آزمون حضوری
شماره پنج

رشته ریاضی

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

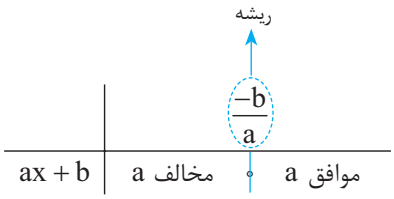
ویژه کنکور
۱۴۰۳

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

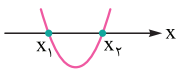
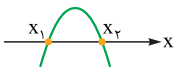
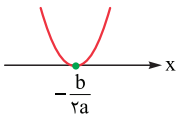
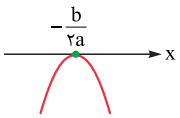
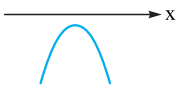
نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
حسابان	حسابان دوازدهم فصل ۱ صفحهٔ ۱ تا ۲۲ حسابان یازدهم فصل ۱، درس۲ و ۳ + فصل ۲ صفحهٔ ۷ تا ۲۲ و ۳۷ تا ۷۰ ریاضی دهم صفحهٔ ۶۹ تا ۱۱۷	۲	۲۷	علی شهرابی	مهدی خوشنویس

تعیین علامت و نامعادله

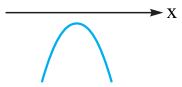
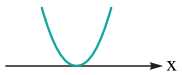
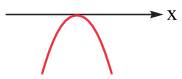
۱ تعیین علامت عبارت درجه‌یک



۲ تعیین علامت عبارت درجه‌دو

علامت دلتا	جدول تعیین علامت	وضعیت نموداری	
		$a>0$	$a<0$
$\Delta>0$	x_1 x_2 ax^2+bx+c | a موافق ∘ a مخالف ∘ a موافق		
$\Delta=0$	$x_1=\frac{-b}{2a}$ ax^2+bx+c | a موافق ∘ a موافق		
$\Delta<0$	ax^2+bx+c | a موافق		

۳ چهار حالت خاص و پرتکرار

	سؤال	شروط	وضعیت نموداری
۱	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره مثبت باشد.	۱) $a>0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xها باشد.	۲) $\Delta<0$	
۲	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره منفی باشد.	۱) $a<0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها باشد.	۲) $\Delta<0$	
۳	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره نامنفی باشد.	۱) $a>0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ زیر محور xها نباشد.	۲) $\Delta\le 0$	
۴	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره نامثبت باشد.	۱) $a<0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ بالای محور xها نباشد.	۲) $\Delta\le 0$	

۴ جواب نامعادلهٔ درجه‌دوم (در حالت $\Delta > 0$)

علامت a	فرم نامعادله	جواب	توضیح فارسی	مثال با جواب
$a > 0$	$ax^2+bx+c>0$	$\mathbb{R}-[x_1,x_2]$	نابین ریشه‌ها	$x^2-2x-15>0 \Rightarrow x>5$ یا $x<-3$
	$ax^2+bx+c<0$	(x_1,x_2)	بین ریشه‌ها	$x^2-2x-15<0 \Rightarrow -3<x<5$
$a < 0$	$ax^2+bx+c>0$	$[x_1,x_2]$	بین ریشه‌ها	$2x-x^2\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 2$
	$ax^2+bx+c<0$	$\mathbb{R}-(x_1,x_2)$	نابین ریشه‌ها	$2x-x^2\leq 0 \Rightarrow x\geq 2$ یا $x\leq 0$

۵ جواب‌های نامعادله‌های درجه‌یک و درجه‌دو به فرم‌های زیر می‌تواند باشد:

	فرم نامعادله	مدل‌های ممکن برای جواب
نامعادلهٔ درجه‌یک	$ax+b>0$ یا $ax+b<0$	$(\frac{-b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{-b}{a})$
	$ax+b\geq 0$ یا $ax+b\leq 0$	$[\frac{-b}{a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{-b}{a}]$
نامعادلهٔ درجه‌دو	$ax^2+bx+c<0$ یا $ax^2+bx+c>0$	$\underbrace{(x_1,x_2)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R}}_{\Delta<0}$ یا $\underbrace{\varnothing}_{\Delta\leq 0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R}-\{x_1\}}_{\Delta=0}$
	$ax^2+bx+c\leq 0$ یا $ax^2+bx+c\geq 0$	$\underbrace{[x_1,x_2]}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R}}_{\Delta\leq 0}$ یا $\underbrace{\varnothing}_{\Delta<0}$ یا $\underbrace{\{x_1\}}_{\Delta=0}$

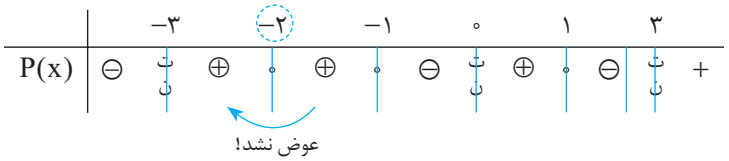
پس اگر جواب نامعادلهٔ $ax^2+bx+c>0$ یا $ax^2+bx+c<0$ به صورت $(-\infty,k)$ یا به صورت $(k,+\infty)$ شد، عبارت ax^2+bx+c باید درجه‌یک باشد؛ یعنی ضریب x^2 صفر است $(a=0)$.

