آزمون حضوری
شماره شش

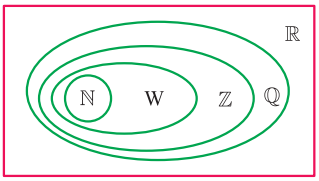
خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

رشتهٔ تجربی
پایهٔ دوازدهم

# مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

| نام درس | مباحث | از صفحه | تا صفحه | مؤلف | ویراستار |
|---|---|---|---|---|---|
| ریاضی | ریاضی دوازدهم، فصل ۲<br>صفحهٔ ۳۱ تا ۴۸<br>ریاضی یازدهم، فصل ۴<br>صفحهٔ ۷۱ تا ۹۴<br>ریاضی دهم، فصل ۲<br>صفحهٔ ۱ تا ۴۶ | ۲ | ؟؟؟ | علی شهرابی | مهدی خوشنویس |

۱ در مجموعهٔ اعداد داریم:



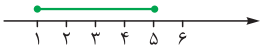
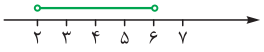
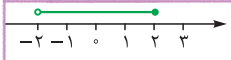
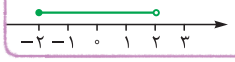

اعداد حقیقی — اعداد گویا — اعداد صحیح — اعداد حسابی — اعداد طبیعی

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

اعداد گنگ

۲

| نوع بازه | تعریف | نمادگذاری | |
|---|---|---|---|
| بسته | شامل نقاط ابتدایی و انتهایی بازه می‌شود. | $[a,b]$ |  $[۱,۵]$ |
| باز | هر دو نقطهٔ ابتدایی و انتهایی در آن نیستند. | $(a,b)$ |  $(۲,۶)$ |
| نیم‌باز | شامل فقط یکی از نقاط ابتدایی و انتهایی است. | $(a,b]$ یا $[a,b)$ |  $(-۲,۲]$ یا  $[-۲,۲)$ |

**نکته**

برای $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) از نمایش باز استفاده می‌کنیم، مثلاً:

برای $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت): $[-۱,+\infty)$ یا $(-۱,+\infty)$

برای $-\infty$ (منفی بی‌نهایت): $(-\infty,۱]$ یا $(-\infty,۱)$

۳ به مجموعه‌ای مانند $A$ که تعداد اعضای آن «عدد حسابی» باشد، مجموعهٔ «متناهی» می گوییم؛ در غیر این‌صورت به این مجموعه، مجموعهٔ «نامتناهی» می‌گوییم؛ مثلاً: مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج کوچک‌تر از ۲۰ یعنی $\{۲,۴,۶,...,۱۸\}$ یک مجموعهٔ متناهی است که ۹ عضو دارد و مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد یعنی $\{۱,۳,۵,۷,...\}$ یک مجموعهٔ نامتناهی است.

۴ **مجموعهٔ مرجع**: مجموعه‌ای که همهٔ مجموعه‌ها، زیرمجموعهٔ آن هستند را مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با نماد $U$ نشان می‌دهیم.

۵ اگر $U$ مجموعهٔ مرجع و مجموعهٔ $A$ زیرمجموعهٔ آن باشد، $U-A$ را متمم $A$ می‌نامیم و آن را با $A'$ نشان می‌دهیم. در واقع مجموعهٔ $A'$ شامل عضوهایی از $U$ است که در $A$ نیستند. متمم‌های معروف عبارت‌اند از:

۱) $\varnothing' = U$

۲) $U' = \varnothing$

۳) $(A')' = A$

۴) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

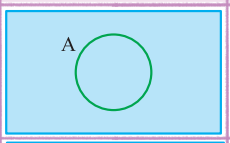
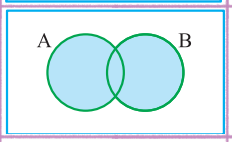
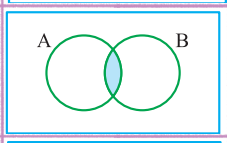
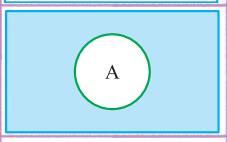
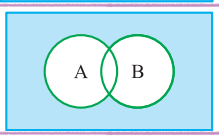
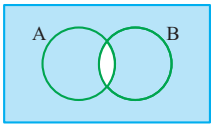
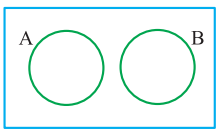
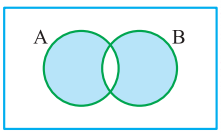
۵) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۶ به دو مجموعهٔ $A$ و $B$ که عضو مشترکی نداشته باشند، دو مجموعهٔ مجزا یا جدا از هم می‌گوییم؛ پس:

