

آزمون حضوری
شماره شش



رشته ریاضی
پایه یازدهم

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

این مرورنامه، ویژه مباحث جدید آزمون است. مرورنامه مباحثی که در آزمون‌های قبل به آن‌ها پرداخته شده، در پنل کاربری شما قابل دریافت است و در این فایل از تکرار آن پرهیز شده است.

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
حسابان	فصل ۵ صفحه ۱۱۲ تا ۱۵۱	۲	۹	علی شهرابی	محسن فراهانی



همسایگی

۱ انواع همسایگی:

انواع همسایگی	نمایش روی محور	تعریف برحسب x_0	مثال برای $x_0 = 1$
همسایگی		x_0 باید داخل بازه باشد. $x_0 \in (a, b)$	$(-2, 2)$
همسایگی راست		x_0 باید ابتدای بازه باشد. (x_0, b)	$(1, 2)$
همسایگی چپ		x_0 باید انتهای بازه باشد. (a, x_0)	$(-1, 1)$
همسایگی محذوف		x_0 از داخل بازه حذف می‌شود. $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ یا $(a, b) - \{x_0\}$	$(0, 3) - \{1\}$ یا $(0, 1) \cup (1, 3)$

۲ اگر بازه (a, b) یک همسایگی برای x_0 باشد، باید $a < x_0 < b$ باشد. اگر لازم شد، باید دو نامعادله $a < x_0$ و $x_0 < b$ را حل کنیم و

بین جواب‌هایشان اشتراک بگیریم.

حد و پیوستگی

مقدمات حد

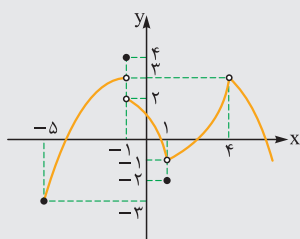
تعریف حد:

نوع حد	نماد ریاضی	تعریف	روی نمودار
حد راست	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$	اگر x با مقادیر بیشتر از a (از سمت راست) به a نزدیک شود، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شوند. کاری با خود نقطه a و سمت چپش نداریم.	
حد چپ	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	اگر x با مقادیر کم‌تر از a (از سمت چپ) به a نزدیک شود، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شوند. کاری با خود نقطه a و سمت راستش نداریم.	
حد	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	اگر حد راست و چپ در $x = a$ هر دو برابر با L باشند، در $x = a$ حد داریم. کاری با خود نقطه a نداریم.	

برای آن که تابع f در $x = a$ حد داشته باشد (و مقدار حدش L باشد)، باید هر دو شرط زیر را داشته باشد:

۱	در $x = a$ همسایگی راست و چپ داشته باشد.
۲	حد راست و چپ در $x = a$ برابر L باشد.

مثال ۱ با توجه به نمودار زیر داریم:



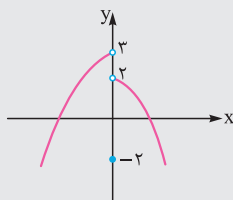
طول نقطه	حد راست	حد چپ	حد	مقدار
$x = -5$	-3	ندارد.	ندارد.	-3
$x = -1$	2	3	ندارد.	4
$x = 1$	-1	-1	-1	-2
$x = 4$	3	3	3	تعریف نشده

چندتا میل کردن خاص!

اگر ...	آن گاه ...
$x \rightarrow 0$	$ x \rightarrow 0^+$
$x \rightarrow a$	$ x - a \rightarrow 0^+$
$\sin x \rightarrow 1$	$1 - \sin x \rightarrow 0^+$
$\cos x \rightarrow 1$	$1 - \cos x \rightarrow 0^+$



مثال ۲ اگر نمودار $y = f(x)$ به شکل زیر باشد، آن گاه:

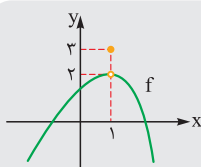


$$۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(1 - \sin x) \stackrel{\text{معادل با}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x^2) \stackrel{\text{معادل با}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$$

۴ حد توابع ساخته شده از روی f : فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد، در این صورت:

تابع	حاصل حد
۱ $ f $	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L $
۲ f^{-1}	$\lim_{x \rightarrow L} f^{-1}(x) = a$
۳ $[f]$	$L \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [L]$
	$L \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = \begin{cases} L-1 & \text{با } \max \\ L & \text{با } \min \end{cases}$
	$L \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$ موجود نیست.
۴ $f(g(x))$	مرحله ۱: حد تابع داخلی را وقتی $x \rightarrow a$ حساب می کنیم، مثلاً L می شود (مهم است که L^+ می شود یا L^-).
	مرحله ۲: حد تابع بیرونی را وقتی $x \rightarrow L^?$ می رود حساب می کنیم.