۶ مراحل تعیین علامت سریع با یک مثال

فرض کنید می‌خواهیم عبارت $P(x)=\frac{(x^2-1)(x^2+4x+4)}{x^3-9x}$ را تعیین علامت کنیم.

مرحلهٔ ۱	تمام عبارات را تجزیه می‌کنیم.	$P(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x+2)^2}{x(x-3)(x+3)}$
مرحلهٔ ۲	ریشه‌ها و زوج و فردبودن توانشان را معلوم می‌کنیم.	$P(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x+2)^2}{x(x-3)(x+3)}$ (زوج) ۱ ، ۱- ، ۲- ، ۰ ، ۳ ، ۳-
مرحلهٔ ۳	جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم.	

	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۳
P(x)	ت ن	۰	۰	ت ن	۰	ت ن

مرحلهٔ ۴	از خانهٔ سمت راست جدول شروع می‌کنیم. علامت P به ازای $x=۴$ را پیدا می‌کنیم.	$P(x)=\dfrac{\overbrace{(x-۱)}^{+}\overbrace{(x+۱)}^{+}\overbrace{(x+۲)^{۲}}^{+}}{\underbrace{x}_{+}\underbrace{(x-۳)}_{+}\underbrace{(x+۳)}_{+}} \Rightarrow P(۴)>۰$
مرحلهٔ ۵	پس خانهٔ سمت راست، + است. از آن‌جا به سمت چپ حرکت می‌کنیم و یکی‌درمیان علامت‌ها را عوض می‌کنیم. فقط وقتی از $\underbrace{x=-۲}_{\text{(توان زوج)}}$ رد می‌شویم، علامت عوض نمی‌شود.	

۷ نامعادلات سادهٔ قدرمطلقی

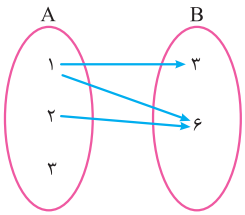
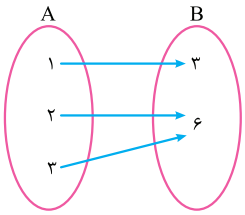
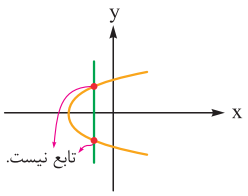
	$a>۰$	$a=۰$	$a<۰$
$\lvert u\rvert \geq a$	$u\geq a$ یا $u\leq -a$	$u\in\mathbb{R}$	$u\in\mathbb{R}$
$\lvert u\rvert \leq a$	$-a\leq u\leq a$	$u=۰$	$\varnothing$
$\lvert u\rvert > a$	$u>a$ یا $u<-a$	$\mathbb{R}-\{u=۰\}$	$u\in\mathbb{R}$
$\lvert u\rvert < a$	$-a<u<a$	$\varnothing$	$\varnothing$

تابع

مقدمات (تعریف تابع، دامنه و تساوی توابع)

۱ تابع دستگاهی است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد.

۲ روش‌های نمایش تابع:

	روش نمایش	شرط تابع‌بودن	مثال
۱	پیکانی (نمودار وِن)	از هر عضو مجموعهٔ مبدأ، باید دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.	 تابع نیست.  تابع است.
۲	زوج مرتبی	مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها نباید برابر باشد. اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد.	تابع است. $\{(۱,۲),(۲,۳),(-۱,۳)\} \rightarrow$ تابع نیست. $\{(۱,۲),(۳,۵),(۱,۶)\} \rightarrow$
۳	جدولی	مؤلفه‌های سطر مربوط به xها نباید یکسان باشد. اگر مؤلفه‌های x یکسان داشتیم، مؤلفه‌های y شان هم باید یکسان باشد.	$\begin{array}{c\|cccc} x & ۲ & ۳ & ۵ & ۳ \\ \hline y & -۱ & ۷ & ۴ & ۲ \end{array}$ تابع نیست.
۴	نموداری	اگر خطی موازی محور yها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار مربوط به یک تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، تابع است.	 تابع نیست.
۵	توصیفی	با توجه به جملهٔ توصیفی، اگر به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی داشته باشیم، آن رابطه تابع است.	رابطه‌ای که به هر فرد، کد ملی‌اش را نسبت می‌دهد. { ورودی: انسان‌ها، خروجی: کد ملی } چون هر شخص نمی‌تواند بیش از یک کد ملی داشته باشد، پس تابع است.
۶	ضابطه‌ای	اگر به ازای هر x، فقط یک خروجی داشته باشیم، تابع است. روابطی که در آن‌ها y تنها می‌شود، حتماً تابع هستند؛ مثل $\underset{\text{تنها}}{y} = \log_۲ x + \cos\frac{۱}{x}$	در رابطهٔ $y^۲ = x + ۱$، اگر $x = ۱$ را بدهیم، ۲تا خروجی می‌دهد: $y^۲ = ۲ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲} \rightarrow$ تابع نیست.