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cap B) = ۰$

۷ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

| نام مجموعه | نماد و فرمول | نمودار ون | تعداد | ویژگی |
|---|---|---|---|---|
| مرجع | $U$ |  | تعداد کل اعضا | مجموعه‌ای که همهٔ مجموعه‌ها، زیرمجموعهٔ آن هستند. |
| اجتماع | $A\cup B$ |  | $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ | اعضایی که در حداقل یکی از دو مجموعهٔ $A$ و $B$ حضور دارند. |
| اشتراک | $A\cap B$ |  | تعداد اعضای مشترک بین دو مجموعه | اعضای مشترک بین دو مجموعه |
| متمم | $A'=U-A$ |  | $n(A')=n(U)-n(A)$ | $A'$ شامل اعضایی از $U$ است که عضو $A$ نیستند. |
| متمم اجتماع | $(A\cup B)'=(A'\cap B')$ |  | $n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)=n(A'\cap B')$ | اعضایی که عضو هیچ‌یک از دو مجموعهٔ $A$ و $B$ نیستند. |
| متمم اشتراک | $(A\cap B)'=(A'\cup B')$ |  | $n(A\cap B)'=n(U)-n(A\cap B)=n(A'\cup B')$ | عضوهایی از مجموعهٔ مرجع $U$ که بین $A$ و $B$ مشترک نیستند. |
| مجزا یا جدا از هم | $A\cap B=\varnothing$ |  | $n(A\cap B)=0$ یا $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ | دو مجموعه که هیچ عضو مشترکی ندارند. |
| عضو فقط یکی از دو مجموعه | $(A-B)\cup(B-A)$ |  | $n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A)+n(B)-2\times n(A\cap B)$ | اعضایی که عضو فقط یکی از دو مجموعه هستند. |

## دنباله

۱ الگوهای درجه‌یک و درجه‌دو:

| الگو | فرم کلی | روش به دست‌آوردن a | روش به دست آوردن b (و c) |
|---|---|---|---|
| درجه‌یک (خطی) | $an+b$ | مقداری که به جملات اضافه می‌شود. | با جای‌گذاری یک جمله از دنباله، b را به دست می‌آوریم. |
| درجه‌دو | $an^2+bn+c$ | ● مقداری که به جملات اضافه می‌شود را زیرشان می‌نویسیم.<br>● مقادیری که نوشتیم تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند.<br>● نصف قدرنسبت این دنباله برابر با a می‌شود. | با جای‌گذاری دو جمله از دنباله، مقادیر b و c را به دست می‌آوریم. |

۲ مثال از الگوی درجه‌یک و درجه‌دو:

| جملهٔ عمومی | جای‌گذاری جملات در الگو برای به دست آوردن ضرایب مجهول | تبدیل الگوی شکل به عددی | الگوی شکل |
|---|---|---|---|
| $t_n = ۳n + ۲$ | $t_n = ۳n + b \xrightarrow{t_۱=۵}$ <br> $۵ = ۳ + b \Rightarrow b = ۲$ | ۵ , ۸ , ۱۱ , ⋯ <br> +۳ +۳ <br> پس درجه اوله $\Rightarrow a=۳$ | |
| $t_n = \frac{۳}{۲}n^۲ + bn + c$ | $\begin{cases} \xrightarrow{t_۱=۱} \frac{۳}{۲} + b + c = ۱ \\ \xrightarrow{t_۲=۵} ۶ + ۲b + c = ۵ \end{cases}$ <br> $\xrightarrow{\text{حل}} \begin{cases} b = -\frac{۱}{۲} \\ c = ۰ \end{cases}$ | ۱ , ۵ , ۱۲ , ۲۲ , ⋯ <br> +۴ +۷ +۱۰ <br> +۳ +۳ <br> پس درجه دومه $\Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$ | |

## دنباله‌های حسابی و هندسی

۱ روابط اصلی دنباله‌های حسابی و هندسی:

| | حسابی (عددی) | هندسی |
|---|---|---|
| تعریف | به هر جمله نسبت به جملهٔ قبلی یک مقدار ثابت اضافه می‌شود. | هر جمله نسبت به جملهٔ قبلی در یک مقدار ثابت ضرب می‌شود. |
| جملهٔ عمومی | $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ | $a_n = a_۱ q^{n-۱}$ |
| رابطهٔ بازگشتی | $a_{n+۱} = a_n + d$ | $a_{n+۱} = a_n \times q$ |
| رابطهٔ اندیس‌ها | $n + m = p + t \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_t$ | $n + m = p + t \Rightarrow a_n \times a_m = a_p \times a_t$ |
| سه جملهٔ متوالی $(x, y, z)$ | $y = \frac{x+z}{۲}$ <br> به y، واسطهٔ حسابی x و z می‌گویند. | $y^۲ = xz$ <br> به y، واسطهٔ هندسی x و z می‌گویند. |
| درج k واسطه بین a و b | $d = \frac{b-a}{k+۱}$ | $q^{k+۱} = \frac{b}{a}$ |
| تعدادی فرد جملهٔ متوالی | $a_۷ + a_۸ + a_۹ = ۳a_۸ \xrightarrow{\text{مثال}}$ مجموع = تعداد × وسطی | حاصل‌ضرب = (وسطی)$^{\text{تعداد}}$ <br> $\xrightarrow{\text{مثال}} a_۷ a_۸ a_۹ = (a_۸)^۳$ |

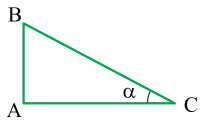
۲ مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n:

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

## مقدمات

۱ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

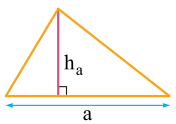
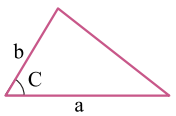
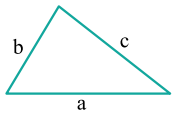
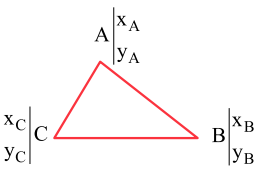
| نسبت | تعریف | برای زاویهٔ α در شکل مقابل |
|---|---|---|
| سینوس | $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ | $\sin\alpha = \frac{AB}{BC}$ |
| کسینوس | $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ | $\cos\alpha = \frac{AC}{BC}$ |
| تانژانت | $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ | $\tan\alpha = \frac{AB}{AC}$ |
| کتانژانت | $\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$ | $\cot\alpha = \frac{AC}{AB}$ |



