پاره BD منطبق است. چهارضلعی $ABCD$ چه نوع چهارضلعی است؟

تمرین ۳) نقاط $A = (0,0)$ و $B = (2,4)$ و $C = (6,0)$ سه رأس یک متوازی الاضلاع هستند. مختصات رأس چهارم آن متوازی الاضلاع را حساب کنید. (سه جواب) ☺

تمرین ۴) قرینه نقطه $A = (2,3)$ نسبت به نقطه $B = (1,5)$ را بیابید.

تمرین) قرینه نقطه $A = (2,3)$ را نسبت به هر یک از خط های زیر معین کنید .

الف) محور x ها

ب) محور y ها

پ) نیمساز ربع اول و سوم

ت) خط $x = 4$

ث) خط $y = 1$

فاصله نقطه از خط :

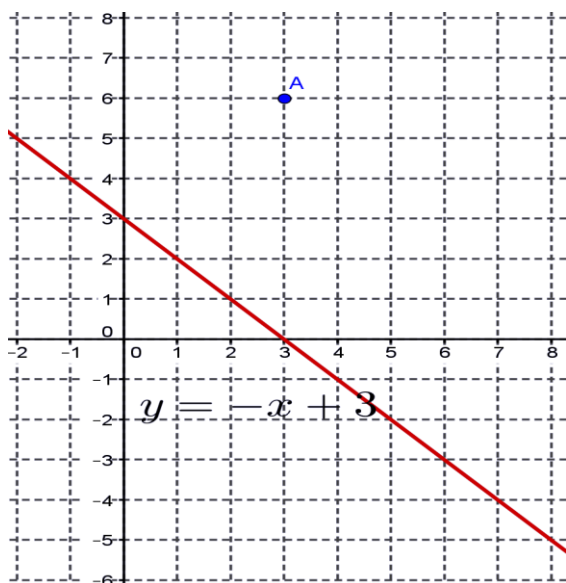
فاصله نقطه $A = (x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ می شود :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۱: فاصله نقطه $A(2,3)$ از خط $y = 3x + 11$ را به دست آورید .

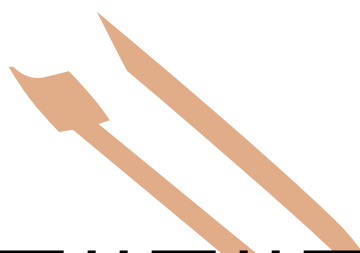
حل : ابتدا خط را به فرم $3x - y + 11 = 0$ می نویسیم سپس

$$d = \frac{|3 \times 2 - 3 + 11|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{5}$$



تمرین) یکی از اضلاع مربعی بر خط

$x + y - 3 = 0$ واقع است ، اگر $A(3,6)$ یکی از رؤوس این مربع باشد ، مساحت آن را به دست آورید .



می دانیم هر دو خط موازی قابلیت نمایش به صورت $ax + by + c_1 = 0$ و $ax + by + c_2 = 0$ را دارند فاصله بین دو خط موازی را به دو روش زیر می توانیم محاسبه کنیم :

الف) فاصله یک نقطه دلخواه روی یک خط را تا خط دیگر محاسبه کنیم .

ب) از فرمول $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ فاصله دو خط موازی بدست می آید .

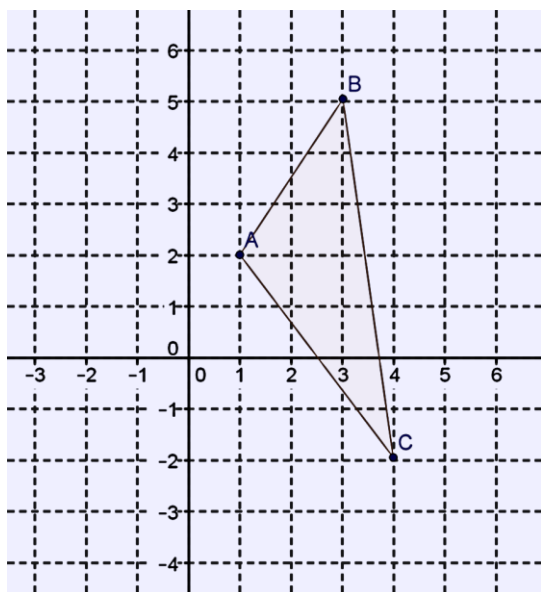
مثال : فاصله دو خط $3x + 4y - 2 = 0$ و $6x + 8y + 3 = 0$ را بدست آورید .

حل : در خط $6x + 8y + 3 = 0$ با تقسیم طرفین معادله بر ۲

معادله به صورت $3x + 4y + \frac{3}{2} = 0$

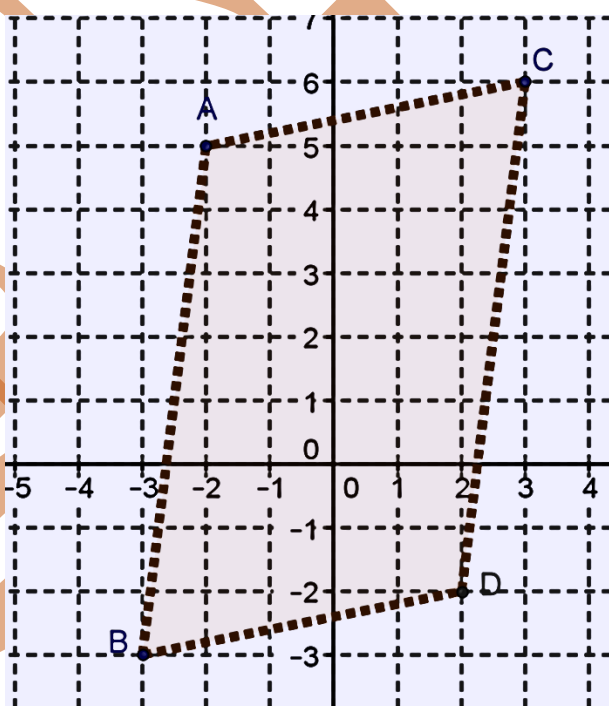
در می آید حالا فاصله این دو خط موازی برابر است با

$$d = \frac{\left| -2 - \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\left| -\frac{7}{2} \right|}{5} = \frac{7}{10}$$



تمرین ۱) مختصات رئوس مثلثی در تصویر مقابل آمده است مساحت مثلث را محاسبه کنید .

تمرین ۲) مساحت متوازی الاضلاع زیر را محاسبه کنید .



تمرین ۳) مختصات سه رأس یک مستطیل $A = (1, 2)$ و $B = (-1, 0)$ و $C = (1, -2)$ می باشند مختصات رأس چهارم را بیابید .

🕒 تست ۵) دو خط در صفحه مختصات از خط $y = x$ به فاصله ۲ واحدی قرار دارند ، یکی از آنها محور طول ها را در قسمت مثبت آن قطع می کند ، طول محل برخورد کدام است ؟

۱) $2(2\sqrt{2})$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

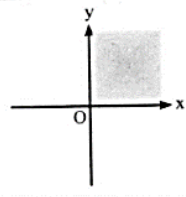
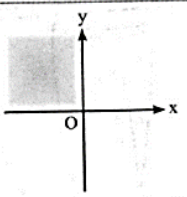
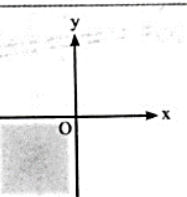
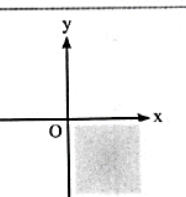
تمرین ۱ : خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است ، شعاع دایره را محاسبه کنید .

تمرین ۲ : دو انتهای یکی از قطر های دایره ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ هستند .
الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید .
ب) آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد ؟ چرا ؟

تمرین ۳ : معادله خطی را بنویسید که از دو خط $3x - y + 1 = 0$ و $3x - y - 11 = 0$ به یک فاصله باشد .

