آزمون حضوری
شماره پنج

رشته تجربی

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

ویژه کنکور
۱۴۰۳

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضی	ریاضی دوازدهم صفحهٔ ۱۱ تا ۲۹ ریاضی یازدهم صفحهٔ ۱۹ تا ۲۴ و ۵۷ تا ۶۴ ریاضی دهم صفحهٔ ۸۳ تا ۹۳	۲	۱۱	علی شهرابی	مهدی خوشنویس

ترکیب توابع

۱ نکات اولیهٔ fog:

معادل fog(x)	$f(g(x))$
ضابطهٔ fog(x)	جای xهای تابع f، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.
مقدار fog(a)	دو مرحله دارد: اول $g(a)$ (مثلاً می‌شود k)، بعد $f(k)$
دامنهٔ fog	**راه اول:** $D_{fog} = \{\underbrace{x \in D_g}_{\text{شرط (۱)}} \cap \underbrace{g(x) \in D_f}_{\text{شرط (۲)}}\}$
	راه دوم: ضابطهٔ fog را بدون هیچ ساده‌کردنی تشکیل می‌دهیم و سپس دامنهٔ آن را حساب می‌کنیم.
برد fog	مرحلهٔ ۱: برد تابع g را حساب می‌کنیم (مثلاً می‌شود بازهٔ I).
	مرحلهٔ ۲: برد تابع f با دامنهٔ I را حساب می‌کنیم.

۲

دامنهٔ fog زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع داخلی یعنی g است.	$D_{fog} \subseteq D_g$
برد fog زیرمجموعهٔ برد تابع بیرونی یعنی f است.	$R_{fog} \subseteq R_f$

۳ وقتی از بین f، g و fog، ۲تا را داریم و سومی را می‌خواهیم:

f	g	fog	راه حل
✓	✓	؟	باید $f(g(x))$ را تشکیل دهیم.
؟	✓	✓	$g(x)$ را مساوی t قرار می‌دهیم. x را برحسب t حساب می‌کنیم و به جای xهای داخل $fog(x)$، رابطهٔ x برحسب t را قرار می‌دهیم.
✓	؟	✓	در ضابطهٔ f، جای xهایش $g(x)$ قرار می‌دهیم. عبارت به دست آمده را با fog داده‌شده برابر قرار می‌دهیم.

۴ ترکیب f و f^{-1}، همواره تابعی همانی است.

	ضابطه	دامنه	نمودار
حالت ۱	$(fof^{-1})(x)=x$	$D_{f^{-1}}=R_f$	نیمساز ناحیهٔ اول و سوم با دامنهٔ R_f
حالت ۲	$(f^{-1}of)(x)=x$	D_f	نیمساز ناحیهٔ اول و سوم با دامنهٔ D_f

۵ شرط لازم و کافی برای برابربودن fof^{-1} و $f^{-1}of$ آن است که $D_f=R_f$.

تابع یک‌به‌یک

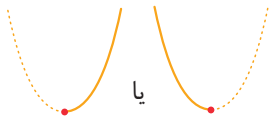
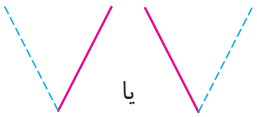
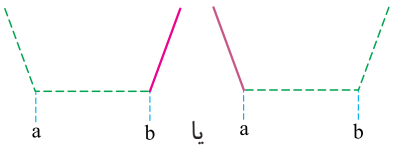
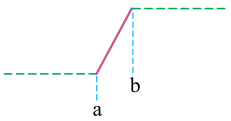
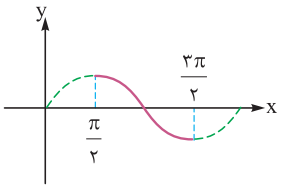
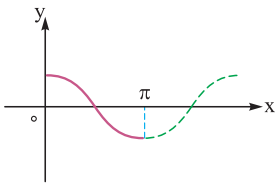
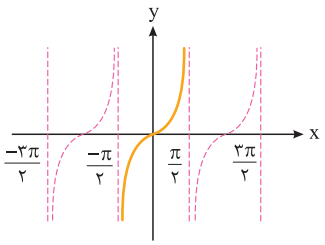
۱ به تابعی که در خروجی‌هایش، عدد تکراری نداریم، یک‌به‌یک می‌گوییم.