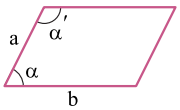
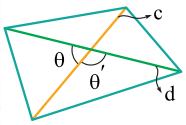

۲ نسبت‌های مثلثاتی زوایا مهم:

| | ۰° | ۳۰° | ۴۵° | ۶۰° | ۹۰° |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | ۱ |
| cos | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ |
| tan | ۰ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | ۱ | $\sqrt{۳}$ | ت.ن |
| cot | ت.ن | $\sqrt{۳}$ | ۱ | $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ | ۰ |

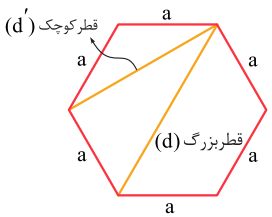
۳ مساحت مثلث:

| | مقادیری که داریم | فرمول | | شکل |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | قاعده و ارتفاع وارد بر آن | $\frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$ | $\frac{a.h_a}{۲}$ |  |
| ۲ | دو ضلع و زاویهٔ بین | $\frac{۱}{۲} \times$ حاصل‌ضرب دو ضلع $\times$ سینوس زاویهٔ بین دو ضلع | $\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$ |  |
| ۳ | سه ضلع (هرون) | $\sqrt{\underbrace{p}_{\text{نصف محیط}}(p-a)(p-b)(p-c)}$ | |  |
| ۴ | مختصات سه رأس | $\frac{\lvert(x_Ay_B+x_By_C+x_Cy_A)-(x_By_A+x_Cy_B+x_Ay_C)\rvert}{۲}$ | |  |

۴ مساحت چهارضلعی:

| | مقادیری که داریم | فرمول | | شکل |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | دو ضلع و زاویهٔ بین در متوازی‌الاضلاع | سینوس زاویهٔ بین دو ضلع × حاصل‌ضرب دو ضلع | $ab\sin\alpha$ ↓ یا $\alpha'$ |  |
| ۲ | دو قطر و زاویهٔ بین در هر چهارضلعی محدب | سینوس زاویهٔ بین دو قطر × حاصل‌ضرب دو قطر × $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}cd\sin\theta$ ↓ یا $\theta'$ |  |

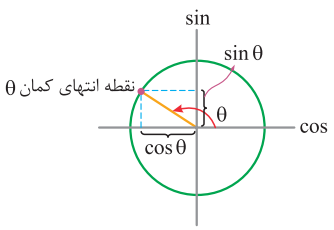
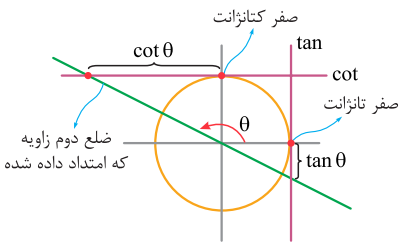
۵ شش‌ضلعی منتظم:

| مساحت | قطر کوچک | قطر بزرگ | |
|---|---|---|---|
| $6\times\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}_{\text{مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع}}$ | $d'=a\sqrt{3}$ | $d=2a$ |  |

۶ رابطهٔ سینوس‌ها و کسینوس‌ها در مثلث:

| اسم رابطه | فرمول | زمان استفاده |
|---|---|---|
| سینوس‌ها | $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ | رابطهٔ بین دو اضلاع و زوایای روبه‌رویشان |
| کسینوس‌ها | $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\hat{A}$ | رابطهٔ بین سه ضلع و یکی از زوایا |

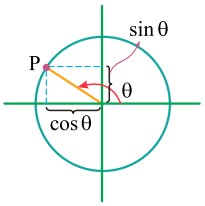
۷ نمایش نسبت‌های مثلثاتی روی دایره:

| | | |
|---|---|---|
| نمایش sin و cos | برای آن‌که سینوس و کسینوس یک زاویهٔ دلخواه روی دایره مثلثاتی را نشان دهیم کافی است از نقطهٔ انتهای کمانش به محورهای سینوس و کسینوس عمود کنیم. |  |
| نمایش tan و cot | برای نمایش تانژانت و کتانژانت یک زاویه کافی است ضلع دوم زاویه را از دو طرف امتداد دهیم تا محورهای تانژانت و کتانژانت را قطع کند. نقطهٔ برخوردش با این محورها، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را نشان می‌دهد. |  |

۸ علامت نسبت‌های مثلثاتی در ۴ ناحیه دایره مثلثاتی:

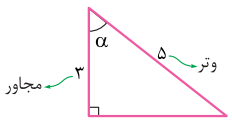
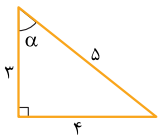
| ناحیه | محدوده | sin | cos | tan | cot |
|---|---|---|---|---|---|
| اول | $0^\circ < x < 90^\circ$ یا $0 < x < \frac{\pi}{2}$ | + | + | + | + |
| دوم | $90^\circ < x < 180^\circ$ یا $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ | + | − | − | − |
| سوم | $180^\circ < x < 270^\circ$ یا $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ | − | − | + | + |
| چهارم | $270^\circ < x < 360^\circ$ یا $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ | − | + | − | − |

۹ مختصات هر نقطه روی دایره مثلثاتی به صورت $P(\underbrace{\cos\theta}_{x_P}, \underbrace{\sin\theta}_{y_P})$ است.

