

آزمون حضوری
شماره دو



پایه یازدهم
رشته ریاضی

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
حسابان (۱)	فصل اول + فصل دوم صفحه ۱ تا ۵۳	۲	۱۱	علی شهرابی	محسن فراهانی



قدرمطلق

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u \leq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & \text{زوج } n \\ u & \text{فرد } n \end{cases}$$

$ a \geq 0$	$ a = -a $	$ ab = a b $
$ \frac{a}{b} = \frac{ a }{ b }$	$ a^n = a ^n$	$ a^{2n} = a^{2n}$

ویژگی‌های اولیه قدرمطلق:

در معادله‌ها، حواستان به این حالت باشد

$$|a| + |b| \geq |a+b| \xrightarrow{\text{بررسی دقیق‌تر}} \begin{cases} ab \geq 0 \Leftrightarrow |a| + |b| = |a+b| \\ ab < 0 \Leftrightarrow |a| + |b| > |a+b| \end{cases}$$

نامساوی مثلث:

$$|A| = B \begin{cases} B \geq 0 \rightarrow A = \pm B \\ B < 0 \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$|A| = |B| \Rightarrow A = \pm B$$

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$ u \geq a$	$u \geq a$ یا $u \leq -a$	$u \in \mathbb{R}$	$u \in \mathbb{R}$
$ u \leq a$	$-a \leq u \leq a$	$u = 0$	\emptyset

دو نامعادله پر استفاده:

رسم توابعی که از جمع یا تفریق چند عبارت قدرمطلق درجه یک تشکیل شده‌اند. (توضیح با مثال)

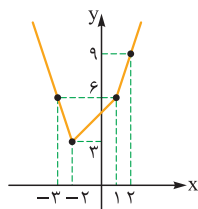
$$f(x) = |x-1| + |x+2|$$

ریشه: ۱
ریشه: -۲

مراحل رسم تابع

مرحله ۱: مقدار تابع را در ریشه داخل قدرمطلق‌ها و یک عدد بعد از بیشترین و یک عدد قبل از کمترین آن‌ها پیدا می‌کنیم:

	قبل از کم‌ترین ریشه	ریشه‌ها		بعد از بیشترین ریشه
x	-۳	-۲	۱	۲
y	۶	۳	۶	۹
نقطه	A(-۳, ۶)	B(-۲, ۳)	C(۱, ۶)	D(۲, ۹)



مرحله ۲: نقاط بالا را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم:

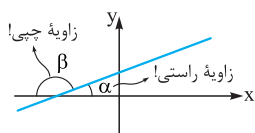
دو تابع معروف قدرمطلق

برد	تقارن	قیافه	ضابطه	
$[b-a , +\infty)$	محور تقارن: $x = \frac{a+b}{2}$		$y = x-a + x-b $	گلدانی
$[b-a , - b-a]$	مرکز تقارن: $(\frac{a+b}{2}, 0)$		$y = x-a - x-b $	سرسره‌ای (آبشاری)



هندسه تحلیلی

۱ شیب خط گذرنده از دو نقطه A و B : $m = \frac{\text{اختلاف } y \text{ ها}}{\text{اختلاف } x \text{ ها}} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

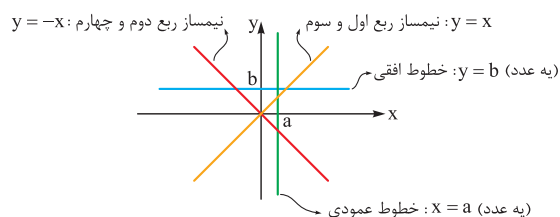


۲ تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد، همان شیب است: $m = \tan \alpha$

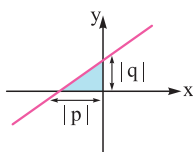
۳ اگر سه نقطه A ، B و C روی یک خط (یا راستا یا امتداد) باشند، آن‌گاه: $m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$

۴ نوشتن معادله خط در چند حالت پرکاربرد:

$y - y_0 = m(x - x_0)$	معادله خط گذرنده از نقطه (x_0, y_0) با شیب m
$y = mx + h$	معادله خط با شیب m و عرض از مبدأ h
$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$	معادله خط با طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q



۵ معادله خطوط خاص:



۶ مساحت مثلثی که هر خط با محورهای مختصات می‌سازد: $S = \frac{|\text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ}|}{2} = \frac{|p \cdot q|}{2}$

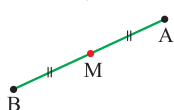
۷ برای به دست آوردن مختصات نقطه تقاطع دو خط، باید یک دستگاه دو معادله - دو مجهول حل کنیم.