بخش تکمیلی: (برگزیده شده از کتب معتبر)

چهار ناحیه مختصات

ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم
			
شکل			
شرط	$x < 0, y > 0$	$x < 0, y < 0$	$x > 0, y < 0$

① تست: نقطه‌ی $A(m^2 - 9, 1 - m)$ در ناحیه سوم مختصات قرار دارد. چند جواب طبیعی برای m وجود دارد؟

(۱) هیچ

(۳) ۲

(۲) ۱

(۴) ۳

محورهای مختصات			
معادله محور	فرم کلی نقاط روی این محور	ویژگی	
$y = 0$	$(a, 0)$	هر نقطه روی این محور عرض صفر دارد	محور x ها
$x = 0$	$(0, b)$	هر نقطه روی این محور طول صفر دارد	محور y ها

تست: نقطه $(m - n, 2m + n)$ روی محور x ها و به طول ۶ قرار دارد در اینصورت

کدام نقطه ی زیر روی محور y ها واقع است؟

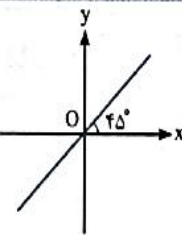
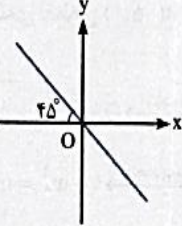
(۲) $(m^2 - n, n)$

(۱) $(n^2 - m, m)$

(۴) $(n^2 + m, m)$

(۳) $(n^2 + m, m)$

نیمسازهای ناحیه‌های مختصات

معادله	شکل	ویژگی	فرم کلی نقاط روی آن
$y = x$		هر نقطه‌ای روی این خط، طول و عرض برابر دارد.	$A(a, a)$
$y = -x$		هر نقطه‌ای روی این خط، طول و عرض قرینه دارد.	$B(b, -b)$

① تست: چند نقطه روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم وجود دارد که فاصله‌اش از نقطه‌ی $(2, 1)$ برابر $\sqrt{5}$ باشد؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

هیچ (۱)

① تست: اگر $A(1, 0)$ ، $B(4, 2)$ و $C(3, -3)$ سه رأس مثلث ABC باشند، نوع مثلث کدام است؟

(۴) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین

(۳) قائم‌الزاویه

(۲) متساوی‌الاضلاع

(۱) متساوی‌الساقین

تست: هرگاه $A(2, 3)$ ، $B(-7, 4)$ و $C(3, -2)$ سه رأس مثلث ABC بوده و نقطه‌ی O وسط میانه‌ی AM باشد، اندازه‌ی BO کدام است؟

$\sqrt{53}$ (۲)

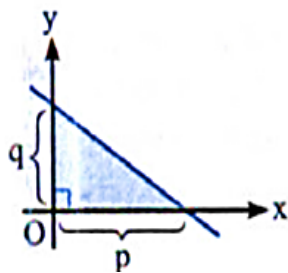
$\sqrt{55}$ (۴)

$\sqrt{52}$ (۱)

$\sqrt{54}$ (۳)

پیدا کردن شیب یک خط

توضیح	به زبان ریاضی	چه چیزی داریم؟
در نمایش ضمنی خط، x و y و عدد ثابت، همگی یک طرف تساوی اند و y ، بر حسب x حساب نشده! شیب در این حالت می‌شود: منفی ضریب x به ضریب y .	معادله خط: $ax + by + c = 0$ شیب: $-\frac{a}{b}$	۱ از روی معادله ضمنی خط
در نمایش صریح، y با ضریب ۱ در سمت چپ تساوی و مابقی جمله‌ها سمت راست‌اند، شیب در این حالت، همان ضریب x است...	معادله خط: $y = mx + h$ شیب: m	۲ از روی معادله صریح خط
شیب در این حالت می‌شود، تفاضل عرض نقطه‌ها تقسیم بر تفاضل طول نقطه‌ها با همان ترتیبی که نقطه‌ها را در صورت گرفته بودید... ($x_1 \neq x_2$)	نقطه‌ها: $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ شیب: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	۳ با داشتن دو نقطه از خط
طول از مبدأ، طول نقطه‌ای است که خط، محور x ها را آن‌جا قطع می‌کند و عرض از مبدأ هم عرض نقطه‌ای است که در آن‌جا تلاقی خط و محور y ها اتفاق می‌افتد. شیب در این حالت می‌شود: منفی عرض از مبدأ، تقسیم بر طول از مبدأ.	طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q شیب: $-\frac{q}{p}$	۴ با داشتن طول از مبدأ و عرض از مبدأ



طول از مبدأ و عرض از مبدأ یک خط، در نمایش هندسی و روش پیدا کردن آن‌ها:

- ۱ اگر طول از مبدأ خط را خواستی، در معادله خط به جای y ، صفر بذار.
- ۲ اگر عرض از مبدأ خط را خواستی، در معادله خط به جای x ، صفر بذار.

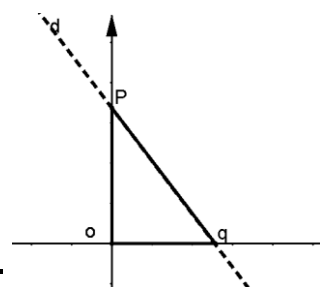
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

معادله خط وقتی طول از مبدأ و عرض از مبدأ را داریم

مثال : معادله خطی را بنویسید که عرض از مبدأش ۴ باشد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع کند .

اگر خطی هر دو محور مختصات را قطع کند و مثلثی با محورهای مختصات به وجود آورد مطابق شکل زیر

$$S = \frac{|pq|}{2}$$



مساحت مثلث حاصل از تلاقی خط با محورهای مختصات

تمرین ۱ : مساحت مثلث محصور به خط گذرنده از نقاط $A(2,5)$ و $B(5,-1)$ و محور های مختصات چند است ؟

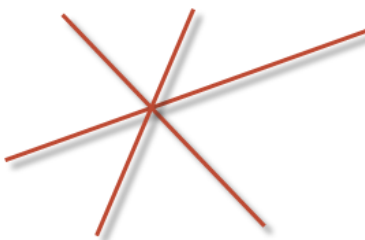
تمرین ۲: مساحت متوازی الاضلاع محدود به خطوط به معادله های $x = -5$ و $y = -x + 4$ و محور y ها و نیمساز ربع دوم و چهارم چند است ؟

چیزی که می توانیم به دست آوریم	چیزی که داریم
فاصله رأس از این خط طول ضلع مربع است	مختصات یک رأس مربعی و معادله ضلع مقابل آن
فاصله رأس از این قطر می شود $\frac{\text{ضلع}}{\sqrt{2}}$	مختصات یک رأس مربعی و معادله قطر مقابل آن

نکته : سه خط همرس اند هرگاه نقطه برخورد هر دو تا از آنها در سومی صدق کند.