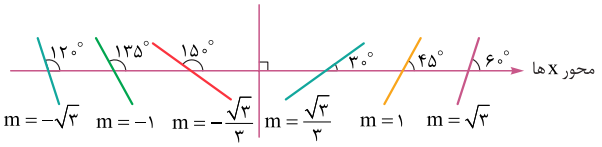



۱۰ محاسبهٔ سایر نسبت‌های مثلثاتی با داشتن یکی از آن‌ها (بدون استفاده از اتحادها):

مثلاً فرض کنید $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ و $\alpha$ دو ربع چهارم است و $\cot\alpha$ را می‌خواهیم. ابتدا با این‌که $\alpha$ در ربع چهارم است کاری نداریم.

| | | |
|---|---|---|
| گام ۱ | با توجه به تعریف کسینوس که می‌شد اندازهٔ ضلع مجاور به وتر، مثلث قائم‌الزاویه‌ای مثل شکل روبه‌رو می‌کشیم. |   |
| گام ۲ | ضلع سوم را با فیثاغورس درمی‌آوریم: $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ |   |
| گام ۳ | حالا کتانژانت $\alpha$ را طبق تعریف می‌نویسیم و علامتش را با توجه به قرارداشتن آن در ربع چهارم می‌گذاریم. | $\cot\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ربع ۴}} \frac{-3}{4}$ |

۱۱ تانژانت زاویه‌ای که هر خطی با جهت مثبت محور xها می‌سازد، برابر با شیب آن خط است: $m = \tan\alpha$




۱۲ اتحادهای اولیهٔ مثلثات:

| | صورت اصلی اتحاد | صورت فرعی اتحاد | |
|---|---|---|---|
| ۱ | $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ | $۱-\cos^۲ x=\sin^۲ x$ | $۱-\sin^۲ x=\cos^۲ x$ |
| ۲ | $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ | $\cot x=\frac{۱}{\tan x}$ | $\tan x.\cot x=۱$ |
| ۳ | $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ | | |
| ۴ | $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ | | |
| ۵ | $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ | | |

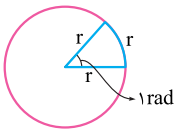
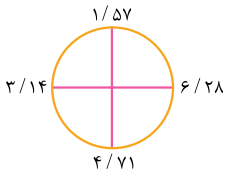
۱۳ اتحادهای وابسته به **sin ۲x**: $(\sin ۲x=۲\sin x\cos x)$

| | اتحاد برحسب sinxcosx | برحسب sin ۲x |
|---|---|---|
| ۱ | $(\sin x\pm\cos x)^۲=۱\pm ۲\sin x\cos x$ | $=۱\pm\sin ۲x$ |
| ۲ | $\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}$ | $=\frac{۲}{\sin ۲x}$ |
| ۳ | $\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$ | $=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$ |
| ۴ | $\sin^۶ x+\cos^۶ x=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x$ | $=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x$ |

۱۴ هر وقت تساوی به شکل $\sin A\pm\cos A=k$ داشتید، دو طرف را به توان ۲ برسانید.

## رادیان

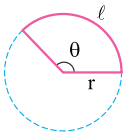
۱۵ نکات اولیه رادیان:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | تعریف ۱ رادیان | زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی که طولش برابر با شعاع دایره است: |   |
| ۲ | تقریب ۱ رادیان برحسب درجه | $1\,rad \simeq 57/3^\circ$ | |
| ۳ | مرزها برحسب رادیان |   | |
| ۴ | رابطهٔ بین درجه و رادیان | $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ یا ( $\pi$ رادیان = ۱۸۰ درجه) | |
| ۵ | تبدیل سریع درجه به رادیان و برعکس | $D \underset{\times\frac{180}{\pi}}{\overset{\times\frac{\pi}{180}}{\rightleftarrows}} R$ | |

۱۶ زوایای مهم برحسب درجه و رادیان:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $15^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $75^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ | $210^\circ$ | $225^\circ$ | $240^\circ$ | $270^\circ$ | $300^\circ$ | $315^\circ$ | $330^\circ$ | $360^\circ$ |
| $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |

۱۷ طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ $\theta$ رادیان در دایره‌ای به شعاع r:

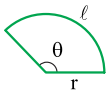



$\ell = r\theta$
↓
برحسب رادیان

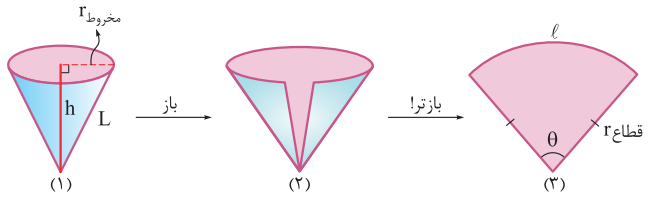
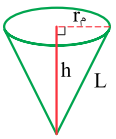
۱۸ در سؤالات «چرخیدن دو قرقره متصل به یک تسمه» یا «چرخیدن دو چرخ وسیله‌ای که چرخ‌های نابرابر دارد»، شروع حل، با برابر قراردادن طول کمان‌های طی شده است:

$\ell_1 = \ell_2 \Rightarrow r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \Rightarrow \cdots$

۱۹ قطاع:

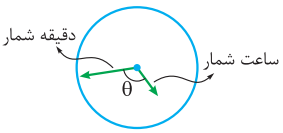
| شکل | محیط | مساحت |
|---|---|---|
|   | $\ell + 2r$ یا $r\theta + 2r$ | $\frac{1}{2}\theta r^2$ |