نمایش	شرط یک‌به‌یک بودن
زوج مرتبی	مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها باید متفاوت باشند.
جدولی	اعداد سطر دوم جدول باید متفاوت باشند.
پیکانی	به هیچ عددی نباید بیشتر از یک پیکان وارد شود.
نموداری	خطی موازی محور xها نباید نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.
ضابطه‌ای	$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

۲ توابع یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک معروف:

اسم تابع	یک‌به‌یک		غیر یک‌به‌یک	
چندجمله‌ای	خطی با شیب غیرصفر		ثابت	چندجمله‌ای درجه زوج
درجه ۳	$a(x-b)^3+c$	ax^3+bx (a و b هم‌علامت)	ax^3+bx (a و b ناهم‌علامت)	ax^3+bx^2
$\frac{ax+b}{cx+d}$	با شرط $ad-bc\neq 0$ (هموگرافیک می‌شه)		با شرط $ad-bc=0$ (ثابت می‌شه)	
براکتی‌ها	$ax+b[x]$ (a و b هم‌علامت)		$a[x]+b$	$ax-[ax]$
رادیکالی و قدرمطلقی	$\sqrt{ax+b}$		$\lvert ax+b\rvert$	$\lvert x+a\rvert \pm \lvert x+b\rvert$ (گلدانی و سرسره‌ای)
سایر	a^x (نمایی)	$\log_a x$ (لگاریتم)	مثلثاتی‌ها: $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$ و $\cot x$	

۳ یک‌به‌یک کردن توابع غیر یک‌به‌یک با محدودکردن دامنه:

ضابطه	بزرگ‌ترین بازهٔ یک‌به‌یکی	توضیح	نمودار
ax^2+bx+c	$x \le \frac{-b}{2a}$ یا $x \ge \frac{-b}{2a}$	xهای قبل یا بعد از x_S	
$\lvert ax+b\rvert+c$	$x \le \frac{-b}{a}$ یا $x \ge \frac{-b}{a}$	xهای قبل یا بعد از ریشهٔ قدرمطلق	
$\lvert x-a\rvert+\lvert x-b\rvert$ (b>a)	$x \le a$ یا $x \ge b$	xهای قبل از ریشهٔ کوچک‌تر یا بعد از ریشهٔ بزرگ‌تر	
$\lvert x-a\rvert-\lvert x-b\rvert$ (b>a)	$a \le x \le b$	xهای بین ریشه‌ها	
$\sin x$	مثلاً $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$	xهای بین دو min و max متوالی	
$\cos x$	مثلاً $0 \le x \le \pi$	xهای بین دو min و max متوالی	
$\tan x$	مثلاً $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	xهای بین دو خط‌چین عمودی	

۴ رابطهٔ یکنوایی، یک‌به‌یک بودن و پیوستگی:

	رابطه	خلاصهٔ رابطه
۱	هر تابع اکیداً یکنوایی، یک‌به‌یک است.	اکیداً یکنوا ⇐ یک‌به‌یک
۲	هر تابع یک‌به‌یک و پیوسته‌ای، اکیداً یکنواست.	یک‌به‌یک + پیوسته ⇐ اکیداً یکنوا

تابع وارون

۱ نکات اولیهٔ تابع وارون:

۱	اگر نقطهٔ (a,b) روی f باشد، نقطهٔ (b,a) روی f^{-1} است و برعکس.
۲	$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$
۳	$R_{f^{-1}}=D_f$ و $D_{f^{-1}}=R_f$
۴	نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است.
۵	شرط وارون‌پذیری، یک‌به‌یک بودن است.