۳ تعداد توابع:

تعداد کل توابع از مجموعهٔ nعضوی به مجموعهٔ mعضوی	m^n
تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ nعضوی به مجموعهٔ mعضوی $(m \geq n)$	$P(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}$

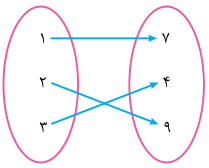
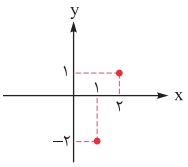
۴ **سؤالات تابع‌نویسی:** از ما می‌خواهد عبارتی (مثل محیط، مساحت و ...) را برحسب یک متغیر (مثل ضلع، شعاع و ...) بنویسیم.

مثال تابع مساحت مربع برحسب محیط آن؟

پاسخ می‌دانیم $P=۴a$ و $S=a^۲$ است. از $P=۴a$ نتیجه می‌گیریم $a=\frac{P}{۴}$. حالا این تساوی را در رابطهٔ مساحت قرار می‌دهیم:

$$S=a^۲ \xrightarrow{a=\frac{P}{۴}} S=(\frac{P}{۴})^۲ \Rightarrow S=\frac{P^۲}{۱۶} \xrightarrow{\text{به شکل تابع}} S(P)=\frac{P^۲}{۱۶}$$

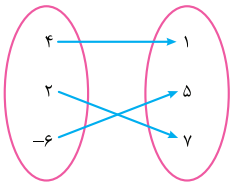
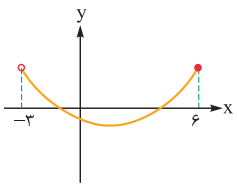
۵ **مقدار تابع در یک نقطه:**

روش نمایش تابع	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی	ضابطه‌ای
مثال		$f=\{(۱,۲),(۲,۶)\}$	x: ۱ ۲ ۳ y: −۳ ۶ ۲		f تابعی است که به هر عددی، مکعبش را نسبت می‌دهد.	$f(x)=\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۲x+۵}}$
مقدار تابع در $x=۲$	$f(۲)=۹$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۱$	$f(۲)=۲^۳=۸$	$f(۲)=\frac{۵}{۳}$

۶ نقاط برخورد مهم:

نقطهٔ برخورد تابع f با ...	راه حل	مختصات نقطه (نقاط)
محور xها	«y را صفر می‌دهیم» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$»	جواب‌های $f(x)=۰$ $(\ ,۰)$
محور yها	«x را صفر می‌دهیم» یا «مقدار $f(۰)$»	$(۰,f(۰))$
تابع g	حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ $\xleftarrow{\text{جواب‌ها}}$ $x_۱,\ldots$	$(x_۱,f(x_۱)),\ldots$
نیمساز ربع اول و سوم	حل معادلهٔ $f(x)=x$ $\xleftarrow{\text{جواب‌ها}}$ $x_۱,\ldots$	$(x_۱,x_۱),\ldots$

۷ محاسبهٔ دامنه در نمایش مختلف یک تابع (به‌جز نمایش ضابطه‌ای):

	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی
روش محاسبهٔ دامنه	همهٔ اعدادی که از آن‌ها فلش خارج شده	همهٔ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها	همهٔ اعداد سطر مربوط به x	تصویر نمودار روی محور xها	ورودی‌ها!
مثال		$f=\{(۵,۲),(۱,۳)\}$	x: ۱ −۴ ۶ y: ۶ ۵ ۹		تابعی که به هر عدد مربع کامل دورقمی، جذرش را نسبت می‌دهد.
دامنه	$D=\{۴,۲,-۶\}$	$D_f=\{۵,۱\}$	$D=\{۱,-۴,۶\}$	$D=(-۳,۶]$	دامنه $=\{۱۶,۲۵,\ldots,۸۱\}$

۸ محاسبهٔ دامنه در نمایش ضابطه‌ای:

اسم تابع	ضابطه	دامنه
چندجمله‌ای	$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots$	$\mathbb{R}$
کسری	$f(x)=\frac{A}{B}$	$\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$
رادیکال با فرجهٔ زوج	$f(x)=\sqrt[2n]{A}$	جواب نامعادلهٔ $A\geq 0$
رادیکال با فرجهٔ فرد	$f(x)=\sqrt[2x+1]{A}$	همان دامنهٔ A
لگاریتم	$f(x)=\log_B A$	$(A>0)\cap(B>0)\cap(B\neq 1)$
سینوس و کسینوس	$\sin A$ یا $\cos A$	همان دامنهٔ A
تانژانت	$\tan A$	$A\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$
کتانژانت	$\cot A$	$A\neq k\pi$

۹ دو نکته در مورد دامنهٔ توابع کسری و رادیکالی:

الف) اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\text{چندجمله‌ای}}{ax^2+bx+c}$ به صورت $\mathbb{R}-\{k\}$ باشد، «$\Delta_{\text{مخرج}}=0$» و «$k=\frac{-b}{2a}$» است.

ب) برای دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$، چند حالت می‌توانیم داشته باشیم:

	شرط	دامنه
عبارت زیر رادیکال درجه ۲ است.	$a>0,\Delta<0$	$\mathbb{R}$
	$a>0,\Delta>0$	$\mathbb{R}-(x_1,x_2)$
	$a<0,\Delta<0$	$\varnothing$
	$a<0,\Delta=0$	$\{k\}$
	$a<0,\Delta>0$	$[x_1,x_2]$
عبارت زیر رادیکال درجه‌یک است.	$x_1=\frac{-c}{b},b>0,a=0$	$[x_1,+\infty)$
	$x_1=\frac{-c}{b},b<0,a=0$	$(-\infty,x_1]$

۱۰ شروط تساوی دو تابع f و g:

۱	$D_f=D_g$ (دامنه‌ها قبل از ساده‌کردن تابع باید محاسبه شوند.)
۲	ضابطه‌های دو تابع را بتوانیم با کارهای جبری و ... مثل هم کنیم.