۲۰ گستردهٔ مخروط:

| | | |
|---|---|---|
| شکل |  | |
| روابط بین قطاع و مخروط | ۱) مولد مخروط با شعاع قطاع برابر است: $L = r_{قطاع}$<br>۲) محیط قاعده مخروط با طول کمان قطاع برابر است: $P_{قاعده} = \ell \Rightarrow ۲\pi r_{مخروط} = r_{قطاع}\theta$ | |
| دو رابطهٔ مهم در مخروط | ۱) $L = \sqrt{r_{م}^{۲} + h^{۲}}$ ۲) $S_{جانبی} = \pi r_{م} L$ |  |

۲۱ زاویهٔ بین عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت h و m دقیقه $= \left|\frac{۱۱}{۲}m - ۳۰h\right|$

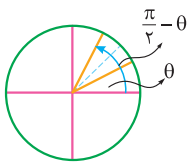
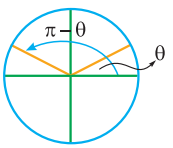
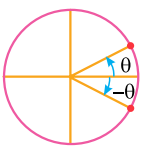
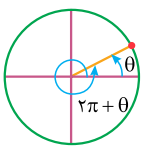
زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت h و m دقیقه:




$\Rightarrow$ به درجه $\theta = \left|\frac{۱۱}{۲}m - ۳۰h\right|$

## نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$

۲۲ زوایای متمم، مکمل، قرینه و هم پایان:

| | متمم | مکمل | قرینه | هم‌پایان |
|---|---|---|---|---|
| تعریف | دو زاویه که مجموعشان $۹۰^\circ$ است. | دو زاویه که مجموعشان $۱۸۰^\circ$ است. | قرینه θ یعنی $-\theta$ | زوایایی که اختلافشان مضربی از $۳۶۰^\circ$ است. |
| برای زاویه θ | $۹۰^\circ - \theta$ یا $\frac{\pi}{۲} - \theta$ | $۱۸۰^\circ - \theta$ یا $\pi - \theta$ | $-\theta$ | $۳۶۰^\circ k + \theta$ یا $۲k\pi + \theta$ |
| روی دایره |  |  |  |  |
| | قرینه نسبت به $y = x$ | قرینه نسبت به محور yها | قرینه نسبت به محور xها | یک یا چند دور کامل می‌زنند. |
| رابطه با نسبت‌های زاویهٔ θ | sin یکی با cos دیگری و tan یکی با cot دیگری برابر است و بالعکس. | sinها برابر و بقیه قرینه هم هستند. | cosها برابر و بقیه قرینه هم هستند. (کسینوس منفی را می‌خورد!) | همه‌چی ثابت می‌ماند. |
| مثال | $\sin ۲۰^\circ = \cos ۷۰^\circ$ | $\sin ۱۲۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$ | $\cos(-۳۰^\circ) = \cos ۳۰^\circ$ | $\sin ۳۹۰^\circ = \sin ۳۰^\circ$ |

۲۳ نوشتن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$ برحسب زویهٔ $\alpha$ در ۳ مرحله:

| | | |
|---|---|---|
| **مرحله ۱** | $۰ <$ زاویه $< ۲\pi$ | اگر کمان از $۲\pi$ بیشتر بود، مجاز هستیم مضارب $۲\pi$ را از آن کم کنیم تا به زاویه‌ای در محدودهٔ ۰ تا $۲\pi$ برسیم. |
| **مرحله ۲** | تغییر اسم می‌دهد یا نه | اگر $\pi$ یا $۲\pi$ داشتیم، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود ولی اگر $\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۳\pi}{۲}$ داشتیم، sin به cos (و بالعکس) و tan به cot (و بالعکس) تبدیل می‌شود. |
| **مرحله ۳** | علامت + یا − | $\alpha$ را زاویه‌ای در ربع اول (مثلاً $۱۰^\circ$) در نظر می‌گیریم و با توجه به آن، محدودهٔ زاویهٔ $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$ را مشخص و علامت نسبت را تعیین می‌کنیم. |

**مثال** $\sin(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha)$:

**مرحلهٔ ۱:** $۲\pi$ را از $\frac{۷\pi}{۲}$ کم می‌کنیم:

$$\sin(\underbrace{۲\pi}_{\text{حذف}} + \frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = \sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)$$

**مرحلهٔ ۲:** با فرض $\alpha = ۱۰^\circ$، زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۲} - \alpha$ می‌شود $۲۶۰^\circ$ که در ربع ۳ قرار دارد و در این ربع sin منفی است.

پس:

$$\sin(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha) = \underset{\text{مرحلهٔ ۳}}{-}\overset{\text{مرحلهٔ ۲}}{\cos}\alpha$$

۲۴ جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$ ( $\alpha$ در ربع اول قرار دارد.):

| | $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ | $\frac{\pi}{۲} + \alpha$ | $\pi - \alpha$ | $\pi + \alpha$ | $\frac{۳\pi}{۲} - \alpha$ | $\frac{۳\pi}{۲} + \alpha$ | $۲\pi - \alpha$ | $۲\pi + \alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| تغییر اسم می‌دهد یا نمی‌دهد (− ↑ ، + ↑) | + | + | − | − | + | + | − | − |
| **ناحیه (ربع) زاویهٔ جدید** | ۱ | ۲ | ۲ | ۳ | ۳ | ۴ | ۴ | ۱ |
| **sin** | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| **cos** | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| **tan** | $\cot\alpha$ | $-\cot\alpha$ | $-\tan\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\cot\alpha$ | $-\cot\alpha$ | $-\tan\alpha$ | $\tan\alpha$ |
| **cot** | $\tan\alpha$ | $-\tan\alpha$ | $-\cot\alpha$ | $\cot\alpha$ | $\tan\alpha$ | $-\tan\alpha$ | $-\cot\alpha$ | $\cot\alpha$ |

