آزمون حضوری
شماره پنج

رشته ریاضی

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

ویژه کنکور
۱۴۰۳

# مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

| نام درس | مباحث | از صفحه | تا صفحه | مؤلف | ویراستار |
|---|---|---|---|---|---|
| آمار و احتمال و ریاضیات گسسته | ریاضیات گسسته دوازدهم<br>فصل ۱، درس ۲<br>صفحهٔ ۹ تا ۱۷<br>آمار و احتمال یازدهم<br>فصل ۱<br>صفحهٔ ۱۹ تا ۳۸<br>ریاضی دهم<br>صفحهٔ ۱ تا ۱۳ | ۲ | ۷ | سروش موئینی | محسن فراهانی - پیام ابراهیم‌نژاد |

## خواص عادکردن

۱) تعریف: $a|b$ یعنی b مضرب a است (b بر a بخش‌پذیر است) و داریم: $\exists q\in\mathbb{Z}\,;\,b=aq$

۲) اسامی: b مضرب a است؛ a شمارنده، عامل یا مقسوم‌علیه b است.

۳) عادکردن‌های بدیهی: $\forall a\in\mathbb{Z}\;;a|\circ\,,a|a\,,\pm\text{۱}|a$

۴) $a|b\xrightarrow{b\neq\circ}|a|\le|b|$

۵) $a|b,b|a\;\Rightarrow\;a=\pm b$

۶) $a^n|b^n\Leftrightarrow a|b$
$ka|kb\underset{k\neq\circ}{\Leftrightarrow}a|b$

۷) $a|\text{۱}\;\Rightarrow\;a=\pm\text{۱}$

۸) $a|b\;\Rightarrow\;\pm a|\pm b$

۹) $\forall n\in\mathbb{N},\forall k\in\mathbb{Z};a|b\;\Rightarrow\;a|b^n,a|kb$

۱۰) $m,n\in\mathbb{Z};a|b,a|c\;\Rightarrow\;a|mb+nc$

۱۱) $a|b,c|d\;\Rightarrow\;ac|bd$

۱۲) $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\,;\,a-b|a^n-b^n\\ \text{زوج } n\,;\,a+b|a^n-b^n\\ \text{فرد } n\,;\,a-b|a^n+b^n\end{cases}$

۱۳) اگر $x-a|f(x)$ آن‌گاه $x-a|f(a)$، یعنی اجازه داریم ریشهٔ چپ را در راست جای‌گذاری کنیم.

۱۴) اگر $a|bc$ و دو عدد a و b عامل مشترکی نداشته باشند، آن‌گاه $a|c$.

### اعداد اول

عدد طبیعی $p>\text{۱}$ وقتی اول است که به‌جز ۱ و خودش شمارندهٔ مثبت دیگری نداشته باشد.

اعداد اول عبارت‌اند از $\text{۲},\text{۳},\text{۵},\text{۷},\text{۱۱},\text{۱۳},\text{۱۷},\text{۱۹},\ldots$

خواص:

۱) بی‌شمار عدد اول داریم.

۲) عدد $n!\pm r$ وقتی $\text{۲}\le r\le n$ باشد، هرگز اول نیست (به r می‌خورد).

۳) عدد $\text{۲}^n-\text{۱}$ فقط وقتی می‌تواند اول باشد که n اول باشد.

۴) عدد $\text{۲}^n+\text{۱}$ فقط وقتی می‌تواند اول باشد که n به صورت $\text{۲}^k$ باشد.

۵) اگر $p\ge\text{۵}$ عدد اول باشد، $p=\text{۶}k\pm\text{۱}$ و $p^{\text{۲}}=\text{۲۴}t+\text{۱}$.

۶) اگر $p|ab$، آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$.

۷) اگر $p|a^n$، آن‌گاه $p|a$.

۸) اگر p اول باشد، تمام اعداد $\binom{p}{\text{۱}}$ و $\binom{p}{\text{۲}}$ و ... و $\binom{p}{p-\text{۱}}$ به p بخش‌پذیرند.