۱۱ نکات مهم در تساوی توابع:

۱	دامنهٔ تابع به فرم $y=\sqrt{AB}$ از حل نامعادلهٔ $AB\geq 0$ و دامنهٔ تابع به فرم $y=\sqrt{A}\times\sqrt{B}$ از اشتراک جواب نامعادله‌های $A\geq 0$ و $B\geq 0$ به دست می‌آید.
۲	توابع $y=A$ و $y=\frac{AB}{B}$ به شرطی با هم برابرند که B ریشه‌ای نداشته باشد.
۳	توابع $f(x)=\begin{cases}\frac{AB}{B} & B\neq 0\\ C & B=0\end{cases}$ و $g(x)=\cdots$ به شرطی برابرند که $\begin{cases}\text{اولاً: } g(x)=A\\ \text{ثانیاً: مقدار } g(x) \text{ به ازای ریشهٔ } B=0 \text{، برابر با } C \text{ شود.}\end{cases}$
۴	$\log x^2=2\log\lvert x\rvert$ و $\log x^3=3\log x$

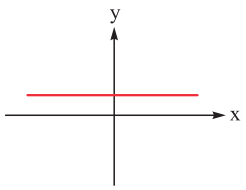
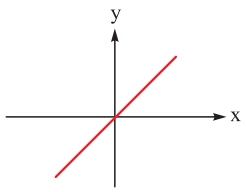
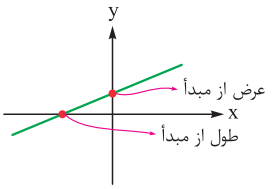
۱۲ نمایش ضابطه‌ای یک تابع:

نمایش ضابطه‌ای (به شکل کامل)	جزئیات
$\begin{cases}f:A\to B\\ f(x)=\cdots\end{cases}$	A: دامنه
	B: هم‌دامنه (هم‌دامنه $\subseteq$ برد)

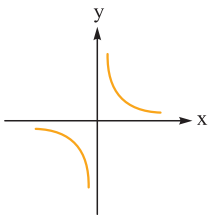
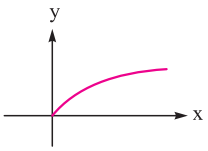
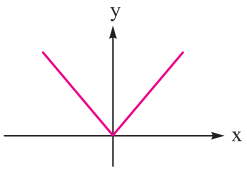
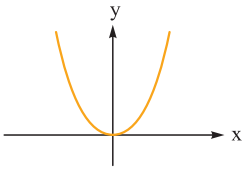
۱۳ **معادلات و توابع:** اگر در رابطه‌ای برحسب x و y، xهای پیدا کنیم که به ازای آن بیش از یک مقدار برای y پیدا شود، آن رابطه تابع نیست؛ مثلاً در رابطهٔ $y^3-y=x$ به ازای $x=0$، سه خروجی $y=0$، $y=1$ و $y=-1$ داریم، پس تابع نیست.

انواع تابع

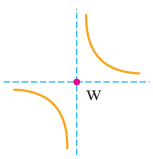
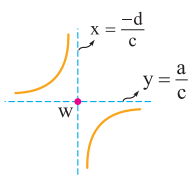
۱ **چند تابع خاص**

تابع	ضابطه	نکته		نمودار
ثابت	$f(x)=\underset{\text{عدد}}{c}$	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج مرتب‌ها با هم برابر است. در نمایش ضابطه‌ای، ضرایب جملات شامل x باید صفر باشد.		یک خط افقی 
همانی	$f(x)=x$	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. در نمایش ضابطه‌ای، ضریب x، یک و ضریب سایر جملات صفر است.		نیمساز ربع اول و سوم 
خطی	$f(x)=mx+\underset{\text{عرض از مبدأ}}{h}$	محل برخورد با محور yها $\to h$	$m=\underset{\text{شیب}}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$	

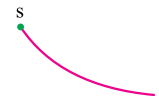
۲ چند تابع معروف با نمودارشان:

ضابطه	$y=\frac{1}{x}$	$y=\sqrt{x}$	$y=\lvert x\rvert$	$y=x^2$
نمودار				
دامنه	$\mathbb{R}-\{0\}$	$[0,+\infty)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
برد	$\mathbb{R}-\{0\}$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$

۳ نکات مهم تابع هموگرافیک با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$:

شرط هموگرافیک‌بودن	$ad-bc\neq 0, c\neq 0$	
دامنه	$\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$	
برد	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$	
معادلهٔ خط‌چین عمودی	$x=\frac{-d}{c}$	
معادلهٔ خط‌چین افقی	$y=\frac{a}{c}$	
ضابطهٔ وارون	$\frac{-dx+b}{cx-a}$	
شرط برابری f و f^{-1}	$a+d=0$	
مرکز تقارن	$w=(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$	
محورهای تقارن	دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از نقطهٔ w	
شکل تابع	 $ad-bc<0$	 $ad-bc>0$

۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=a\sqrt{bx+c}+d$ به یکی از چهار شکل زیر است:

	علامت a	علامت b	شکل نمودار	مختصات نقطهٔ شروع (S)
۱	+	+		$(\frac{-c}{b}, d)$ ریشهٔ داخل رادیکال، عدد بیرونی
۲	+	−		
۳	−	+		
۴	−	−		

تبدیل نمودار توابع

۵ انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض:

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.
قرینه‌یابی	نسبت به محور xها	$-f(x)$	کل ضابطه را قرینه می‌کنیم.
	نسبت به محور yها	$f(-x)$	جای xها، $-x$ می‌گذاریم.
	نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
	نسبت به خط $x=k$	$f(۲k-x)$	جای xها، $۲k-x$ می‌گذاریم.
	نسبت به خط $y=k$	$۲k-f(x)$	
انبساط و انقباض افقی	انبساط با ضریب ۲	$f(\frac{x}{۲})$	جای xها، $\frac{x}{۲}$ می‌گذاریم.
	انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$	$f(۲x)$	جای xها، $۲x$ می‌گذاریم.
انبساط و انقباض عمودی	انبساط با ضریب ۲	$۲f(x)$	کل ضابطه ضربدر ۲ می‌شود.
	انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}f(x)$	کل ضابطه ضربدر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

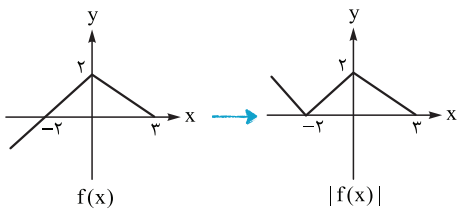
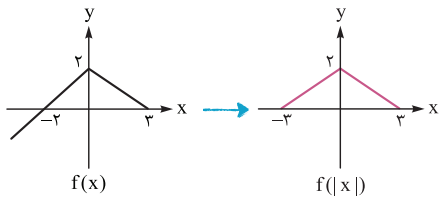
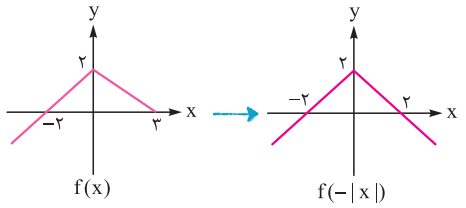
۶ برای تبدیل $y=f(x)$ به $y=\underset{\text{سوم}}{a}f(\underset{\text{دوم}}{b}x+\underset{\text{اول}}{c})+\underset{\text{چهارم}}{d}$، ترتیب مراحل این‌گونه است:

$c \to b \to a \to d$

۷ محاسبهٔ دامنه و برد تابع $y=af(bx+c)+d$ از روی دامنه و برد تابع $y=f(x)$:

	بی‌اثرها	مراحل محاسبهٔ دامنه یا برد جدید
دامنهٔ جدید	a,d	۱) دو سر بازهٔ دامنه را c واحد به چپ (یا راست) می‌بریم. ۲) دو سر بازه را در $\frac{1}{b}$ ضرب می‌کنیم.
برد جدید	b,c	۱) دو سر بازهٔ برد را در a ضرب می‌کنیم. ۲) پس دو سر بازه را به علاوهٔ d می‌کنیم.

۸ اثر قدرمطلق روی نمودار:

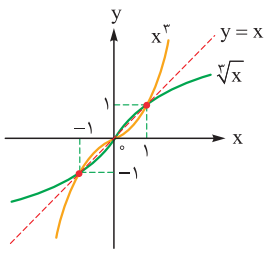
ضابطه	چه اتفاقی برای نمودار $f(x)$ می‌افتد؟	تغییرات ضابطه	مثال نموداری
$\lvert f(x)\rvert$	قسمت زیر محور xها، نسبت به محور xها قرینه می‌شود و به قسمت بالا و روی محور x ها دست نمی‌زنیم.	کل ضابطه داخل قدرمطلق می‌رود.	
$f(\lvert x\rvert)$	مرحلهٔ ۱: سمت چپ محور yها را پاک می‌کنیم. مرحلهٔ ۲: قرینهٔ سمت راست محور yها نسبت به محور yها را در سمت چپش می‌کشیم.	جای xها، $\lvert x\rvert$ می‌گذاریم.	
$f(-\lvert x\rvert)$	مرحلهٔ ۱: سمت راست محور yها را پاک می‌کنیم. مرحلهٔ ۲: قرینهٔ سمت چپ محور yها نسبت به محور yها را در سمت راستش می‌کشیم.	جای xها، $-\lvert x\rvert$ می‌گذاریم.	