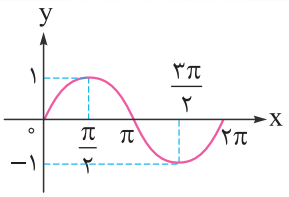
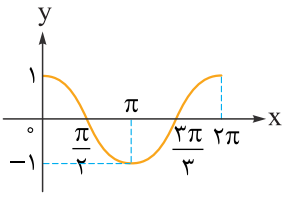
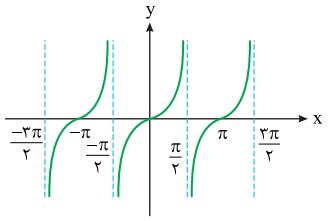
۲۵ برای آن‌که کسرهایی به فرم $\frac{a\sin\alpha + b\cos\alpha}{c\sin\alpha + d\cos\alpha}$ را برحسب $\tan\alpha$ بنویسیم، باید همهٔ نسبت‌ها را به $\cos\alpha$ تقسیم کنیم:

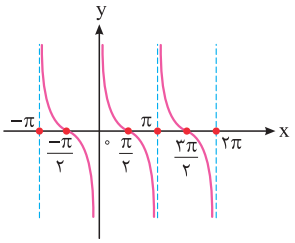
$$\frac{\frac{a\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{b\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{c\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{d\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{a\tan\alpha + b}{c\tan\alpha + d}$$

۲۶ برای ساده‌کردن عبارت‌هایی به فرم $a\sin^۲ x + b\sin x\cos x + c\cos^۲ x = d$، دو طرف را بر $\cos^۲ x$ (یا $\sin^۲ x$) تقسیم می‌کنیم تا بتوانیم عبارت را برحسب $\tan x$ (یا $\cot x$) بنویسیم.

## توابع مثلثاتی

۲۷ نمودار توابع مثلثاتی:

| ضابطهٔ تابع | | دامنه | بُرد | دورهٔ تناوب | طول نقاط max | طول نقاط min | صفرهای تابع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\sin x$ |  | $\mathbb{R}$ | $[-۱,۱]$ | $۲\pi$ | $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ | $۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ | $k\pi$ |
| $y=\cos x$ |  | $\mathbb{R}$ | $[-۱,۱]$ | $۲\pi$ | $۲k\pi$ | $۲k\pi+\pi$ | $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ |
| $y=\tan x$ |  | $\mathbb{R}-\{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\}$ | $\mathbb{R}$ | $\pi$ | - | - | $k\pi$ |

| ضابطهٔ تابع | | دامنه | بُرد | دورهٔ تناوب | نقاط max | نقاط min | صفرهای تابع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=\cot x$ |  | $\mathbb{R}-\{k\pi\}$ | $\mathbb{R}$ | $\pi$ | - | - | $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ |

- $\tan x$ در بازه‌های تعریف‌شده صعودی و $\cot x$ در بازه‌های تعریف‌شده نزولی است.

## اتحادهای مثلثاتی

۲۸ اتحادهای $\alpha \pm \beta$:

| | | |
|---|---|---|
| سینوس | جمع | $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ |
| | تفاضل | $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$ |
| کسینوس | جمع | $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ |
| | تفاضل | $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ |
| تانژانت | جمع | $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ |
| | تفاضل | $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ |

۲۹ برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای $15^\circ$، $75^\circ$، $105^\circ$ و ... از اتحادهای بالا استفاده می‌کنیم.

۳۰ اتحادهای $2\alpha$:

| | | |
|---|---|---|
| سینوس | اتحاد | $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ |
| | نتیجه | $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ |
| کسینوس | اتحاد | $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$ |
| | نتایج (روابط طلایی) | $1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$<br>$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$ |
| تانژانت | اتحاد | $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ |

۳۱ اتحادهای $3\alpha$:

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$
$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ $\Rightarrow$

| | | |
|---|---|---|
| سینوس | اتحاد | $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ |
| کسینوس | اتحاد | $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ |

۳۲ نسبت‌های مثلثاتی زوایای $15^\circ$ (و $75^\circ$) و $22/5^\circ$ (و $67/5^\circ$) را بلد باشید.

| | sin | cos | tan | cot |
|---|---|---|---|---|
| $15^\circ = \frac{\pi}{12}$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ یا $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ یا $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ | $2-\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{3}$ |
| $75^\circ = \frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ یا $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ یا $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ | $2+\sqrt{3}$ | $2-\sqrt{3}$ |
| $22/5^\circ = \frac{\pi}{8}$ | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ | $\sqrt{2}-1$ | $\sqrt{2}+1$ |
| $67/5^\circ = \frac{3\pi}{8}$ | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ | $\sqrt{2}+1$ | $\sqrt{2}-1$ |

برای به دست آوردن سینوس و کسینوس زوایای $15^\circ$ و $22/5^\circ$ از دو اتحاد $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ و $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ استفاده می‌کنیم.