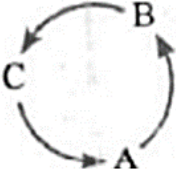
مثال : به ازای چه مقدار m سه خط زیر همرس هستند .

$$2x + y = 1 \quad \text{و} \quad x - y = 5 \quad \text{و} \quad (m + 2)x + 3my = m - 1$$



فاصله های خاص				
نقطه تا محور های مختصات		نقطه (x_1, y_1) تا خطهای افقی و قائم		مبدأ تا خط
تا محور عرضها	تا محور طول ها	تا خط $y = m$	تا خط $x = k$	فاصله مبدأ تا خط $ax + by + c = 0$
$ x_1 $	$ y_1 $	$ y_1 - m $	$ x_1 - k $	$\frac{ c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$

مثال : مختصات یک رأس مربعی $(1, -1)$ و معادله یک قطر آن $2x - y + 1 = 0$ محیط این مربع چند است ؟



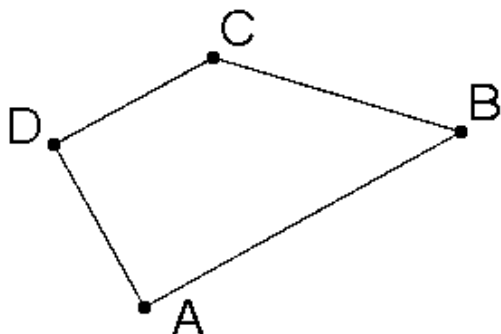
پیدا کردن مساحت مثلث

فرمول: $S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$

مثال : مساحت مثلثی که رأس های آن $A(1, -1)$ و $B(0, 2)$ و $C(-3, b)$ می باشند ۲ شده است b چند است ؟

تست - اگر در دوزنقه قائم الزاویه مقابل رأس ها $A(2, -1)$ و $B(6,3)$ و $C(0,5)$ و

$D(m,n)$ باشد ، حاصل $m + 3n$ چند می شود ؟



تمرین :

۱- نقطه $A(7,6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن روی دو خط به

معادله های $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ قرار دارند . مختصات نقطه وسط

قطر آن کدام است ؟

(1,5) (۱) (۲, 3) (۲) (۳, 5) (۳) (۴, 3) (۴)

۲- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) با رؤس $B(1,2)$ و

$C(-3,2)$ و مساحت ۴ واحد مربع ، مجموع طول و عرض نقطه A کدام است ؟

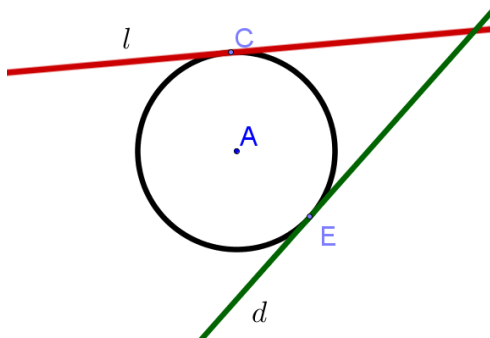
(۱) 7 (۲) -5 (۳) -3 (۴) -1

سوال کنکور ۱۴۰۰ تجربی

۱۳۴- فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{15}$

ج. ۱۳۴) در اینجا به این ترتیب
 $2y = x^2 \leftarrow x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$
 $2y = y+3 + y-3 - 2\sqrt{y^2-9}$ (توان ۲)
 $\sqrt{y^2-9} = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = \sqrt{6}$
 حالتی که $y = -3$ را از مبدأ حساب می‌کنیم $\sqrt{4+9} = \sqrt{15}$
 گزینه ۴ درست است.

تمرین: در شکل زیر دو خط $l: 3x - y = 2$ و $d: mx + y = 1$ بر دایره به مرکز $A(0, -2)$ مماس شده است مقدار m چند است؟



قرینه یک نقطه	
قرینه نقطه (x_1, y_1)	
نسبت به	میشه
خط $y = m$	$(x_1, 2m - y_1)$
خط $x = k$	$(2k - x_1, y_1)$
محور طول ها	$(x_1, -y_1)$
محور عرضها	$(-x_1, y_1)$
مبدا مختصات	$(-x_1, -y_1)$
نیمساز ربع اول وسوم	(y_1, x_1)
نیمسا ز ربع دوم وچهارم	$(-y_1, -x_1)$

مثال : قرینه خط $x + 2y - 1 = 0$ نسبت به خط $y = 2$ چه خطی است ؟

مثال : فاصله قرینه نقطه $(2, 1)$ نسبت به خط $x = 5$ تا خط $x - y + 1 = 0$ چند است ؟

روابط بین ریشه های معادله درجه دوم

یاد آوری: هر معادله به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ باشد را معادله درجه دوم می نامیم.

از بین روش های حل معادله درجه دوم سه روش از بقیه بیشتر کاربرد دارند که از هر کدام یک مثال حل می کنیم جهت یاد آوری:

الف) $3x^2 - 2x - 8 = 0$ (روش تجزیه)

برای حل برخی از معادلات درجه دوم ضربدار، می توان از قاعده روبهرو استفاده نمود:
 $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{1}{a}(ax^2 + bx + c) = 0$
 برای تکمیل تجزیه، باید ۲ عدد بیابیم که جمع آن ها b و حاصل ضرب آن ها برابر ac باشد و آن ها را درون پرانتزها جای گذاری کنیم.

ب) $x^2 - 2x - 5 = 0$ (روش مربع کامل)

نکته: عبارت درجه دومی قابل تبدیل به مربع کامل است که دلتای آن برابر صفر باشد.

مثال: چند واحد به عبارت $x^2 - x - 1$ اضافه کنیم تا مربع کامل شود؟

اگر معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را با روش مربع کامل حل کنیم تا به صورت $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ در آید، (ضرب x داخل پرانتز یک باشد) عددی که باید به دو طرف تساوی اضافه شود $\frac{b^2}{4a^2}$ است و عددی که در نهایت باید از آن جذر بگیریم $\frac{\Delta}{4a^2}$ خواهد بود.

مثال: برای حل معادله درجه دوم $5x^2 - 2x - 1 = 0$ به روش مربع کامل عددی که درست است از آن جذر می گیریم است.

صفحه ۲۴

پ) $3x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0$ (روش دلتا)

شاخص وجود یا عدم وجود ریشه در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ عبارت است از $\Delta = b^2 - 4ac$

ریشه داشتن معادله	$\Delta \geq 0$
دو ریشه دارد	$\Delta > 0$
یک ریشه دارد	$\Delta = 0$
ریشه حقیقی ندارد	$\Delta < 0$

تست : به ازای چند مقدار طبیعی m معادله $(2x - 1)(x^2 + mx + \frac{3}{2}m) = 0$ فقط یک ریشه دارد ؟

۶(۴

۵(۳

۴(۲

۳(۱

در صورتی که شاخص $\Delta = b^2 - 4ac$ عددی مثبت شود معادله دارای ۲ جواب حقیقی متمایز است که آنها را با

**روابط
بین
ریشه ها**

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ بدست می آوریم :}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

واضح است که در این صورت

$$\alpha\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

و

فرض کنیم $\alpha + \beta = S$ و $\alpha\beta = p$ در این صورت معادله اولیه $ax^2 + bx + c = 0$ با تقسیم طرفین بر a به فرم $\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{b}x + \frac{c}{a} = 0$ یعنی $x^2 - sx + p = 0$ در می آید که در آن sum و $product$ مجموع و حاصلضرب ریشه ها هستند از این فرمول اخیر زمانی استفاده می کنیم که ریشه ها را داده باشند و معادله را بخواهند .

$s = \frac{-b}{a}$	$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p$	$ \alpha - \beta = \sqrt{s^2 - 4p}$ روابط بین ریشه ها در یک نگاه :
$p = \frac{c}{a}$	$\alpha^3 + \beta^3 = s^3 - 3ps$	

مثال ۱ : مجموع و حاصلضرب ریشه های معادله $2x^2 + 3x - 3 = 0$ را بنویسید .

مثال ۲ : معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{3}$ باشند .

مثال ۳: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $5 - \sqrt{3}$ و $5 + \sqrt{3}$ باشند.

مثال ۴: به ازای چه مقدار m در معادله $4x^2 + 9x - m = 0$ حاصلضرب ریشه ها ۱۲ برابر مجموع ریشه ها است.

مثال ۵) اگر $x = -2$ یک ریشه معادله $3x^2 - mx - 6 = 0$ باشد به کمک روابط بین ریشه ها ریشه دیگر و m را بیابید.

تمرین ۱) اگر معادله $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 5 = 0$ دارای ریشه ۲ باشد مقدار m و ریشه دیگر معادله را بیابید.

تمرین ۲) اگر حاصل ضرب ریشه های معادله $3x^2 - (m - 7)x - m = 0$ مساوی -5 باشد مجموع ریشه هایش چند است؟

تمرین ۳) دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $-1/5$ و حاصل ضربشان -7 باشد.