– تابع چندجمله‌ای و تابع درجه۳ –

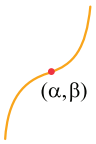
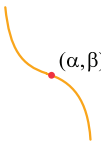
۱ توابع چندجمله‌ای:

				مثال
ضابطه	$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-1}+\cdots$			$f(x)=2x^5-8x^4+x-7$
درجه	بزرگ‌ترین توان x، درجهٔ تابع چندجمله‌ای است.			درجهٔ تابع بالایی، ۵ است.
توابع معروف	$y=\overset{c\neq 0}{c}$ درجه‌صفر (ثابت)	$y=ax+b$ درجه‌یک (خطی)	$y=ax^2+bx+c$ درجه‌دو (سهمی)	
نکات	۱) دامنه‌شان $\mathbb{R}$ است.			$f(x)=x^8-2x^3+1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$
	۲) اگر درجه فرد باشد، بردش هم $\mathbb{R}$ است.			$f(x)=x^7-3x^6+2x^2-1 \Rightarrow R_f=\mathbb{R}$
	۳) اگر درجه زوج باشد، بردش به صورت $[k,+\infty)$ یا $(-\infty,k]$ است.			$f(x)=x^2-6x+1$
	۴) برای تابع $y=0$، درجه تعریف نمی‌شود.			

۲ تابع لر و وارونش:

ضابطه	نمودار	دامنه و برد
$f(x)=x^{۳}$		$D_f=R_f=\mathbb{R}$
$f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$		$D_{f^{-۱}}=R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

۳ نمودار تابع درجه‌سوم $y=a(x-\alpha)^{۳}+\beta$:

علامت a	$a>۰$	$a<۰$
یکنوایی	اکیداً صعودی	اکیداً نزولی
مرکز تقارن	(α,β)	(α,β)
نمودار		

۴ برای ساده‌کردن ضابطهٔ توابع درجه۳، باید اتحاد مکعب را بلد باشیم:

صورت کلی اتحاد مکعب	$(a\pm b)^{۳}=a^{۳}\pm ۳a^{۲}b+۳ab^{۲}\pm b^{۳}$
مثال‌هایی که در این قسمت زیاد به کار می‌آیند.	$(x\pm ۱)^{۳}=x^{۳}\pm ۳x^{۲}+۳x\pm ۱$
	$(x\pm ۲)^{۳}=x^{۳}\pm ۶x^{۲}+۱۲x\pm ۸$
	$(۲x\pm ۱)^{۳}=۸x^{۳}\pm ۱۲x^{۲}+۶x\pm ۱$

اعمال جبری روی توابع

۱ چهار عمل اصلی روی توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

اسم عمل	نماد	تعریف ریاضی	دامنه
جمع دو تابع	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f\cap D_g$
تفریق دو تابع	$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_f\cap D_g$
ضرب دو تابع	fg	$(fg)(x)=f(x).g(x)$	$D_f\cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$

۲ اعمال جبری در نمایش زوج مرتبی با یک مثال:

مثال فرض کنید $f=\{(۱,۴),(۲,۷),(۳,۱۰)\}$ و $g=\{(۲,-۱),(۳,۶),(۴,۱)\}$ باشد و ما $f+۲g$ را بخواهیم.

مرحلهٔ ۱	اشتراک دامنه‌های f و g را می‌نویسیم: $D_{f+۲g}=\{۲,۳\}$
مرحلهٔ ۲	مقدار $f+۲g$ را به ازای xهای دامنه به دست می‌آوریم: $x=۲: f(۲)+۲g(۲)=۷+۲(-۱)=۵ \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (۲,۵)$ $x=۳: f(۳)+۲g(۳)=۱۰+۲(۶)=۲۲ \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (۳,۲۲)$
مرحلهٔ ۳	$f+۲g=\{(۲,۵),(۳,۲۲)\}$

۳ محاسبهٔ برد توابع $f\overset{+}{\underset{\div}{\times}}g$:

مرحلهٔ ۱	ابتدا دامنهٔ تابع $f\overset{+}{\underset{\div}{\times}}g$ را حساب می‌کنیم.
مرحلهٔ ۲	ضابطهٔ $f\overset{+}{\underset{\div}{\times}}g$ را تشکیل می‌دهیم.
مرحلهٔ ۳	برد تابع $f\overset{+}{\underset{\div}{\times}}g$ را در دامنه‌اش به دست می‌آوریم.

ترکیب توابع

۱ نکات اولیهٔ fog:

معادل fog(x)	$f(g(x))$
ضابطهٔ fog(x)	جای xهای تابع f، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.
مقدار fog(a)	دو مرحله دارد: اول $g(a)$ (مثلاً می‌شود k)، بعد $f(k)$
دامنهٔ fog	**راه اول:** $D_{fog}=\{\underbrace{x\in D_g}_{\text{شرط (۱)}}\cap\underbrace{g(x)\in D_f}_{\text{شرط (۲)}}\}$
	راه دوم: ضابطهٔ fog را بدون هیچ ساده‌کردنی تشکیل می‌دهیم و سپس دامنهٔ آن را حساب می‌کنیم.
برد fog	مرحلهٔ ۱: برد تابع g را حساب می‌کنیم (مثلاً می‌شود بازهٔ I).
	مرحلهٔ ۲: برد تابع f با دامنهٔ I را حساب می‌کنیم.

۲

دامنهٔ fog زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع داخلی یعنی g است.	$D_{fog}\subseteq D_g$
برد fog زیرمجموعهٔ برد تابع بیرونی یعنی f است.	$R_{fog}\subseteq R_f$

۳ وقتی از بین f، g و fog، ۲تا را داریم و سومی را می‌خواهیم:

f	g	fog	راه حل
✓	✓	؟	باید $f(g(x))$ را تشکیل دهیم.
؟	✓	✓	$g(x)$ را مساوی t قرار می‌دهیم. x را برحسب t حساب می‌کنیم و...
✓	؟	✓	در ضابطهٔ f، جای xهایش $g(x)$ قرار می‌دهیم. عبارت به دست آمده را با fog داده‌شده برابر قرار می‌دهیم.