### ب.م.م

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b، عدد طبیعی d است و می‌نویسیم: $d=(a,b)$

شرایط:
- الف) $d|a,d|b$
- ب) $x|a,x|b\;\Rightarrow x\le d$

روش‌های محاسبهٔ ب.م.م:

| نام روش | تجزیه | نردبانی | تعریفی یا متغیر | خواص |
|---|---|---|---|---|
| عملکرد | ضرب پایه‌های مشترک با توان کم‌تر | به جای عدد بزرگ‌تر باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم بر عدد کوچک‌تر را قرار دهیم. $(a,b)=(b,r)$ | $d\mid a$ و $d\mid b$ می‌نویسیم و در طرف راست متغیر را حذف می‌کنیم. | $n\in\mathbb{N};(a^n,b^n)=d^n$<br>$k\neq 0;(ka,kb)=\lvert k\rvert d$<br>$k\in\mathbb{Z};(a,b)=(a,b\pm ka)$<br>$a\mid b\Leftrightarrow(a,b)=\lvert a\rvert$ |
| مثال | ب.م.م دو عدد $60=2^2\times 3\times 5$ و $126=2\times 3^2\times 7$ برابر $2^1\times 3^1$ است. | $(136,60)=$ باقی‌ماندهٔ ۱۳۶ بر ۶۰ برابر ۱۶ است. $=(16,60)$ باقی‌ماندهٔ ۶۰ بر ۱۶ برابر ۱۲ است. $=(12,16)=4$ | اگر $d=(2n-1,3n+1)$ باشد، داریم:<br>$d\mid 2n-1$<br>$d\mid 3n+1$<br>$\Rightarrow d\mid 3(2n-1)-2(3n+1)$<br>$\Rightarrow d\mid -5 \Rightarrow d=1$ یا $5$ | الف) $(2a^3,2b^3)=2(a,b)^3$<br>ب) $(2a,6ab)\underset{2a\mid 6ab}{=}\lvert 2a\rvert$<br>پ) $(a,7a-b)=(a,-b)$ |

## ک.م.م

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b، عدد طبیعی c است و می‌نویسیم: $c=[a,b]$

خواص ک.م.م:

۱) از ضرب کلی پایه‌های مشترک و غیرمشترک با توان بیشتر به دست می‌آید. $[2^2\times3\times5^2, 2\times3^3\times7]=2^2\times3^3\times5^2\times7$

۲) ضریب و توان خارج می‌شوند: $[a^n,b^n]=[a,b]^n$ و $[ka,kb]=|k|[a,b]$

۳) در حالت بخش‌پذیری b بر a: $a\,|\,b \Leftrightarrow [a,b]=|b|$

۴) دربارهٔ دو عدد a و b داریم: حاصل ضرب = ک‌م‌م × ب‌م‌م

$(a,b)\times[a,b]=|ab|$

۵) برای دو عدد که نسبت به هم اول‌اند $(a,b)=1 \Leftrightarrow [a,b]=|ab|$

۶) قانون جذب: $[a,(a,b)]=(a,[a,b])=|a|$

## روش متباین‌سازی

| عدد | a | b | $a\pm b$ | ab | $[a,b]$ | $(a,b)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| جایگزین | $a'd$ | $b'd$ | $d(a'\pm b')$ | $a'b'd^2$ | $a'b'd$ | d |

در این روش، کلید حل مسئله $(a',b')=1$ است.

## قضیهٔ تقسیم

- a: مقسوم (صحیح)
- b: مقسوم‌علیه (طبیعی)
- $q=[\frac{a}{b}]$: خارج‌قسمت
- r: باقی‌مانده
- $0\le r<b$ و $a=bq+r$: قضیهٔ تقسیم

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

ویژگی‌ها:

۱) اگر $0\le a<b$ باشد، $q=0$ و $r=a$ است.

۲) اگر $a>b$ باشد، همواره $a>2r$ است.

۳) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر b برابر r باشد، باقی‌ماندهٔ $-a$ بر b می‌شود: $b-r$

۴) هر عدد صحیح a، در تقسیم بر b یکی از باقی‌مانده‌های صفر تا $b-1$ را دارد و این رابطه $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کند.

| تقسیم بر ۲ | تقسیم بر ۳ | تقسیم بر ۴ |
|---|---|---|
| $b=2$<br>$\mathbb{Z}=[0]_2\cup[1]_2$ | $b=3$<br>$\mathbb{Z}=[1]_3\cup[2]_3\cup[0]_3$ | $b=4$<br>$\mathbb{Z}=[0]_4\cup[1]_4\cup[2]_4\cup[3]_4$ |
| مربع هر عدد زوج، مضرب ۴ است.<br>مربع هر عدد فرد، به صورت $8q+1$ است. | مربع هر عدد مضرب ۳، مضرب ۹ است.<br>مربع اعدادی که مضرب ۳ نباشند، به صورت $3q+1$ است. | مربع اعداد زوج $4k$<br>و مربع اعداد فرد $4k'+1$<br>(و البته $8q+1$) است. |
| نتیجه: ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است. | نتیجه: ضرب سه عدد متوالی همواره مضرب $3!=6$ است. | نتیجه: ضرب ۴ عدد متوالی همیشه مضرب $4!=24$ است. |

### نکته

از تقسیم بر ۵ نتیجه می‌شود:

| باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^2$ بر ۵ | ۰ | ۱ | ۴ | ۴ | ۱ |

پس هیچ مربع کاملی در تقسیم بر ۵، باقی‌ماندهٔ ۲ یا ۳ ندارد و این یعنی رقم یکان عدد مربع کامل هرگز ۲، ۳، ۷ و ۸ نیست.