تمرین ۴) محیط یک مستطیل ۳۳ متر و مساحت آن ۶۵ متر است. ابعاد این مستطیل را به دست آورید.

در صورتی که معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ۲ ریشه باشد

نکته ۱: اگر یک ریشه ۱ باشد (ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ است) آنگاه مجموع ضرایب صفر است و برعکس.

نکته ۲: اگر یک ریشه -1 باشد (ریشه دیگر $-\frac{c}{a}$ است) آنگاه $b = a + c$ و برعکس.

نکته ۳: اگر داشته باشیم $a = c$ آنگاه یک ریشه معکوس ریشه دیگر است و برعکس.

نکته ۴: اگر داشته باشیم $b = 0$ آنگاه ریشه ها قرینه هم هستند و برعکس.

برای هریک از موارد بالا یک مثال می نویسیم:

❶ تست: حدود m کدام باشد تا معادله $mx^2 + (m-1)x + m = 0$ حداقل یک ریشه داشته باشد؟

(۱) $(-1, \frac{1}{3})$ (۲) $[-1, \frac{1}{3}]$ (۳) $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

❶ تست: m کدام باشد تا ریشه های معادله $x^2 + (m-3)x + m^2 - 3 = 0$ معکوس هم باشند؟

(۱) -2 (۲) 2 (۳) ± 2 (۴) هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

بحث در وجود و علامت ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

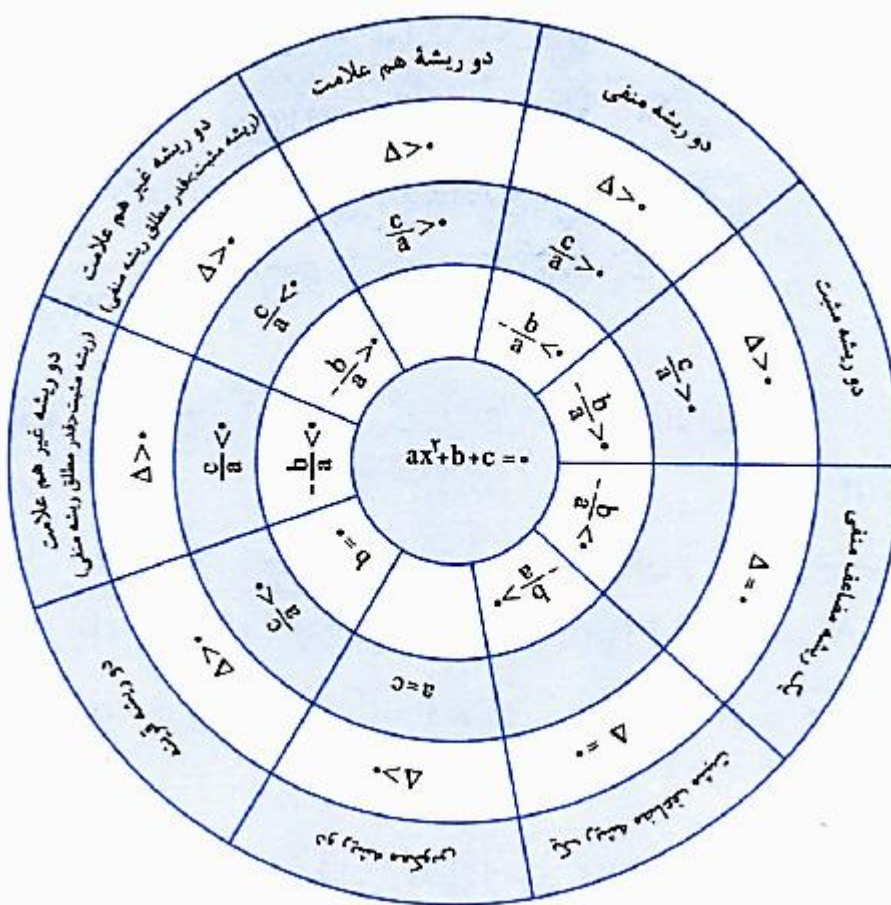
الف) اگر $\frac{c}{a} < 0$ در اینصورت معادله دو ریشه مختلف علامت دارد .

ب) اگر $\frac{c}{a} = 0$ در اینصورت $c = 0$ پس یک ریشه معادله صفر و ریشه دیگر $-\frac{b}{a}$ است .

پ) اگر $\frac{c}{a} > 0$ در اینصورت اگر $\Delta \geq 0$ و $-\frac{b}{a} < 0$ و دو ریشه منفی هستند (ممکن است مساوی هم باشند)

اگر $\Delta \geq 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ و دو ریشه مثبت هستند (ممکن است مساوی هم باشند)

اگر $\Delta < 0$ معادله فاقد ریشه حقیقی است .



مثال : بدون حل معادله های زیر راجع به وجود و علامت ریشه ها بحث کنید :

الف) $3x^2 + 7x + 2 = 0$ ب) $2x^2 + 4x - 1 = 0$

تمرین (۱) نکته : معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش با ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت زیر مرتبط باشند :

الف) ریشه هایش قرینه ریشه های معادله فوق باشند

ب) ریشه هایش معکوس ریشه های معادله فوق باشند

پ) ریشه هایش قرینه و معکوس ریشه های معادله فوق باشند

تمرین (۲) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش از ۲ برابر ریشه های معادله $x^2 - 2x - 6 = 0$ سه واحد بیشتر باشند .

تمرین (۳) در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از ریشه دیگر ۲ واحد بزرگتر است m را بیابید .

تمرین (۴) در معادله $(a + 3)x^2 + 20x + 2a = 0$ ریشه ها معکوس هم هستند ریشه کوچکتر چند است ؟

تمرین (۵) در معادله $2x^2 + (t + 1)x - 1 = 0$ ریشه ها قرینه هم می باشند t چند است ؟

تمرین ۱) اگر مجموع طول نقاط تلاقی سهمی $y = 2x^2 + (4 - m)x + 3m$ با محور طول ها دوسوم حاصلضرب آنها باشد ، حاصلضرب آنها چند است ؟

تمرین ۲) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش از قرینه ریشه های معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ دو واحد کوچکتر باشند .

تمرین ۳) اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $3x^2 - 7x + 1 = 0$ باشند حاصل هریک از عبارات زیر را بیابید :

الف) $\alpha^2 + \beta^2$ ب) $\alpha^3 + \beta^3$ پ) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ت) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

ث) $(3\alpha^2 - 7\alpha + 9)(5\alpha\beta)$ ج) $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1}$ چ) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

① اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند، حاصل $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ کدام است؟			
۱۶ (۱)	-۱۶ (۲)	۴۸ (۳)	-۴۸ (۴)

حل معادله های خاص به کمک تبدیل به درجه دوم :

مثال (۱) معادلات زیر را حل کنید :

الف) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ ب) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ت) $x - 10\sqrt{x} + 9 = 0$ الف) 0

مثال ۲: معادله $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ را حل کنید.

ماکزیمم و مینیمم یک سهمی

نکته : سهمی $y = ax^2 + bx + c$ اگر $a > 0$ دارای نقطه مینیمم و اگر $a < 0$ دارای ماکزیمم است در هر دو صورت نقطه رأس سهمی (نقطه مینیمم یا ماکزیمم) از رابطه زیر بدست می آید :

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

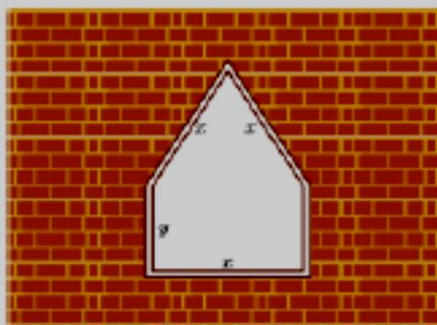
به $\frac{-\Delta}{4a}$ مقدار مینیمم یا ماکزیمم سهمی می گوئیم

نکته : سهمی $y = a(x - h)^2 + k$ اگر $a > 0$ دارای نقطه مینیمم و اگر $a < 0$ دارای ماکزیمم است در هر دو صورت نقطه رأس سهمی (نقطه مینیمم یا ماکزیمم) (h, k) است .