۸ وضعیت دو خط نسبت به هم:

حالات دو خط نسبت به هم	شرط	مثال
موازی (غیرمنطبق)	$m_1 = m_2, h_1 \neq h_2$	$y = 3x + 4$ $y = 3x - 2$
عمود	$m_1 = \frac{-1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 = -1$	$y = \frac{3}{4}x + 1$ $y = \frac{-4}{3}x + 2$
متقاطع	$m_1 \neq m_2$	$y = x - 1$ $y = 3x + 4$
منطبق	$m_1 = m_2, h_1 = h_2$	$y = 2x + 5$ $2y = 4x + 10$

۹ فاصله دو نقطه A و B: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\text{اختلاف } x\text{ها})^2 + (\text{اختلاف } y\text{ها})^2}$

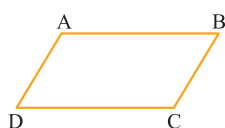


۱۰ نقطه وسط پاره خط AB: $M = (\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$

۱۱ کاربردهای نقطه وسط یک پاره خط در سوالات:

مراحل محاسبه یا توضیح	شکل	
۱) پیدا کردن مختصات M ۲) نوشتن معادله خط گذرنده از A و M		معادله میانه در مثلث
۱) پیدا کردن مختصات M ۲) محاسبه طول پاره خط AM		طول میانه مثلث
۱) پیدا کردن مختصات H ۲) محاسبه شیب d: $m_d = \frac{-1}{m_{AB}}$ ۳) نوشتن معادله خط d		معادله عمود منصف
B وسط A و A' است: $B = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2B - A$		قرینه نقطه A نسبت به نقطه B
۱) معادله AH را می نویسیم (با داشتن نقطه A و شیب AH که قرینه و معکوس شیب d است). ۲) محاسبه H (با تقاطع AH و d) ۳) محاسبه A': $A' = 2H - A$		قرینه نقطه A نسبت به خط d

۱۲ رابطه بین رئوس متوازی الاضلاع:



$$\xrightarrow{\text{رئوس روبه‌رو}} \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \xrightarrow{\text{خلاصه‌تر!}} A + C = B + D$$

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۳ فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$:

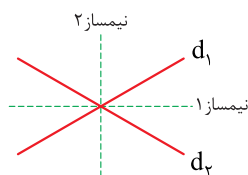


مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان

۱۴ کاربردهای فاصله نقطه از خط در سؤالات:

مقدار قابل محاسبه	شکل	توضیح
ضلع مربع		فاصله A تا خط $d = \text{ضلع}$
قطر مربع		فاصله A تا قطر = نصف قطر
ارتفاع مثلث		فاصله رأس A تا ضلع BC = طول ارتفاع AH
شعاع دایره		فاصله مرکز تا خط مماس = شعاع



۱۵ معادله نیمسازهای دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ (زیرا فاصله نقاط روی نیمساز

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

از دو خط زاویه، برابر است.)

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۶ فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$:

۱۷ کاربردهای فاصله دو خط موازی در سؤالات:

مربع	شکل	توضیح
مربع		فاصله d_1 تا $d_2 = \text{ضلع مربع}$
مستطیل		فاصله d_1 تا $d_3 = \text{طول}$ فاصله d_2 تا $d_4 = \text{عرض}$
دایره		فاصله دو خط مماس موازی = قطر

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

۱۸ خطی که از دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ به یک فاصله است:



تابع

- مقدمات (تعریف تابع، دامنه و برد) -

۱ تابع دستگاهی است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد.

۲ روش‌های نمایش تابع:

روش نمایش	شرط تابع بودن	مثال
۱ پیکانی (نمودار وَن)	از هر عضو مجموعه مبدأ، باید دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.	<p>تابع است.</p> <p>تابع نیست.</p>
۲ زوج مرتبی	<ul style="list-style-type: none"> مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها نباید برابر باشد. اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد. 	<p>تابع است. $\rightarrow \{(1, 2), (2, 3), (-1, 3)\}$</p> <p>تابع نیست. $\rightarrow \{(1, 2), (3, 5), (1, 6)\}$</p>
۳ جدولی	<ul style="list-style-type: none"> مؤلفه‌های سطر مربوط به Xها نباید یکسان باشد. اگر مؤلفه‌های X یکسان داشتیم، مؤلفه‌های Y شان هم باید یکسان باشد. 	<p>تابع نیست.</p>
۴ نموداری	اگر خطی موازی محور Yها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار مربوط به یک تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، تابع است.	<p>تابع نیست.</p>
۵ توصیفی	با توجه به جمله توصیفی، اگر به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی داشته باشیم، آن رابطه تابع است.	<p>رابطه‌ای که به هر فرد، کد ملی‌اش را نسبت می‌دهد. {ورودی: انسان‌ها، خروجی: کد ملی}</p> <p>چون هر شخص نمی‌تواند بیش از یک کد ملی داشته باشد، پس تابع است.</p>
۶ ضابطه‌ای	<ul style="list-style-type: none"> اگر به ازای هر X، فقط یک خروجی داشته باشیم، تابع است. روابطی که در آن‌ها y تنها می‌شود، حتماً تابع هستند؛ مثل $y = \log_p x + \cos \frac{1}{x}$ 	<p>در رابطه $y^2 = x + 1$، اگر $x = 1$ را بدهیم، ۲ تا خروجی می‌دهد:</p> <p>تابع نیست. $y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2} \rightarrow$</p>



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان

۳ سؤالات تابع نویسی: از ما می‌خواهد عبارتی (مثل محیط، مساحت و ...) را بر حسب یک متغیر (مثل ضلع، شعاع و ...) بنویسیم.

مثال تابع مساحت مربع بر حسب محیط آن؟

پاسخ می‌دانیم $P = 4a$ و $S = a^2$ است. از $P = 4a$ نتیجه می‌گیریم $a = \frac{P}{4}$. حالا این تساوی را در رابطه مساحت قرار می‌دهیم:

$$S = a^2 \xrightarrow{a = \frac{P}{4}} S = \left(\frac{P}{4}\right)^2 \Rightarrow S = \frac{P^2}{16} \xrightarrow{\text{به شکل تابع}} S(P) = \frac{P^2}{16}$$

۴ مقدار تابع در یک نقطه:

روش نمایش تابع	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی	ضابطه‌ای
مثال		$f = \{(1, 2), (2, 6)\}$	$\begin{array}{c ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & -3 & 6 & 2 \end{array}$		f تابعی است که به هر عددی، مکعبش را نسبت می‌دهد.	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2x + 5}}$
مقدار تابع در $x = 2$	$f(2) = 9$	$f(2) = 6$	$f(2) = 6$	$f(2) = 1$	$f(2) = 2^3 = 8$	$f(2) = \frac{5}{3}$

۵ نقاط برخورد مهم:

نقطه برخورد تابع f با ...	راه حل	مختصات نقطه (نقاط)
محور x ها	« y را صفر می‌دهیم» یا «جواب‌های معادله $f(x) = 0$ »	جواب‌های $f(x) = 0$ $(\quad, 0)$
محور y ها	« x را صفر می‌دهیم» یا «مقدار $f(0)$ »	$(0, f(0))$
تابع g	حل معادله $f(x) = g(x)$ ← جواب‌ها \dots, x_1	$(x_1, f(x_1)), \dots$
نیمساز ربع اول و سوم	حل معادله $f(x) = x$ ← جواب‌ها \dots, x_1	$(x_1, x_1), \dots$

۶ محاسبه دامنه در نمایش مختلف یک تابع (به جز نمایش ضابطه‌ای):

روش محاسبه دامنه	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی								
	همه اعدادی که از آن‌ها فلش خارج شده	همه مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها	همه اعداد سطر مربوط به x	تصویر نمودار روی محور x ها	ورودی‌ها!								
مثال		$f = \{(5, 2), (1, 3)\}$	<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>-4</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>6</td><td>5</td><td>9</td></tr></table>	x	1	-4	6	y	6	5	9		تابعی که به هر عدد مربع کامل دورقمی، جذرش را نسبت می‌دهد.
x	1	-4	6										
y	6	5	9										
دامنه	$D = \{4, 2, -6\}$	$D_f = \{5, 1\}$	$D = \{1, -4, 6\}$	$D = (-3, 6]$	$D = \{16, 25, \dots, 81\}$								



– انواع تابع –

۱) چند تابع خاص

تابع	ضابطه	نکته	نمودار	دامنه	برد
ثابت	$f(x) = c$ عدد	<ul style="list-style-type: none"> در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم همه زوج مرتب‌ها با هم برابر است. در نمایش ضابطه‌ای، ضرایب جملات شامل x باید صفر باشد. 		\mathbb{R}	C
همانی	$f(x) = x$	<ul style="list-style-type: none"> در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. در نمایش ضابطه‌ای، ضریب x یک و ضریب سایر جملات صفر است. 		\mathbb{R}	\mathbb{R}
خطی	$f(x) = mx + h$	<p>محل برخورد با محور y ها $h \rightarrow$ عرض از مبدأ</p> <p>$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ شیب</p>		\mathbb{R}	\mathbb{R}