۲ برای محاسبهٔ $f^{-1}(k)$، بهترین راه این است که معادلهٔ $f(x)=k$ را حل کنیم. جواب این معادله، همان $f^{-1}(k)$ می‌شود؛ مثلاً اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد و ما $f^{-1}(12)$ را بخواهیم، معادلهٔ $x+\sqrt{x}=12$ را حل می‌کنیم که جوابش می‌شود ۹.

۳

ناحیه‌ای که نمودار f در آن است.	۱	۲	۳	۴
ناحیه‌ای که نمودار f^{-1} در آن قرار می‌گیرد.	۱	۴	۳	۲

۴ مراحل به دست آوردن ضابطهٔ وارون:

۱) x را برحسب y می‌نویسیم (باید x تنها شود).

۲) جای x و y را عوض می‌کنیم.

۵ طریقهٔ محاسبهٔ ضابطهٔ وارون توابع مهم:

اسم تابع	ضابطه	ضابطهٔ وارون (یا طریقهٔ محاسبه)	نکات
خطی	$ax+b$	$\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$	توابع خطی $y=x$ و $y=-x+b$، با وارونشان برابرند.
سهمی	$a(x-x_S)^2+y_S$	باید ابتدا مربع کامل کنید.	در دامنه‌های $x \ge x_S$ یا $x \le x_S$ وارون‌پذیر است.
درجه۳	$k(x+a)^3+b$	باید از اتحادهای مکعب ستون بعدی کمک بگیرید.	$(x\pm1)^3=x^3\pm3x^2+3x\pm1$ $(x\pm2)^3=x^3\pm6x^2+12x\pm8$
هموگرافیک	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{-dx+b}{cx-a}$	$a+d=0 \Leftrightarrow f=f^{-1}$

حواستان باشد که دامنهٔ f^{-1}، برد f می‌شود و معمولاً بهترین راه برای محاسبهٔ $D_{f^{-1}}$ (یا همان R_f)، استفاده از نمودار f است.

۶ راه‌های به دست آوردن نقطه (یا نقاط) برخورد f و f^{-1}:

	روش	توضیح روش
۱	ضابطه‌ای	ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم و بعدش معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم.
۲	نموداری	نمودار f را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار f^{-1} به دست آید. تعداد نقاط برخوردشان معلوم می‌شود.
۳	برخورد با نیمساز ربع اول و سوم	اگر f، یک تابع صعودی اکید باشد، جواب‌های معادله $f(x)=x$، طول نقاط برخورد f و f^{-1} است.

نکته

نقاط برخورد f و نیمساز ربع اول و سوم حتماً نقطهٔ برخورد f و f^{-1} است، ولی با توجه به نوع تابع f ممکن است نقاط برخورد f و f^{-1} روی نیمساز ربع اول و سوم نباشد. در واقع داریم:

$$f(x)=x \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x)=f(x) \not\Rightarrow f(x)=x$$

نیمساز اول و سوم

۷ محاسبهٔ $(fog^{-1})(a)$ یا $(f^{-1}og)(a)$ یا $(f^{-1}og^{-1})(a)$:

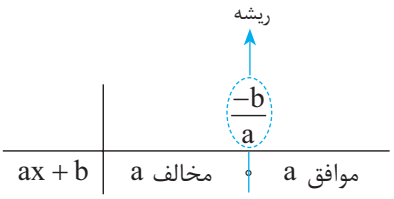
برای محاسبهٔ همهٔ عبارات فوق دو مرحله داریم؛ برای مثال $(f^{-1}og^{-1})(a)$ را توضیح می‌دهیم.

مرحلهٔ ۱: اول باید $g^{-1}(a)$ را حساب کنیم. اگر ضابطهٔ g را داریم، بهترین راه، حل معادلهٔ $g(x)=a$ است.