مثال ۱: نقطه ماکزیمم سهمی $y = -x^2 + 4x + 1$ را بیابید و نمودارش را رسم کنید.

مثال ۲: نقطه مینیمم سهمی $y = x^2 + 2x + 3$ را بیابید و نمودارش را رسم کنید.

مثال ۳: نقطه ماکزیمم سهمی $y = -(x + 2)^2 - 1$ را بیابید.



۱۸ : یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

حل : با توجه به شکل داریم :

$$P = 4 \rightarrow 2x + 2y = 4 \rightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x$$

از آنجا که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است (چرا؟)، پس می توان نوشت:

$$S = x \cdot y + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

حال اگر به جای y معادل آن را بر حسب x قرار دهیم. داریم :

$$S = x \cdot (2 - \frac{1}{2}x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 2x$$

این تابع، یک تابع درجه‌ی ۲ (سهمی) است و دارای ماکزیمم است (چرا؟). لذا داریم.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(\frac{\sqrt{3}-6}{4})} = \frac{2}{\frac{6-\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{4-\sqrt{3}} = 0.94 \text{ m}$$

$$y_{\max} = 2 - \frac{1}{2}x = 2 - \frac{1}{2}(0.94) = 0.53 \text{ m}$$

توجه : پنجره‌ی موضوع این تمرین، زمانی بیشترین نوردهی دارد که بزرگترین مساحت را داشته باشد.

مثال ۲

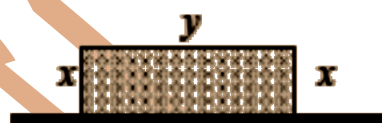


: قرار است در کنار یک رودخانه ، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم .
برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود . اگر تنها هزینه ی
نصب ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم . بیشترین مساحت ممکن این
محوطه را تعیین کنید .

حل :

$$y + 2x = 120 \rightarrow y = 120 - 2x$$

مساحت مستطیل $S = xy$



$$S(x) = x(120 - 2x) \rightarrow S(x) = 120x - 2x^2$$

تابع به دست آمده ، یک تابع درجه ی دوم است و در آن $a = -2 < 0$ می باشد . پس تابع دارای بیشترین
مقدار است . بیشترین مقدار را به روش زیر تعیین می کنیم .

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2(-2)} = 30$$

$$S(30) = 120(30) - 2(30)^2 = 3600 - 1800 = 1800 \text{ m}^2$$

توجه : مقدار مساحت را پس از تعیین مقدار x نیز می توان به شکل زیر به دست آورد .

$$y = 120 - 2(30) = 60$$

$$S = xy = (30)(60) = 1800 \text{ m}^2$$

مثال ۳: مجموع دو عدد مثبت ۲۰ است بیشترین مقدار برای مجموع آنها چند است ؟

صفرهای تابع :

برای هر تابع مانند $y = f(x)$ طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور x ها را صفرهای تابع می نامند .

صفرهای تابع در واقع جواب های معادله $f(x) = 0$ هستند (در این نقاط مقدار تابع صفر است)

*در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ اگر $f(0)$ را محاسبه کنیم c بدست می آید *

این عدد نشان دهنده این است نمودار در چه مکانی از محور y ها عبور می کند .

بشارت ۱ : محل تقاطع نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ با محور عرضها مقدار c را نشان

می دهد. لذا در هر سهمی که نمودار آن از مبدأ مختصات می گذرد ، $c = 0$ است.

بشارت ۲ : اگر نمودار سهمی نسبت به محور y ها متقارن باشد، محور تقارن آن یعنی خط $x = -\frac{b}{2a}$ روی

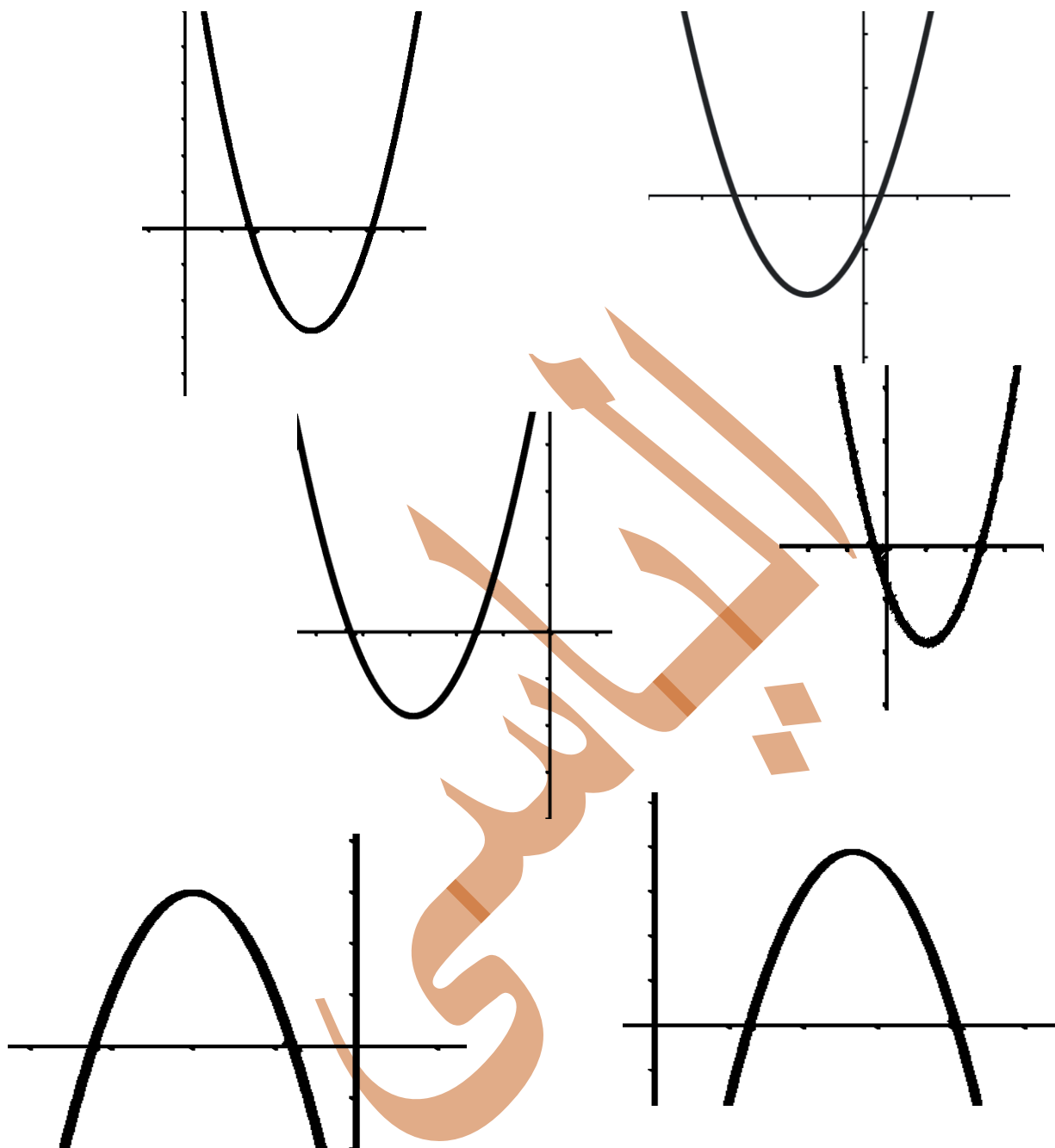
محور y ها منطبق است. پس $x = 0$ می باشد و در نتیجه $b = 0$ است.