– انتقال نمودار توابع –

۱) انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض:

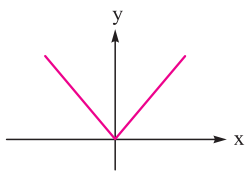
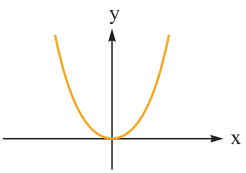
نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
a واحد راست	$f(x - a)$	جای x ها، $x - a$ می‌گذاریم.
a واحد چپ	$f(x + a)$	جای x ها، $x + a$ می‌گذاریم.
b واحد بالا	$f(x) + b$	b تا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
b واحد پایین	$f(x) - b$	b تا از ضابطه کم می‌کنیم.

انتقال

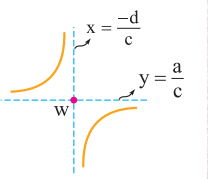
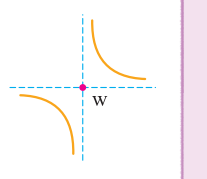
تابع قدرمطلق به صورت $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ نمایش داده می‌شود.

به توابعی که به ازای محدوده‌های مختلفی از دامنه، معادله‌های متفاوتی داشته باشند (مثل تابع قدرمطلق)، تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای) می‌گوییم.

۲ چند تابع معروف با نمودارشان:

ضابطه	$y = x $	$y = x^2$
نمودار		
دامنه	\mathbb{R}	\mathbb{R}
برد	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$

۳ نکات مهم تابع هموگرافیک با ضابطه $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$:

شرط هموگرافیک بودن	$ad - bc \neq 0, c \neq 0$
دامنه	$\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$
برد	$\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$
معادله خط چین عمودی	$x = -\frac{d}{c}$
معادله خط چین افقی	$y = \frac{a}{c}$
ضابطه وارون	$\frac{-dx+b}{cx-a}$
شرط برابری f و f^{-1}	$a+d=0$
مرکز تقارن	$w = (-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$
محورهای تقارن	دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از نقطه w
شکل تابع	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>$ad - bc > 0$</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>$ad - bc < 0$</p> </div> </div>



توابع گویا

۱) مطالب اولیه تابع گویا:

ضابطه	دامنه	نمودار $y = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{\text{چند جمله‌ای}}{\text{چند جمله‌ای}}$	$\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$	

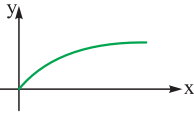
۲) اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{\text{چند جمله‌ای}}{ax^2 + bx + c}$ به صورت $\mathbb{R} - \{k\}$ باشد، باید « $\Delta = 0$ مخرج» و « $k = \frac{-b}{2a}$ » باشد.

۳) نکات مهم تابع هموگرافیک با ضابطه $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$:


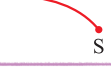
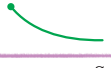
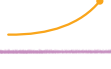
شرط هموگرافیک بودن	$ad - bc \neq 0, c \neq 0$
دامنه	$\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$
برد	$\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$
معادله خط چین عمودی	$x = -\frac{d}{c}$
معادله خط چین افقی	$y = \frac{a}{c}$
ضابطه وارون	$\frac{-dx + b}{cx - a}$
شرط برابری f و f^{-1}	$a + d = 0$
مرکز تقارن	$w = (-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$
محورهای تقارن	دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از w
شکل تابع	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>$ad - bc > 0$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>$ad - bc < 0$</p> </div> </div>

توابع رادیکالی

۱) مطالب اولیه تابع رادیکالی:

دامنه	نمودار $y = \sqrt{x}$
≥ 0 زیر رادیکال	

۲) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a\sqrt{bx+c} + d$ به یکی از چهار شکل زیر است:

علامت a	علامت b	شکل نمودار	مختصات نقطه شروع (S)
۱	+		
۲	-		
۳	+		
۴	-		

عدد بیرونی d ریشه داخل رادیکال $(-\frac{c}{b})$

جزء صحیح

۱) تابع پله‌ای:

تعریف	تابع چندضابطه‌ای که هر کدام از ضابطه‌هایش یک تابع ثابت است.
نمودار	از تعدادی پاره‌خط افقی تشکیل شده است.
مثال	$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x < 1 \\ -2 & 1 \leq x < 4 \end{cases}$