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x) = 1$$

مثال ۳

$$۱ \text{ حالت: } \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \sqrt{x} = \sqrt{5} \approx 2.23 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} [\sqrt{x}] = [\sqrt{5}] = 2$$

$$۲ \text{ حالت: } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = 2 \xrightarrow{\substack{\text{برای سهمی } x=1 \\ \text{نقطه } \min \text{ است.}}} \lim_{x \rightarrow 1} [x^2 - 2x + 3] = 2$$

$$۳ \text{ حالت: } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 3 \xrightarrow{\substack{\text{برای سهمی } x=2 \\ \text{نقطه } \min \text{ یا } \max \text{ نیست.}}} \lim_{x \rightarrow 2} [x^2 - 2x + 3] \text{ موجود نیست.}$$

مثال ۴

مثال ۵ اگر $f(x) = \sin x - 1$ و $g(x) = [x]$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} g(f(x))$ چه قدر است؟

$$۱ \text{ مرحله: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = 1^- - 1 = 0^-$$

$$۲ \text{ مرحله: } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = [0^-] = -1$$

پاسخ



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

۵ حد توابع زیر در هر نقطه از دامنه‌شان برابر با مقدار تابع در آن نقطه است.

$\cos x$	$\sin x$	گویا	چندجمله‌ای
a^x (نمایی)	$\log_a x$	$\cot x$	$\tan x$

۶ چه وقت‌هایی برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ، باید حد راست و چپ را چک کنیم؟

نقاط مهم	مثال	بررسی حد وقتی $x \rightarrow 1$
چندضابطه‌ای	$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 1 \\ 2x - 3 & x < 1 \end{cases}$	حد ندارد. $\Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{حد راست: } 1^2 + 2 = 3 \\ \text{حد چپ: } 2(1) - 3 = -1 \end{aligned} \right\}$
قدرمطلق	$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{ x - 1 }$	حد ندارد. $\Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{حد راست: } \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4 \\ \text{حد چپ: } \frac{(x-1)(x+3)}{-(x-1)} = -4 \end{aligned} \right\}$
براکتی	$f(x) = [2x] - [x]$	$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{حد راست: } [2^+] - [1^+] = 2 - 1 = 1 \\ \text{حد چپ: } [2^-] - [1^-] = 1 - 0 = 1 \end{aligned} \right\}$ حد = 1

۷ دوتا حد مهم:

ضابطه تابع	نکته مهم	مثال
$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{Z} \\ h(x) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	حدش در تمام نقاط از ضابطه مربوط به $x \notin \mathbb{Z}$ حساب می‌شود.	$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Z} \\ x^2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2^2 = 4$
$f(x) = [g(x)] + [-g(x)]$	حدش در تمام نقاط برابر با -۱ است.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} ([\sin 2x] + [-\sin 2x]) = -1$

۸ فرق $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$ و $[\lim_{x \rightarrow a} f(x)]$: فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد، آن وقت:

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$	مهم است که حاصل حد بالا L^+ شده یا L^- . هر کدام بود، از آن براکت می‌گیریم.
مثال	$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x] = [1^-] = 0$
$[\lim_{x \rightarrow a} f(x)]$	خود L مهم است (کاری نداریم L^+ است یا L^-). حاصل حد $[L]$ می‌شود.
مثال	$[\lim_{x \rightarrow 0} \cos x] = [1] = 1$



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

۹ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد، آن گاه:

تابع	$kf(x)$	f^n	\sqrt{f}	$\frac{1}{f}$	$ f $
حد در $x = a$	$k.L$	L^n	$\sqrt{L}, (L > 0)$	$\frac{1}{L}, (L \neq 0)$	$ L $

۱۰ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آن گاه:

تابع	$f \pm g$	$f \times g$	$\frac{f}{g}$
حد در $x = a$	$L_1 \pm L_2$	$L_1 \times L_2$	$\frac{L_1}{L_2}, (L_2 \neq 0)$

۱۱ بررسی حد داشتن یا نداشتن توابع $f \pm g$ در حالات مختلف (حد دارد: ✓ حد ندارد: ✗):

f	g	$f \pm g$	$f \times g$	$\frac{f}{g}$
✓	✓	✓	✓	✓ (به شرطی که حاصل حد مخرج مخالف صفر باشد.)
✓	✗	✗	نامعلوم*	نامعلوم*
✗	✓	✗	نامعلوم*	✗
✗	✗	نامعلوم	نامعلوم	نامعلوم

تذکر در ۳ حالت «نامعلوم*»، اگر تابعی که حد دارد، حدش صفر باشد باید وضعیت تابع را بررسی کنیم، ولی اگر حدش صفر نباشد، قطعاً حد نداریم.