مژده ☺☺: اگر $x = x_0$ و $x = x_1$ صفرهای یک سهمی باشند ضابطه این سهمی به صورت

$$y = a(x - x_0)(x - x_1) \text{ است .}$$

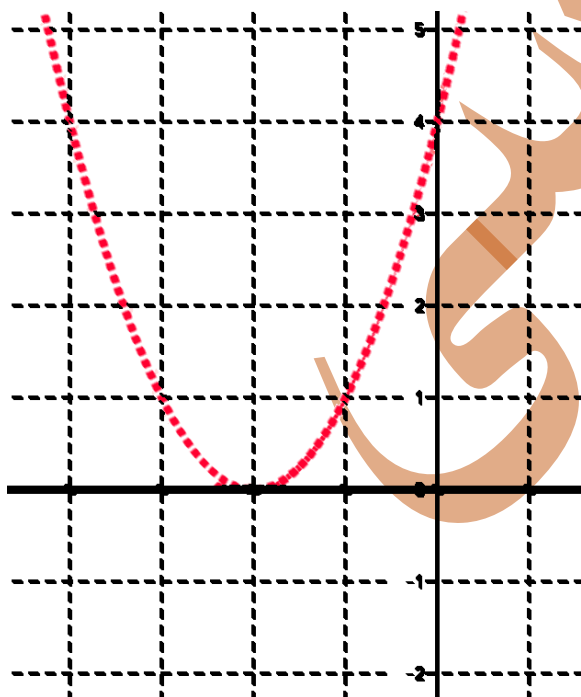
مثال : معادله یک سهمی را بنویسید که نمودار آن محور افقی را در نقاطی به طول های ۱ و ۲ و محور عمودی را در نقطه ای به عرض ۴ قطع کند .

در حالات مختلف زیر علامت (Δ, a, b, c) را با توجه به شکل نمودار مشخص کنید (با تفسیر)



تمرین از درس ۱ و ۲

- ۱- مختصات سه رأس مثلثی $A(2, -1)$ و $B(5, 1)$ و $C(0, 4)$ می باشند مختصات محل برخورد میانه ها را بدست آورید (مرکز ثقل مثلث)
- ۲- نقطه وسط نقاط محل تلاقی نمودار تابع $3x + 4y - 2 = 0$ با محور های مختصات را مشخص کنید.
- ۳- معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(3, 1)$ گذشته و بر خط $2x - 3y + 1 = 0$ عمود باشد .
- ۴- قرینه نقطه $A(3, 1)$ نسبت به خط $y = x - 2$ را بیابید .
- ۵- اگر α و β ریشه های معادله $x(x - 3) = -2$ باشند به ازای چه مقدار a ریشه های معادله $2x^2 + ax + 8 = 0$ به صورت $\alpha\beta^2$ و $\beta\alpha^2$ است .
- ۶- نمودار تابع $y = (a - 3)x^2 + ax + k$ به صورت مقابل است a را بیابید .



۷- نمودار تابع $y = (a - 5)x^2 + (a + 3)x + k$ به صورت مقابل است مجموعه مقادیر

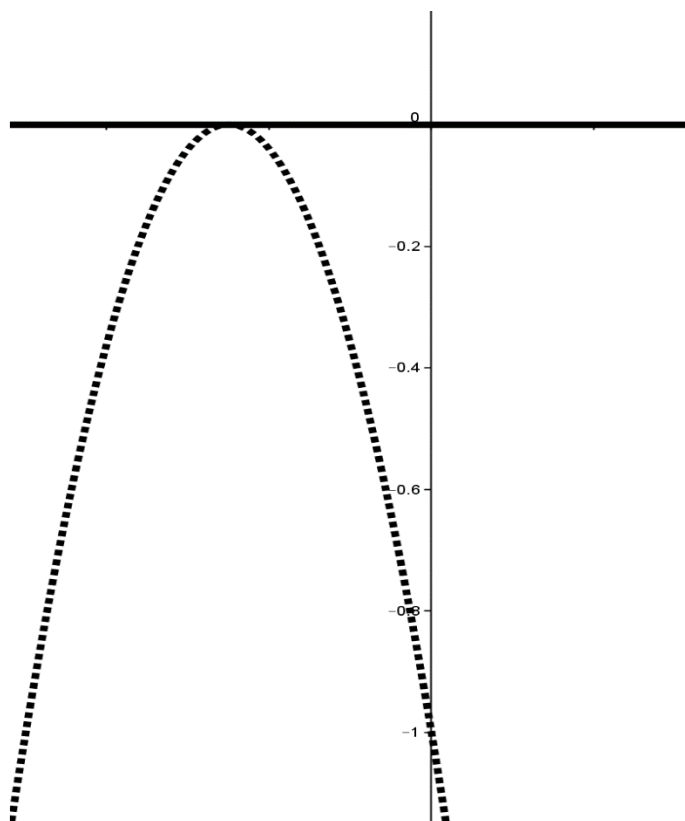
a به چه صورتی است ؟

الف (تهی است

ب) شامل هیچ عدد صحیحی نیست

پ) دو عضوی است

ت) تنها شامل یک عدد صحیح است

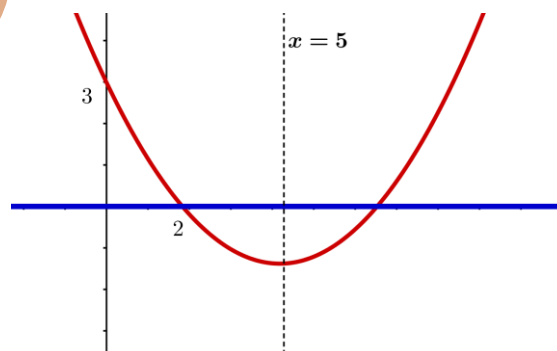


۸) الف) در حالتی که $b = 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ معادله $ax^2 + bx + c = 0$

ب) در حالتی که $b = 0$ و $\frac{c}{a} < 0$ معادله $ax^2 + bx + c = 0$

۹) به ازای چه مقداری از m معادله $mx^2 + (m - 1)x + m - 2 = 0$ یک ریشه صفر دارد ؟

۱۰) معادله سهمی را در حالت زیر بنویسید .

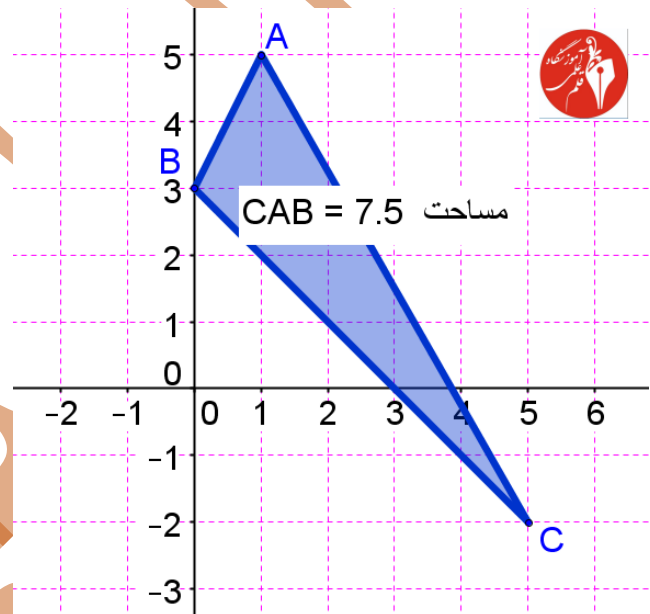


نکته واکنش سریع: اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ سه رأس یک مثلث

باشند، یک راه برای محاسبه مساحت آن مثلث فرمول زیر است :

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

مثال : مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید که در آن $A(1,5)$ و $B(0,3)$ و $C(5,-2)$ است.



س : نسبت به چه نقطه ای ۲ نقطه $(-2,3)$ و $(1,-1)$ قرینه یکدیگرند .