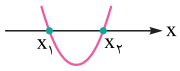
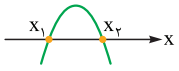
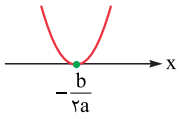
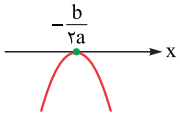
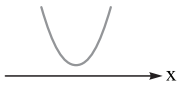
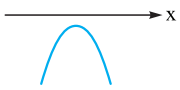
مرحلهٔ ۲: باید $f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(a)}_{\text{جوابش در مرحلهٔ قبل b شده}})$ را حساب کنیم. اگر ضابطهٔ f را داریم، بهترین راه، حل معادلهٔ $f(x)=b$ است.

تعیین علامت

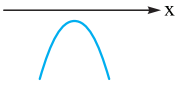
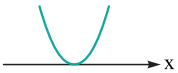
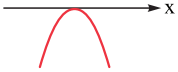
۸ تعیین علامت عبارت درجه‌یک



۹ تعیین علامت عبارت درجه‌دو

علامت دلتا	جدول تعیین علامت	وضعیت نموداری	
		$a>0$	$a<0$
$\Delta>0$	ax^2+bx+c | a موافق | x_1 | a مخالف | x_2 | a موافق		
$\Delta=0$	ax^2+bx+c | a موافق | $x_1=\frac{-b}{2a}$ | a موافق		
$\Delta<0$	ax^2+bx+c | a موافق		

۱۰ چهار حالت خاص و پرتکرار

	سؤال	شروط	وضعیت نموداری
۱	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره مثبت باشد.	۱) $a>0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xها باشد.	۲) $\Delta<0$	
۲	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره منفی باشد.	۱) $a<0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها باشد.	۲) $\Delta<0$	
۳	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره نامنفی باشد.	۱) $a>0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ زیر محور xها نباشد.	۲) $\Delta\le 0$	
۴	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره نامثبت باشد.	۱) $a<0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ بالای محور xها نباشد.	۲) $\Delta\le 0$	

۱۱ جواب نامعادلهٔ درجه‌دوم (در حالت $\Delta > 0$)

علامت a	فرم نامعادله	جواب	توضیح فارسی	مثال با جواب
$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\mathbb{R} - [x_1, x_2]$	نابین ریشه‌ها	$x^2 - 2x - 15 > 0 \Rightarrow x > 5$ یا $x < -3$
	$ax^2 + bx + c < 0$	(x_1, x_2)	بین ریشه‌ها	$x^2 - 2x - 15 < 0 \Rightarrow -3 < x < 5$
$a < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$[x_1, x_2]$	بین ریشه‌ها	$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$
	$ax^2 + bx + c < 0$	$\mathbb{R} - (x_1, x_2)$	نابین ریشه‌ها	$2x - x^2 \leq 0 \Rightarrow x \geq 2$ یا $x \leq 0$

۱۲ جواب‌های نامعادله‌های درجه‌یک و درجه‌دو به فرم‌های زیر می‌تواند باشد:

	فرم نامعادله	مدل‌های ممکن برای جواب
نامعادلهٔ درجه‌یک	$ax + b > 0$ یا $ax + b < 0$	$(\frac{-b}{a}, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{-b}{a})$
	$ax + b \geq 0$ یا $ax + b \leq 0$	$[\frac{-b}{a}, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{-b}{a}]$
نامعادلهٔ درجه‌دو	$ax^2 + bx + c > 0$ یا $ax^2 + bx + c < 0$	$\underbrace{(x_1, x_2)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R}}_{\Delta<0}$ یا $\underbrace{\varnothing}_{\Delta\leq 0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R} - \{x_1\}}_{\Delta=0}$
	$ax^2 + bx + c \geq 0$ یا $ax^2 + bx + c \leq 0$	$\underbrace{[x_1, x_2]}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R}}_{\Delta\leq 0}$ یا $\underbrace{\varnothing}_{\Delta<0}$ یا $\underbrace{\{x_1\}}_{\Delta=0}$

پس اگر جواب نامعادلهٔ $ax^2 + bx + c > 0$ یا $ax^2 + bx + c < 0$ به صورت $(-\infty, k)$ یا به صورت $(k, +\infty)$ شد، عبارت $ax^2 + bx + c$ باید درجه‌یک باشد؛ یعنی ضریب x^2 صفر است $(a = 0)$.