رفع ابهام «صفر/صفر»

۱ روش‌های حل حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وقتی $x \rightarrow a$:

روش حل	چه جوری حل می‌کنیم؟	مثال
به کمک تجزیه	باید در صورت و مخرج عامل $x - a$ را پیدا کنیم.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{4}{-1} = -4$
گویا کردن با اتحاد مزدوج	صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب می‌کنیم.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1}-3}{2x-4} \times \frac{\sqrt{5x-1}+3}{\sqrt{5x-1}+3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x-1-9}{6(2x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x-2)}{12(x-2)} = \frac{5}{12}$
گویا کردن با اتحاد چاق و لاغر	صورت و مخرج را در چاق عبارت رادیکالی ضرب می‌کنیم.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x-5} \times \frac{\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt[3]{x+3}+4}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt[3]{x+3}+4} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3-8}{12(x-5)} = \frac{1}{12}$



مرورنامه آزمون آزمایشی خیالی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

وقتی $u \rightarrow 0$ ، می‌توانیم جای $\sin u$ از u استفاده کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

مثال ۱ برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ ، جای $\sin 3x$ می‌نویسیم $3x$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

مثال ۲ برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$ ، جای $\sin(x-2)$ می‌نویسیم $(x-2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = [1^-] = 0$$

مثال ۳ اگر $\frac{\sin u}{u}$ داخل براکت رفت، باید جایش 1^- بنویسید، پس:

مثال ۴ اگر $u \rightarrow 0$ ، می‌توانیم جای $(1+u)^n$ از $1+nu$ استفاده کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^3 - 1}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(1+2x)^3}^{1+3(2x)} - 1}{\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{2}}}_{1+\frac{1}{2}x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+6x-1}{1+\frac{x}{2}-1} = \frac{6x}{\frac{x}{2}} = 12$$

مثال ۳

- پیوستگی -

۱ انواع پیوستگی:

نوع پیوستگی	تعریف	نموداری
پیوستگی راست	مقدار = حد راست	
پیوستگی چپ	مقدار = حد چپ	
پیوستگی	مقدار = حد چپ = حد راست	

۲ پیدا کردن مجهول در توابع پیوسته:

فرم تابع	برای پیوستگی f در $x = a$ چه می‌کنیم؟	شرط پیوستگی در نقطه مرزی دامنه
$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ k & x = a \end{cases}$	حد چپ و راست را از g می‌گیریم؛ مقدارش هم k است.	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$
$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq a \\ h(x) & x < a \end{cases}$	حد راست و مقدارش را از g و حد چپ را از h می‌گیریم.	$g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x)$
$f(x) = \begin{cases} g(x) & x > a \\ k & x = a \\ h(x) & x < a \end{cases}$	حد راست را از g و حد چپ را از h می‌گیریم؛ مقدارش هم k است.	$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = k$



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

۳) توابع پیوسته روی \mathbb{R} :

\sqrt{x} فرد	$ x $	$\cos x$	$\sin x$
----------------	-------	----------	----------

۴) توابع پیوسته روی دامنه:

تابع	فرم ضابطه	نقاط پیوستگی (دامنه)	مثال
کسری	$\frac{A}{u}$	$\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$	$\frac{x+1}{x^2-4} \xrightarrow{\text{نقاط پیوستگی}} \mathbb{R} - \{\pm 2\}$
لگاریتمی	$\log_b u$	$u > 0$	$\log_7(x-3) \Rightarrow (3, +\infty)$
تانژانت	$\tan u$	$u \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\tan \frac{\pi x}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq 2k+1$
کتانژانت	$\cot u$	$u \neq k\pi$	$\cot \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} \neq k\pi \Rightarrow x \neq 2k\pi$
رادیکالی با فرجه زوج	$\sqrt[2]{u}$	$u > 0$	$\sqrt{x-4} \Rightarrow (4, +\infty)$

۵) نقاط ناپیوستگی توابع براکتی:

$\{u \in \mathbb{Z} \mid x \text{ هایی که به ازای آن‌ها } u \in \mathbb{Z}\} - \{u \mid \text{نقاط ناپیوستگی } [u]\}$

مثال

$\{x \mid \text{نقطه } \min x^2 \text{ سهمی } y = x^2 \text{ است}\} = \{0, \pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{3}\} - \{0\} = \{\pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{3}\}$
در بازه $(-2, 2)$

۶) پیوستگی روی بازه:

بازه	شرط پیوستگی	شکل
(a, b)	پیوستگی در تمام نقاط بین $x = a$ تا $x = b$	
$[a, b)$	۱) پیوستگی در بازه (a, b) ۲) پیوستگی راست در $x = a$	
$(a, b]$	۱) پیوستگی در بازه (a, b) ۲) پیوستگی چپ در $x = b$	
$[a, b]$	۱) پیوستگی در بازه (a, b) ۲) پیوستگی راست در $x = a$ ۳) پیوستگی چپ در $x = b$	



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

۷ بررسی پیوستگی یا ناپیوستگی توابع $f \pm g$ در حالات مختلف (پیوسته: ✓ ناپیوسته: ✗):

$\frac{f}{g}$	$f \times g$	$f \pm g$	g	f
✓ (به شرطی که حاصل حد مخرج مخالف صفر باشد.)	✓	✓	✓	✓
نامعلوم*	نامعلوم*	✗	✗	✓
✗	نامعلوم*	✗	✓	✗
نامعلوم			✗	✗

تذکر در ۳ حالت «نامعلوم» اگر تابعی که حد دارد، حدش صفر باشد، باید وضعیت تابع را بررسی کنیم، ولی اگر حدش صفر نباشد، قطعاً پیوستگی نداریم.

مرورنامه آزمون حضوری شماره شش

یازدهم ریاضی