۱) **زیرمجموعه:** اگر هر عضو A در B باشد، می‌نویسیم: $(\forall x \in A \Rightarrow x \in B \equiv A \subseteq B)$

۲) **تعداد زیرمجموعه:** مجموعهٔ nعضوی A، $2^n$ زیرمجموعه دارد. تعداد زیرمجموعه‌های kعضوی A برابر $\binom{n}{k}$ است.

۳) **افراز مجموعه:** تفکیک مجموعهٔ A به زیرمجموعه‌های ناتهی و جدا از هم که اجتماعشان کل A شود.

| n(A) | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|
| تعداد افراز | ۱ | ۲ | ۵ | ۱۵ | ۵۲ |

تعداد حالت‌های افراز A به زیرمجموعه‌های $n_1$ و $n_2$ و ... عضوی برابر است با: $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots\times(\text{تعدادتکرار})!}$

۴) **تساوی مجموعه‌ها:** اگر $B=A$ باشد داریم: $A \subseteq B\,,\,B \subseteq A$. در مجموعه‌ها ترتیب و تکرار اعضا مهم نیست.

۵) **قوانین جبر مجموعه‌ها:**

۱) $(A')'=A\,,\varnothing'=U\,,U'=\varnothing\,,A\subseteq B \Leftrightarrow B'\subseteq A'$

۲) $A\cap B=\varnothing \Rightarrow A\subseteq B'\,,B\subseteq A'\,,A-B=A\,,B-A=B$

۳) $A\cup A=A\,,A\cap A=A\,,A-A=\varnothing$

۴) $A\cup\varnothing=A\quad A\cap\varnothing=\varnothing\,,A-\varnothing=A$

۵) $A\cup U=U\,,A\cap U=A\,,U-A=A'$

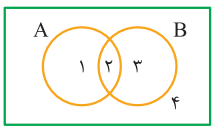
۶) $A-B=A\cap B'$

۷) $A\subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A\cup B=B \\ A\cap B=A \\ A-B=\varnothing \end{cases}$

۸) $\left.\begin{array}{l} A\cup(A\cap B)=A \\ A\cap(A\cup B)=A \end{array}\right\}$ قوانین جذب

۹) $(A\cup B)'=A'\cap B'\,,(A\cap B)'=A'\cup B'$ قوانین دمورگان

۶) در حل سؤالات جبر مجموعه‌ها، می‌توانیم شکل بکشیم و با توجه به شمارهٔ ناحیه‌ها سؤال را حل کنیم.




مثلاً $(A\cup B)'\cup(B-A)$ برابر است با: $(A\cup B)'\cup(B-A)=(۱,۲,۳)'\cup(۳)=۴\cup۳=(۳,۴)=A'$

۷) **ضرب دکارتی:**

$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\,,y\in B\}$

گسسته × گسسته = مستطیل نقطه‌نقطه

گسسته × پیوسته = خطوط افقی

پیوسته × پیوسته = سطح مستطیلی

پیوسته × گسسته = خطوط عمودی

۸) **خواص ضرب دکارتی:**

۱) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

۲) $A\times A=A^2$

۳) $(A\times B)\underset{\cap}{\cup}(A\times C)=A\times(B\underset{\cap}{\cup}C)$

۴) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

۵) $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

۶) $A\times B=B\times A \xrightarrow[B\neq\varnothing]{A\neq\varnothing} A=B$

۷) $A\times B\cap B\times A=A^2\cap B^2=(A\cap B)^2$

## الگو و دنباله

۱ الگوهای درجه‌یک و درجه‌دو:

| الگو | فرم کلی | روش به دست آوردن a | روش به دست آوردن b (و c) |
|---|---|---|---|
| درجه‌یک | $ax+b$ | مقداری که به جملات اضافه می‌شود. | با جای‌گذاری یک جمله از دنباله، b را به دست می‌آوریم. |
| درجه‌دو | $ax^{۲}+bx+c$ | ● مقداری که به جملات اضافه می‌شود را زیرشان می‌نویسیم.<br>● مقادیری که نوشتیم تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند.<br>● نصف قدرنسبت این دنباله برابر با a می‌شود. | با جای‌گذاری دو جمله از دنباله، مقادیر b و c را به دست می‌آوریم. |