۱۳ مراحل تعیین علامت سریع با یک مثال

فرض کنید می‌خواهیم عبارت $P(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 4)}{x^3 - 9x}$ را تعیین علامت کنیم.

مرحلهٔ ۱	تمام عبارات را تجزیه می‌کنیم.	$P(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)^2}{x(x-3)(x+3)}$
مرحلهٔ ۲	ریشه‌ها و زوج و فردبودن توانشان را معلوم می‌کنیم.	$P(x) = \frac{(x\underset{\downarrow 0}{-1})(x\underset{\downarrow 3}{+1})(x\underset{\downarrow -3}{+2})^{\overset{\text{زوج}}{2}}}{x(x-3)(x+3)}$ (ریشه‌ها: 1، -1، -2)
مرحلهٔ ۳	جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم.	

	-3	-2	-1	0	1	3
$P(x)$	ت ن	۰	۰	ت ن	۰	ت ن

مرحلهٔ ۴	از خانهٔ سمت راست جدول شروع می‌کنیم. علامت P به ازای $x=۴$ را پیدا می‌کنیم.	$P(x)=\dfrac{\overbrace{(x-۱)}^{+}\overbrace{(x+۱)}^{+}\overbrace{(x+۲)^{۲}}^{+}}{\underbrace{x}_{+}\underbrace{(x-۳)}_{+}\underbrace{(x+۳)}_{+}} \Rightarrow P(۴)>۰$
مرحلهٔ ۵	پس خانهٔ سمت راست، + است. از آن‌جا به سمت چپ حرکت می‌کنیم و یکی‌درمیان علامت‌ها را عوض می‌کنیم. فقط وقتی از $\underbrace{x=-۲}_{\text{(توان زوج)}}$ رد می‌شویم، علامت عوض نمی‌شود.	$\begin{array}{c\|ccccccccccccc} & & -۳ & & -۲ & & -۱ & & ۰ & & ۱ & & ۳ & \\ \hline P(x) & \ominus & \text{ت ن} & \oplus & \circ & \oplus & \circ & \ominus & \text{ت ن} & \oplus & \circ & \ominus & \text{ت ن} & + \end{array}$ عوض نشد!

۱۴ نامعادلات سادهٔ قدرمطلقی

	$a>۰$	$a=۰$	$a<۰$
$\|u\|\geq a$	$u\geq a$ یا $u\leq -a$	$u\in\mathbb{R}$	$u\in\mathbb{R}$
$\|u\|\leq a$	$-a\leq u\leq a$	$u=۰$	$\varnothing$
$\|u\|>a$	$u>a$ یا $u<-a$	$\mathbb{R}-\{u=۰\}$	$u\in\mathbb{R}$
$\|u\|<a$	$-a<u<a$	$\varnothing$	$\varnothing$

معادلات گویا و رادیکالی

۱ بعد از حل معادلهٔ گویا، حتماً چک کنید که جواب‌های به دست آمده، ریشه‌های مخرج نباشند.