نکته 3 : در هر متوازی الاضلاع مجموع طول های دو رأس مقابل با مجموع طول های دو رأس مقابل دیگر برابر است .

در هر متوازی الاضلاع مجموع عرض های دو رأس مقابل با مجموع عرض های دو رأس مقابل دیگر برابر است .

تمرین : در متوازی الاضلاع $ABCD$ رأس های $A(5,2)$ و $C(1,2)$ مقابل هم هستند اگر رأس $B(6,7)$ باشد مختصات رأس D را بیابید ..

نکته:

اگر یکی از ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

k برابر ریشه دیگرش باشد رابطه زیر برقرار است (کاربرد در حل تست)

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

مثال: یک ریشه معادله $x^2 + 12x + m - 1 = 0$ سه برابر دیگر است مقدار m چند است؟

۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰

تمرین: معادلات زیر را به معادله درجه دوم تبدیل و ریشه هایشان را بیابید.

الف) $(x^2 - x)^2 - 26(x^2 - x) + 120 = 0$

پ) $x + 5\sqrt{x} = -6$ ب) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

س (📖) راکتی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می گیرد که معادله آن به صورت $h(t) = 100t - 5t^2$ ($t \geq 0$) است.

الف) چقدر طول می کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟
ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب راکت به زمین باز می گردد؟

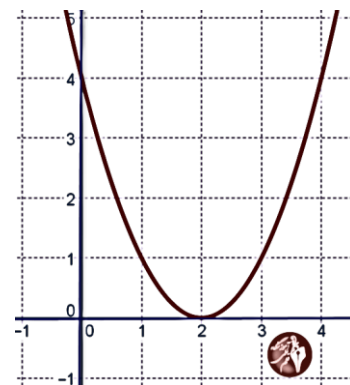
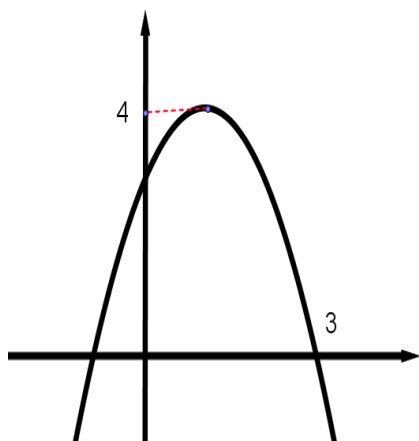
س (📖) استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در نظر بگیرید.

اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری مشخص کنید که:

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

س () معادله سهمی های زیر را بنویسید .

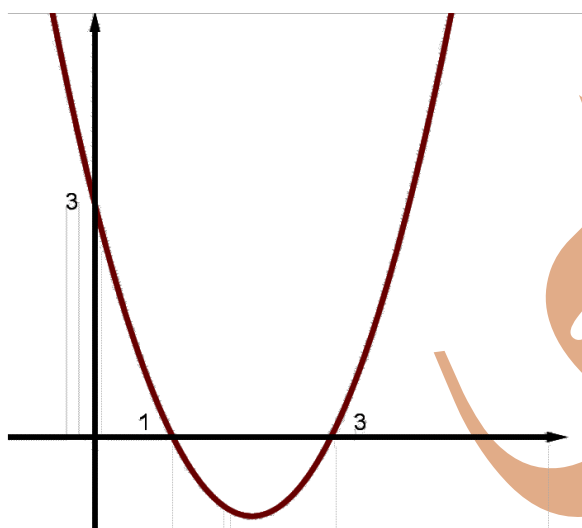


آزمون : دانش آموز گرامی به سوالات زیر در ۴۰ دقیقه پاسخ دهید :

شامل ۸ سوال تشریحی و ۸ سوال تستی

س (۱) معادله مقابل را حل کنید $8x^6 + 1 = 9x^3$

س (۲) معادله سهمی مقابل را بنویسید :



س (۳) صفرهای تابع $y = \frac{-1}{40}x^2 + x$ را بیابید .

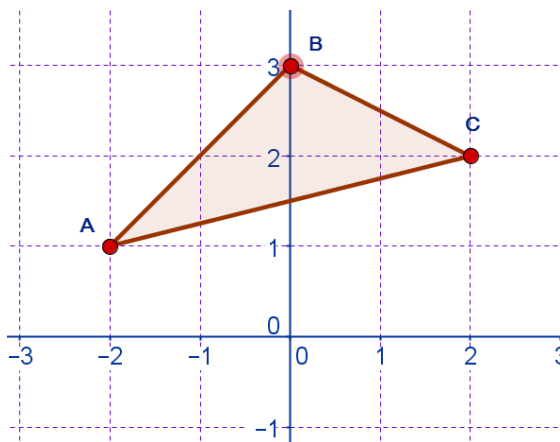
س (۴) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $4 - 2\sqrt{3}$ و $(1 + \sqrt{3})^2$ باشند .

س (۵) اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $3x^2 + 2x - 2 = 0$ باشند حاصل $\alpha\beta^4 + \beta\alpha^4$

چند می شود ؟

س (۶) قرینه نقطه $A = (2, 1)$ نسبت به نقطه $B = (1, 2)$ چه نقطه ای است ؟

س ۷) اگر یک ضلع مربعی بر خط $3x + 4y - 2 = 0$ واقع باشد و $A = (2,1)$ رأسی از این مربع باشد



طول قطر مربع چند است ؟

س ۸) الف) مساحت و محیط مثلث ABC را بنویسید

ب) طول و معادله میانه وارد بر ضلع AC را بیابید

بخش سوالات تستی را در صفحه بعد ببینید

معادله گویا معادله ای است که در طرفین آن حداقل یک عبارت گویا (عبارتی کسری که صورت و مخرج آن یک جمله ای یا چند جمله ای باشند) بکار رفته باشد .

مثال : $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 1$

برای حل یک معادله گویا می توان دو طرف تساوی را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها (پس از تجزیه آنها) ضرب

و مخرج ها را حذف کرد تا معادله به یک معادله ساده تبدیل شود پس از حل معادله جدید جواب های معادله را درمخرج

کسر ها جایگذاری می کنیم هر جوابی که مخرج کسر ها را صفر نکند قبول است .

مثال : معادله $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{6x}{x^2-1}$ را حل کنید

حل : طرفین معادله را در $x^2 - 1$ که کوچکترین مضرب مشترک همه مخرج هاست ضرب می کنیم

$$(x-1)(x+1)\frac{1}{x+1} + (x-1)(x+1)\frac{2}{x-1} = (x-1)(x+1)\frac{6x}{x^2-1}$$

$$x - 1 + 2x + 2 = 6x$$

$3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ که چون هیچ کدام از مخرج ها را صفر نمی کند قابل قبول است.

مثال ۲: معادلهٔ مقابل را حل کنید:
$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

حل: ابتدا مخرج ها را تجزیه می کنیم
$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x(x-1)}$$

حالا طرفین معادله را در ک م م مخرج ها یعنی $x(x-1)(x+1)$ ضرب می کنیم و با مخرج کسرها ساده می کنیم در نتیجه $x(2x) + 2x(x-1) = (2-x)(x+1)$

آن را ساده می کنیم:
$$2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x + 2 - x^2 - x$$

$$5x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

که از میان آنها چون $x = 1$ مخرج کسر دوم و سوم را صفر می کند قابل قبول نیست.

تمرین ۱: معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

تمرین ۲:

جواب های معادله $\frac{x}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$ را به دست آورید.