۲ مثال از الگوی درجه‌یک و درجه‌دو (جدول را از چپ به راست بخوانید.):

| جملهٔ عمومی | جای‌گذاری جملات در الگو برای به دست آوردن ضرایب مجهول | تبدیل الگوی شکلی به عددی | الگوی شکلی |
|---|---|---|---|
| $t_n=۳n+۲$ | $t_n=۳n+b$<br>$\xrightarrow{t_۱=۵} ۵=۳+b \Rightarrow b=۲$ | ۵ , ۸ , ۱۱ , ...<br>+۳ +۳<br>پس درجه یکه $\Rightarrow a=۳$ | |
| $t_n=\frac{۳}{۲}n^{۲}-\frac{۱}{۲}n$ | $t_n=\frac{۳}{۲}x^{۲}+bx+c$<br>$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{t_۱=۱} \frac{۳}{۲}+b+c=۱\\ \xrightarrow{t_۲=۵} ۶+۲b+c=۵\end{array}\right\}$<br>$\xrightarrow{\text{حل}} \begin{cases} b=\frac{-۱}{۲} \\ c=۰\end{cases}$ | ۱ , ۵ , ۱۲ , ۲۲ , ...<br>+۴ +۷ +۱۰<br>+۳ +۳<br>پس درجه‌دومه $\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$ | |

۳ روابط اصلی دنباله‌های حسابی و هندسی:

| | حسابی (عددی) | هندسی |
|---|---|---|
| تعریف | به هر جمله نسبت به جملهٔ قبلی یک مقدار ثابت اضافه می‌شود. | هر جمله نسبت به جملهٔ قبلی در یک مقدار ثابت ضرب می‌شود. |
| جملهٔ عمومی | $a_n = a_1 + (n-1)d$ | $a_n = a_1 q^{n-1}$ |
| رابطهٔ بازگشتی | $a_{n+1} = a_n + d$ | $a_{n+1} = a_n \times q$ |
| رابطهٔ اندیس‌ها | $n+m=p+t \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_t$ | $n+m=p+t \Rightarrow a_n \times a_m = a_p \times a_t$ |
| سه جملهٔ متوالی $(x,y,z)$ | $y = \frac{x+z}{2}$ <br> به y، واسطهٔ حسابی x و z می‌گویند. | $y^2 = xz$ <br> به y، واسطهٔ هندسی x و z می‌گویند. |
| درج k واسطه بین a و b | $d = \frac{b-a}{k+1}$ | $q^{k+1} = \frac{b}{a}$ |
| تعدادی فرد جملهٔ متوالی | مجموع = تعداد × وسطی $\xrightarrow{\text{مثال}} a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8$ | حاصل‌ضرب = (وسطی)$^{\text{تعداد}}$ <br> $\xrightarrow{\text{مثال}} a_7 a_8 a_9 = (a_8)^3$ |
| مجموع n جملهٔ اول | $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ یا $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ | $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$ |

۴ مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n: $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

۵ مجموع مربع اعداد طبیعی از ۱ تا n: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

۶ محاسبهٔ $a_n$ از روی $S_n$: $a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{\text{مثال}} a_8 = S_8 - S_7$

۷ نسبت مجموع ۲n جملهٔ اول به n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1 \xrightarrow{\text{مثال}} \frac{S_{12}}{S_6} = q^6 + 1$

۸ اتحادهایی که در تقسیم داریم و به کمک مجموع جملات دنبالهٔ هندسی قابل اثبات‌اند:

| | بخش‌پذیری $x^n \pm a^n$ بر $x \pm a$ | اتحاد |
|---|---|---|
| n زوج | $x^n - a^n$ بر $x \pm a$ بخش‌پذیر است. | $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ |
| | | $x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots + a^{n-2}x - a^{n-1})$ |
| | $x^n + a^n$ بر $x \pm a$ بخش‌پذیر نیست. | - |
| n فرد | $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است. | $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ |
| | $x^n - a^n$ بر $x + a$ بخش‌پذیر نیست. | - |
| | $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش‌پذیر است. | $x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1})$ |
| | $x^n + a^n$ بر $x - a$ بخش‌پذیر نیست. | - |