۲ اگر شخص اول کاری را به تنهایی در A ساعت، شخص دوم همان کار را در B ساعت و هر دو با هم در C ساعت انجام دهند، رابطهٔ روبه‌رو بین A، B و C برقرار است:

$$\underset{\text{زمان نفر اول}}{\frac{1}{A}} + \underset{\text{زمان نفر دوم}}{\frac{1}{B}} = \underset{\text{زمان هر دو نفر با هم}}{\frac{1}{C}}$$

۳ اگر وسیله‌ای مسیری به طول x را با سرعت v_1 برود و با سرعت v_2 برگردد، با توجه به رابطهٔ $t = \frac{x}{v}$، داریم:

$$t_{\text{رفت}} \pm t_{\text{برگشت}} = \underset{\text{سؤال می‌ده}}{\text{یه عدد}} \Rightarrow \frac{x_{\text{ر}}}{v_{\text{ر}}} \pm \frac{x_{\text{ب}}}{v_{\text{ب}}} = \text{یه عدد}$$

۴ در نسبت طلایی با طول L و عرض W داریم:

$$\frac{L}{W} = \frac{L+W}{L} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

۵ اگر محلولی به جرم m کیلوگرم و حل‌شونده‌ای به جرم M کیلوگرم داشته باشیم، طبق رابطهٔ $\text{غلظت} = \frac{M}{m}$، داریم:

۱) اضافه‌کردن X کیلوگرم از حل‌شونده:

$$\text{غلظت جدید} = \frac{M+X}{m+X}$$

۲) اضافه‌کردن X کیلوگرم از حلّال:

$$\text{غلظت جدید} = \frac{M}{m+X}$$

۶ اگر قیمت کالایی بعد از تخفیف X تومان کم شود و خریدار بتواند Y عدد بیشتر از آن بخرد، طبق رابطهٔ $\text{تعداد} = \frac{\text{پول خریدار}}{\text{قیمت کالا}}$، داریم:

$$\text{تعداد جدید} = \frac{\text{پول خریدار}}{\text{قیمت جدید}} = \text{تعداد اولیه} + Y \Rightarrow \frac{\text{پول خریدار}}{\text{قیمت جدید} - X} = \frac{\text{پول خریدار}}{\text{تعداد جدید}} + Y$$

۷ برای حل معادلات رادیکالی، دو طرف معادله را به توان می‌رسانیم و در بعضی از موارد، این کار را تکرار می‌کنیم و در نهایت به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

برای معادلات به فرم $A + \frac{1}{A} = t$ داریم:

		بُرد	حالت خاص
۱	$A + \frac{1}{A} (A > 0)$	$A + \frac{1}{A} \geq 2$ ⇐ پس اگر $t < 2$ بود، جواب ندارد.	$A + \frac{1}{A} = 2 \Leftrightarrow A = 1$
۲	$A + \frac{1}{A} (A < 0)$	$A + \frac{1}{A} \leq (-2)$ ⇐ پس اگر $t > (-2)$ بود، جواب ندارد.	$A + \frac{1}{A} = (-2) \Leftrightarrow A = (-1)$

۸ بعد از حل معادلهٔ رادیکالی، جواب‌های به دست آمده را در معادلهٔ اولیه چک کنید.

۹ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ (با شرط $a \neq 0$) با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۲	حالت (۱) دو ریشهٔ مثبت	$\Delta>0, S>0, P>0$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر	$c=0, \frac{-b}{a}>0$
۱	حالت (۱) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P<0$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta=0, \frac{-b}{a}>0$
	حالت (۳) یک ریشهٔ صفر	$b=c=0$
بدون جواب	حالت (۱) هر دو ریشه منفی	$\Delta>0, S<0, P>0$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta=0, \frac{-b}{a}<0$
	حالت (۳) فاقد ریشه	$\Delta<0$

۱۰ اگر جمع چند رادیکال صفر شده، عبارت داخل تک‌تک آن‌ها صفر است:

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=0 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ , \\ B=0 \end{cases}$$

۱۱ بعضی از معادلات گنگ نیاز به حل ندارند.

مثلاً $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}=x$، چون دامنه‌ها به ترتیب $x\geq 3$ و $x\leq 1$ است که اشتراکشان تهی می‌شود.