۳۳ اتحادهای تکمیلی:

| | |
|---|---|
| ۱ | $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$ |
| ۲ | $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ |
| ۳ | $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ |
| ۴ | $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ |
| ۵ | $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ |
| ۶ | $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$ |
| ۷ | $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$ |
| ۸ | $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}$ |
| ۹ | $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ |
| ۱۰ | $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ |

۳۴ چند تکنیک:

| | |
|---|---|
| ۱ | اگر عبارتمان به شکل $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\ldots$ بود باید خودمان $\sin\alpha$ را در آن ضرب کنیم و بعد از ساده‌کردن، جواب به دست آمده را بر $\sin\alpha$ تقسیم کنیم. |
| | مثال: $\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ \xrightarrow[\sin 10^\circ]{\text{ضرب در و تقسیم بر}} \dfrac{\overbrace{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}^{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}\cos 20^\circ\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ} = \dfrac{\overbrace{\frac{1}{2}\sin 20^\circ\cos 20^\circ}^{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}\cos 40^\circ}{\sin 10^\circ} = \dfrac{\frac{1}{8}\sin 80^\circ}{\underbrace{\sin 10^\circ}_{\cos 80^\circ}}$ $= \frac{1}{8}\tan 80^\circ$ |
| ۲ | برای ساده‌کردن عبارت‌های به فرم $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ از $\sqrt{a^2+b^2}$ فاکتور می‌گیریم و بعد آن را به شکل ضریبی از $\sin(\alpha+\beta)$ می‌نویسیم. |
| | مثال: $\sin 10^\circ + \sqrt{3}\cos 10^\circ \xrightarrow{\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=2} 2(\frac{1}{2}\sin 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ) = 2(\cos 60^\circ\sin 10^\circ + \sin 60^\circ\cos 10^\circ)$ $= 2\sin(10+60) = 2\sin 70^\circ$ |

۳۵ همه‌چی برحسب تانژانت نصف کمان:

| | |
|---|---|
| ۱ | $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ |
| ۲ | $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ |
| ۳ | $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ |

## توابع متناوب

۳۶ می‌گوییم f تابعی متناوب است، اگر عدد مثبتی مثل T پیدا شود که هر دو شرایط زیر برقرار باشد:

- $f(x+T)=f(x)$
- اگر $x\in D_f$ بود، آن $(x\pm T)\in D_f$ باشد.

به کوچک‌ترین مقدار مثبت T، دورهٔ تناوب تابع می‌گوییم.

۳۷ اگر مساحت بین تابع متناوب f و محور xها در بازه‌ای به طول T برابر s باشد، مساحت بین تابع f و محور xها در بازه‌هایی به طول $\underset{\text{(عدد طبیعی)}}{k}\times T$، برابر با $k\times s$ است.

۳۸ دورهٔ تناوب‌هایی که باید حفظ باشیم:

| جنس تابع | توضیح | قیافه | دورهٔ تناوب | مثال |
|---|---|---|---|---|
| sin , cos | توان فرد | $\cos^{(2x+1)}(ax)\,,\ \sin^{(2x+1)}(ax)$ | $\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$ | $\sin 3x \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$ |
| | توان زوج و قدرمطلق | $\cos^{2x} ax\,,\ \sin^{2x} ax$<br>$\lvert\cos ax\rvert\,,\ \lvert\sin ax\rvert$ | $\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$ | $\sin^4 6x \Rightarrow \frac{\pi}{6}$<br>$\lvert\cos \pi x\rvert \Rightarrow \frac{\pi}{\pi}=1$ |
| tan , cot | توان فرد<br>توان زوج<br>قدرمطلق | $\cot^{(2x+1)}(ax)\,,\ \tan^{(2x+1)}(ax)$<br>$\cot^{2x} ax\,,\ \tan^{2x} ax$<br>$\lvert\cot ax\rvert\,,\ \lvert\tan ax\rvert$ | $\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$ | $\tan^3 2x \Rightarrow \frac{\pi}{2}$<br>$\cot^2 \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$<br>$\lvert\tan \frac{\pi}{2}x\rvert \Rightarrow \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$ |
| براکتی | | $ax-[ax]$<br>$[ax]+[-ax]$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert}$ | $2x-[2x] \Rightarrow \frac{1}{2}$<br>$[\frac{x}{3}]+[\frac{-x}{3}] \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3}}=3$ |
| | | $(-1)^{[ax]}$ | $\frac{2}{\lvert a\rvert}$ | $(-1)^{[\frac{2}{3}x]} \Rightarrow \frac{2}{\frac{2}{3}}=3$ |

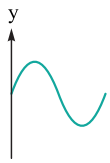
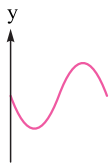
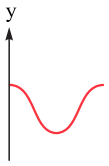
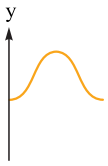
۳۹ برای عبارت‌های به فرم $a\sin(bx+d)+c$ و $a\cos(bx+d)+c$، داریم:

| | فرمول | فرمول به فارسی! | مثال در $2\sin(6x)-5$ |
|---|---|---|---|
| max | $\lvert a\rvert+c$ | عدد بیرونی+ | ضریب پشت sin یا cos $\lvert\ \rvert$ | $\lvert 2\rvert+(-5)=-3$ |
| min | $-\lvert a\rvert+c$ | عدد بیرونی+ | ضریب پشت sin یا cos $-\lvert\ \rvert$ | $-\lvert 2\rvert+(-5)=-7$ |

۴۰ به دست آوردن ضرایب مجهول در توابع به فرم $y=a\sin(bx)+c$ یا $y=a\cos(bx)+c$:

| گام | چیکار می‌کنیم؟ | توضیح |
|---|---|---|
| ۱ | ساده‌کردن | اگر ضابطه ساده می‌شد، حتماً ساده می‌کنیم. مثلاً جای $4\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ می‌نویسیم $4\cos x$. |
| ۲ | دورهٔ تناوب | اگر از روی شکل دورهٔ تناوب معلوم بود، $\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$ را با آن برابر قرار می‌دهیم تا b به دست آید. |
| ۳ | min , max | اگر مقدار min و max روی نمودار معلوم بود، از معادلات $\max=\lvert a\rvert+c$ و $\min=-\lvert a\rvert+c$، مقدار $\lvert a\rvert$ و c را حساب می‌کنیم. |
| ۴ | نقطهٔ‌کمکی | اگر مختصات نقطه‌ای از نمودار معلوم بود، آن را در ضابطه جای‌گذاری می‌کنیم تا یک معادله به ما بدهد. |