۴ ترکیب f و f^{-1}، همواره تابعی همانی است.

	ضابطه	دامنه	نمودار
حالت ۱	$(fof^{-1})(x)=x$	$D_{f^{-1}}=R_f$	نیمساز ناحیهٔ اول و سوم با دامنهٔ R_f
حالت ۲	$(f^{-1}of)(x)=x$	D_f	نیمساز ناحیهٔ اول و سوم با دامنهٔ D_f

۵ شرط لازم و کافی برای برابربودن fof^{-1} و $f^{-1}of$ آن است که $D_f=R_f$.

یکنوایی

۱ انواع یکنوایی:

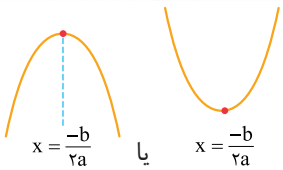
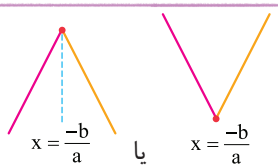
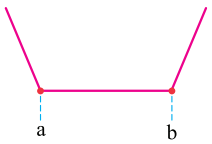
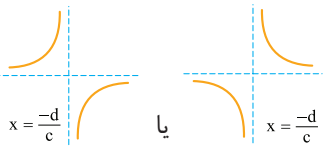
	نوع یکنوایی	وضعیت نمودار	مثال نموداری	تعریف ریاضی
یکنوا اکید	صعودی اکید	فقط رو به بالا می‌رود.		$a>b \Leftrightarrow f(a)>f(b)$
	نزولی اکید	فقط رو به پایین می‌رود.		$a>b \Leftrightarrow f(a)<f(b)$
یکنوا	صعودی	یا رو به بالا می‌رود یا ثابت است.		$a>b \Rightarrow f(a)\geq f(b)$
	نزولی	یا رو به پایین می‌رود یا ثابت است.		$a>b \Rightarrow f(a)\leq f(b)$
ثابت	هم صعودی هم نزولی	روی یک خط افقی است.		$\forall a,b\in D_f \Rightarrow f(a)=f(b)$
غیریکنوا	قسمتی رو به بالا و قسمتی رو به پایین			

۲ تابعی که هم صعودی باشد هم نزولی، تابع ثابت است.

۳ معروف‌ترین توابع یکنوا:

اسم تابع	ضابطه	شرط اکیداً صعودی‌بودن	شرط اکیداً نزولی‌بودن
خطی	$y = mx + h$	$m > 0$	$m < 0$
درجه۳	$y = a(x+\alpha)^3 + \beta$	$a > 0$	$a < 0$
رادیکالی	$y = \sqrt{ax+b} + c$	$a > 0$	$a < 0$
نمایی	$y = a^x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
لگاریتمی	$y = \log_a x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
آبشاری	$y = \lvert x-a \rvert - \lvert x-b \rvert$	$b \geq a$ (صعودی)	$a \geq b$ (نزولی)

۴ بازه‌های یکنوایی توابع غیریکنوای معروف:

تابع	ضابطه	نمودار	نقطهٔ مرزی بازه‌های یکنوایی	بازه‌های یکنوایی
سهمی	$y = ax^2 + bx + c$		رأس	$(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ یا $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$
قدرمطلقی‌خطی	$y = \pm \lvert ax+b \rvert$		ریشهٔ داخل قدرمطلق	$(-\infty, \frac{-b}{a}]$ یا $[\frac{-b}{a}, +\infty)$
گلدانی	$y = \lvert x-a \rvert + \lvert x-b \rvert$		ریشه‌های داخل قدرمطلق	اکید: $(-\infty, a]$ یا $[b, +\infty)$ غیراکید: $(-\infty, b]$ یا $[a, +\infty)$
هموگرافیک	$y = \frac{ax+b}{cx+d}$		ریشهٔ مخرج	$(-\infty, \frac{-d}{c})$ یا $(\frac{-d}{c}, +\infty)$

۵ برای بررسی یکنوایی تابع $f(x)=ax+b+|a'x+b'|$، اول آن را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} mx+h & x<\frac{-b'}{a'} \\ m'x+h' & x\geq\frac{-b'}{a'} \end{cases}$$

حالا داریم:

علامت شیب ضابطه‌ها		نمودار	وضعیت یکنوایی	نتیجه
$m'>0$	$m>0$		اکیداً صعودی	شرط اکیداً یکنوایی: $mm'>0$
$m'<0$	$m<0$		اکیداً نزولی	
$m'<0$	$m>0$		غیریکنوا	شرط غیریکنوایی: $mm'<0$
$m'>0$	$m<0$		غیریکنوا	
$m'>0$	$m=0$		صعودی	شرط یکنوایی: $mm'\geq 0$
$m'=0$	$m>0$		صعودی	
$m'<0$	$m=0$		نزولی	
$m'=0$	$m<0$		نزولی	

۶ اگر f تابعی اکیداً یکنوا باشد، برای حل نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$ دو حالت پیش می‌آید:

f اکیداً صعودی	در نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$، با حذف fها، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند: $a>b$
f اکیداً نزولی	در نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$، با حذف fها، جهت نامساوی تغییر می‌کند: $a<b$

۷ **یکنوایی و اعمال جبری:**

f	g	f+g	f−g	fg
ص	ص	ص		
ص	ن		ص	
ن	ص		ن	
ن	ن	ن		

تذکر خانه‌هایی که خالی هستند، هر سه حالت (صعودی، نزولی و غیریکنوا) می‌تواند برایشان رخ دهد.