ت - اتومبیلی مسیری به طول ۱۰۰ کیلومتر را با سرعت ثابتی حرکت می‌کند. اگر در مسیر برگشت $20 \frac{km}{h}$ به سرعتش اضافه کند، زمان رفت و برگشت ۲ ساعت و ربع طول می‌کشد، سرعت اتومبیل در مسیر رفت چقدر بوده است؟

۸۰ ۱۰۰ ۱۱۰ ۹۰۰

دانیم که $t = \frac{x}{v}$ اتومبیل مسیر رفت را با سرعت ثابت v و مسیر برگشت را با سرعت $v + 20$ طی می‌کند و مجموع این دو مسیر

$$t_1 + t_2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{100}{v} + \frac{100}{v+20} = \frac{9}{4}$$

۹/۴ ساعت طول می‌کشد، پس می‌توان نوشت:

tst - به ازای کدام مقدار m ، معادله $\frac{-1}{x} + \frac{m+1}{x^2-x} = 1$ ریشه مضاعف دارد؟

هیچ مقدار m

صفر

۲

-۲

مسئله : خط ۱ متروی مسجد سلیمان به طول ۲۰ کیلومتر از بی بیان به نفتک می باشد .

قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت بدون توقف در ایستگاه ها

طی می کند . اگر در مسیر جنوب به شمال ، از سرعت متوسط قطار $10 \frac{km}{h}$ کاسته شود ، زمان بازگشت

نیم ساعت طولانی تر از زمان رفت خواهد شد . مطلوب است ، محاسبه طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار .

حل : زمان رفت $\frac{60}{v}$ زمان برگشت $\frac{60}{v-10}$ زمان برگشت نیم ساعت از زمان رفت طولانی تر است .

$$\frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2}$$

مساله : دو کارگر ماهر به نام های A و B می توانند کاری را انجام دهند اگر کارگر A ده روز زودتر از کارگر

B بتواند کار را انجام دهد در صورتی که هر دو با هم کار را انجام دهند ۳۰ روز طول می کشد

هر کدام به تنهایی چند روزه کار را انجام می دهند؟

س ۱) معادلات زیر را حل کنید . آیا تمام جواب های به دست آمده مورد قبول هستند ؟

$$\text{الف) } \frac{3}{x^2} - 12 = 0 \quad \text{ب) } \frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$$

$$\text{پ) } \frac{3}{b} - \frac{2}{b-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

س ۲: دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود.

او از هفته ی ششم به بعد در تمام آزمون ها امتیاز ۹ را کسب کرد. به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون هایش برابر ۸ شد. حساب کنید که از هفته ی ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره ی ۹ گرفته است؟

حل :

گیریم که آرمان در بعد از هفته ی پنجم در n آزمون شرکت کرده باشد. پس تعداد کل آزمون های آرمان برابر $5 + n$ می شود. از طرفی کل امتیاز های کسب شده توسط او برابر $9n + 36$ خواهد شد. لذا میانگین

کل امتیاز های آرمان می شود، $\frac{9n + 36}{5 + n}$ که طبق مسئله برابر ۸ است. پس داریم.

$$\frac{9n + 36}{5 + n} = 8 \rightarrow 9n + 36 = 40 + 8n \rightarrow n = 4$$

یعنی آرمان بعد از هفته ی پنجم فقط در ۴ آزمون شرکت کرده است.

س ۳: اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند، می توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟

حل: فرض کنیم ماشین سریعتر A و دیگری B باشد. اگر زمان انجام کار توسط ماشین A برابر t باشد، زمان انجام کار توسط ماشین B مساوی $2t$ است. با توجه به صورت مسئله می توان نوشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 4t} 4 + 2 = t \rightarrow t = 6$$

$$\rightarrow t = 6$$

زمان مورد نیاز برای ماشین A برای کار به تنهایی

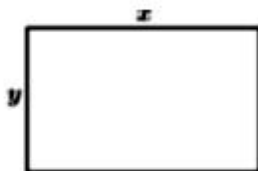
$$\rightarrow 2t = 2(6) = 12$$

زمان مورد نیاز برای ماشین B برای کار به تنهایی

س ۴: علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله‌ی ادبی ۱۶ صفحه‌ای را منتشر می کند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می انجامد. حساب کنید که اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت نیاز دارد؟

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{120} = \frac{1}{80} \xrightarrow{\times 240r} 240 + 2r = 3r \rightarrow r = 240 \text{ min}$$

حل:



۶ : مستطیل طلایی ، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند، می توان نوشت:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می گویند.

حال اگر عرض مستطیل را برابر یک در نظر بگیریم، واضح است که مقدار x همان نسبت طلایی است. برای محاسبه ی مقدار x کافی است که معادله ی زیر را حل کنیم.

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \rightarrow x^2 = x+1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=5} \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

واضح است که جواب منفی قابل قبول است. عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ که مقدار تقریبی آن $1/618$ است به عدد طلایی معروف است که از دوران باستان مورد توجه بوده است.

معادلات رادیکالی :

معادلاتی که در آنها عبارات رادیکالی (با فرجه ۲) مجهول دار وجود دارد را معادلات شامل عبارات گنگ می گویند .

برای حل یک معادله رادیکالی می توان با جابجایی جملات کاری کرد که یک

عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد . سپس طرفین معادله را به توان ۲ می رسانیم و طرفین را ساده می کنیم (در صورت نیاز عمل توان رسانی را تکرار می کنیم) تا معادله به یک معادله درجه ۱ یا درجه ۲ ساده تبدیل شود .

بعد از حل این معادله جواب های حاصل را در معادله اولیه امتحان می کنیم

در صورتی که تساوی عددی برقرار بود جواب قابل قبول است .

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$1 + \sqrt{x+2} = x - 3$$

حل:

$$1 + \sqrt{x+2} = x - 3 \rightarrow \sqrt{x+2} = x - 4 \rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (x-4)^2$$

$$\rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16$$

$$\rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \rightarrow (x-7)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=2 \end{cases}$$

مثال ۲: معادلات مقابل را حل کنید.

الف) $2\sqrt{2t-1} - t = 1$

ب) $2x = 1 - \sqrt{2-x}$

ث) $\sqrt{x+7} = \sqrt{x+2} + 1$

ت) $2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$



تمرین ۱: بدون حل معادله زیر نشان دهید چرا فاقد ریشه حقیقی است؟

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-2} + 3 = 0$$

تمرین ۲: معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۲ یکی از ریشه‌های آن باشد.

تمرین ۳: معادله های رادیکالی زیر را حل کنید .

الف) $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

تمرین ۴: نقاطی از خط $y = x - 2$ را بیابید که از نقطه $(3, -1)$ فاصله اشان برابر ۳ سانتی متر باشد .

تمرین ۵: وقتی که سینا متولد شد پدرش سی سال داشت الان سن سینا جذر سن پدرش است .

الان پدر سینا چند ساله است ؟

حل مثال های بیشتر :

س : اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از

سطح زمین قرار خواهد داشت. اگر $t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$ ، حساب کنید که این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه

ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار می گیرد.

حل :

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{t=2} 2 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \rightarrow 4 = 10 - \frac{h}{5} \rightarrow -6 = -\frac{h}{5} \rightarrow h = 30 \text{ m}$$

مثال : معادله ی زیر را حل کنید.

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x^2 - 2x} = \frac{x-4}{x-2}$$

حل: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} A = x \\ B = x^2 - 2x = x(x-2) \xrightarrow{\text{ک م ک}} x(x-2) \\ C = x-2 \end{cases}$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x^2 - 2x} = \frac{x-4}{x-2} \xrightarrow{\times x(x-2)} \frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$$

$$\rightarrow 5(x-2) - 4 = x(x-4) \rightarrow 5x - 10 - 4 = x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\rightarrow (x-7)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

تمرین ۱ : عددی صحیح بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد . مسئله چند جواب دارد /

تمرین ۲ : عددی بیابید که جمع آن با جذرش مساوی ۱۲ شود .

تست تالیفی : اگر t جواب منفی معادله زیر باشد حاصل $-12t + 8$ چند برابر ریشه دیگر است ؟

$$\frac{1}{x} + \frac{x-4}{x-1} = \frac{x+4}{x^2-x}$$

الف (۱) ب (۲) پ (۳) ت (۴)

تست- معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x-2}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)