۴۱ پیداکردن علامت a و b در توابع $y = a\sin(bx) + c$ و $y = a\cos(bx) + c$

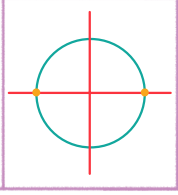
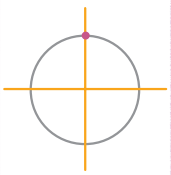
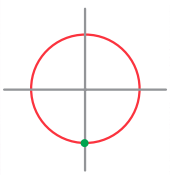
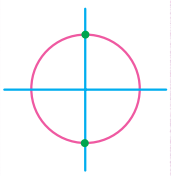
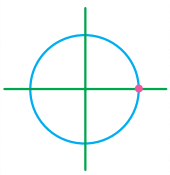
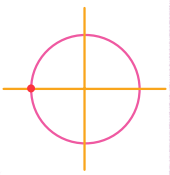
| | نمودار سینوسی | | نمودار کسینوسی | |
|---|---|---|---|---|
| شکل نمودار در سمت راست محور yها |  |  |  |  |
| شبیه به ... | صعودی یا مثل $\sin x$ | نزولی یا مثل $-\sin x$ | نزولی یا مثل $\cos x$ | صعودی یا مثل $-\cos x$ |
| علامت a و b | هم‌علامت‌اند $(ab > 0)$ | ناهم‌علامت‌اند. $(ab < 0)$ | $a > 0$ | $a < 0$ |

## معادله مثلثاتی

۴۲ فرم کلی معادلات مثلثاتی:

| معادله | فرم کلی | جواب‌ها | جواب به فارسی! |
|---|---|---|---|
| سینوسی | $\sin u = \sin v$ | $\begin{cases} u = 2k\pi + v \\ u = 2k\pi + \pi - v \end{cases}$ | دومی + مضارب T = اولی<br>مکمل دومی + مضارب T = اولی |
| کسینوسی | $\cos u = \cos v$ | $u = 2k\pi \pm v$ | دومی ± مضارب T = اولی |
| تانژانتی | $\tan u = \tan v$ | $u = k\pi + v$ | دومی + مضارب T = اولی |

۴۳ حالات خاص معادلهٔ مثلثاتی:

| | حالات خاص سینوسی | | | حالات خاص کسینوسی | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| معادله | $\sin x = 0$ | $\sin x = 1$ | $\sin x = -1$ | $\cos x = 0$ | $\cos x = 1$ | $\cos x = -1$ |
| جواب کلی | $u = k\pi$<br>مضارب $\pi$ | $u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ | $u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ | $u = k\pi + \frac{\pi}{2}$<br>مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ | $u = 2k\pi$<br>مضارب زوج $\pi$ | $u = (2k+1)\pi$<br>مضارب فرد $\pi$ |
| جواب‌ها روی دایره |  |  |  |  |  |  |

۴۴ معادلاتی که اول باید قیافه‌شان را تغییر دهیم و بعد سراغ حل‌شان برویم!

الف) یک علامت منفی اضافه!

| ظاهر اولیه | چه می‌کنیم | ظاهر جدید |
|---|---|---|
| $\sin u = -\sin v$ | جای $-\sin v$ می‌نویسیم $\sin(-v)$ | $\sin u = \sin(-v)$ |
| $\cos u = -\cos v$ | جای $-\cos v$، کسینوس مکمل v را می‌نویسیم | $\cos u = \cos(\pi - v)$ |
| $\tan u = -\tan v$ | جای $-\tan v$ می‌نویسیم $\tan(-v)$ | $\tan u = \tan(-v)$ |

ب) معادلات به $\sin u = \cos v$ یا $\tan u = \cot v$:

می‌دانیم اگر دو زاویهٔ متمم باشند، sin یکی با cos دیگری و هم‌چنین tan یکی با cot دیگری برابر است.

| ظاهر اولیه | چه می‌کنیم | ظاهر جدید |
|---|---|---|
| $\sin u = \cos v$ | جای $\cos v$، سینوس متممش را می‌نویسیم | $\sin u = \sin(\frac{\pi}{۲} - v)$ |
| $\tan u = \cot v$ | جای $\cot v$، تانژانت متممش را می‌نویسیم | $\tan u = \tan(\frac{\pi}{۲} - v)$ |
| $\tan u \tan v = ۱$ | می‌نویسیم $\tan u = \frac{۱}{\tan v}$ و بعد $\tan u = \cot v$ | مثل بالایی |

پ) معادله به فرم $a \sin u = b \cos u$:

برای حل معادله به فرم $a \sin u = b \cos u$، دو طرف را به $\cos u$ تقسیم می‌کنیم و معادله تانژانتی به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$a \sin u = b \cos u \xrightarrow{\div \cos u} a \tan u = b \Rightarrow \tan u = \frac{b}{a}$$

**نکته**

در معادلهٔ مثلثاتی باید چک کنیم که: ۱) مخرج کسرها صفر نشود. ۲) درون تانژانت $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ نشود. ۳) در کتانژانت $k\pi$ نشود.