۸ **تعیین وضعیت یکنوایی fog:** اگر صعودی‌بودن را + و نزولی‌بودن را − در نظر بگیریم، برای تعیین وضعیت یکنوایی fog، علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم؛ مثلاً اگر f صعودی و g نزولی باشد، آن‌گاه:

$\underset{+}{f}\,o\,\underset{-}{g} \Rightarrow$ مثبت در منفی می‌شود منفی $\xrightarrow{\text{پس}}$ fog نزولی است.

fog	g	f
صعودی	صعودی	صعودی
نزولی	نزولی	صعودی
نزولی	صعودی	نزولی
صعودی	نزولی	نزولی

۹ اگر $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی (نزولی) باشد، آن‌گاه:

- $f(-x)$ و $-f(x)$، اکیداً نزولی‌اند (صعودی‌اند).
- تابع $\frac{1}{f(x)}$ به شرطی که برد f تغییر علامت ندهد، اکیداً نزولی (صعودی) است، ولی اگر f تغییر علامت بدهد، تابع $\frac{1}{f}$ غیریکنوا می‌شود.

تابع یک‌به‌یک

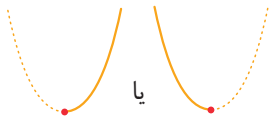
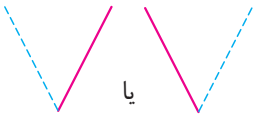
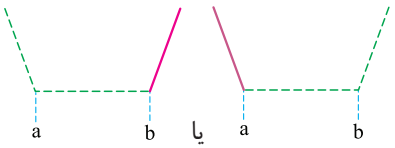
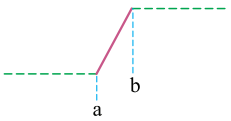
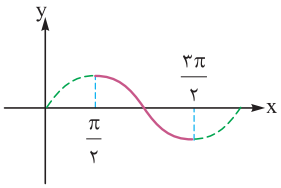
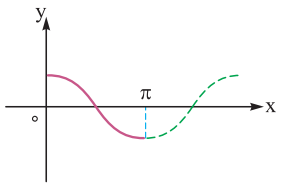
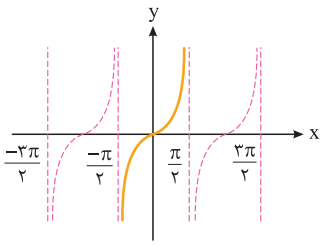
۱ به تابعی که در خروجی‌هایش، عدد تکراری نداریم، یک‌به‌یک می‌گوییم.

نمایش	شرط یک‌به‌یک بودن
زوج مرتبی	مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها باید متفاوت باشند.
جدولی	اعداد سطر دوم جدول باید متفاوت باشند.
پیکانی	به هیچ عددی نباید بیشتر از یک پیکان وارد شود.
نموداری	خطی موازی محور xها نباید نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.
ضابطه‌ای	$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

۲ **توابع یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک معروف:**

اسم تابع	یک‌به‌یک		غیر یک‌به‌یک	
چندجمله‌ای	خطی با شیب غیرصفر		ثابت	چندجمله‌ای درجه زوج
درجه ۳	$a(x-b)^3+c$	ax^3+bx (a و b ناهم‌علامت)	ax^3+bx (a و b هم‌علامت)	ax^3+bx^2
$\frac{ax+b}{cx+d}$	با شرط $ad-bc\neq 0$ (هموگرافیک می‌شه)		با شرط $ad-bc=0$ (ثابت می‌شه)	
براکتی‌ها	$ax+b[x]$ (a و b هم‌علامت)		$a[x]+b$	$ax-[ax]$
رادیکالی و قدرمطلقی	$\sqrt{ax+b}$		$\lvert ax+b\rvert$	$\lvert x+a\rvert \pm \lvert x+b\rvert$ (گلدانی و سرسره‌ای)
سایر	a^x (نمایی)	$\log_a x$ (لگاریتم)	مثلثاتی‌ها: $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$ و $\cot x$	

۳ یک‌به‌یک کردن توابع غیر یک‌به‌یک با محدودکردن دامنه:

ضابطه	بزرگ‌ترین بازهٔ یک‌به‌یکی	توضیح	نمودار
ax^2+bx+c	$x \le \frac{-b}{2a}$ یا $x \ge \frac{-b}{2a}$	xهای قبل یا بعد از x_S	
$\lvert ax+b\rvert+c$	$x \le \frac{-b}{a}$ یا $x \ge \frac{-b}{a}$	xهای قبل یا بعد از ریشهٔ قدرمطلق	
$\lvert x-a\rvert+\lvert x-b\rvert$ (b>a)	$x \le a$ یا $x \ge b$	xهای قبل از ریشهٔ کوچک‌تر یا بعد از ریشهٔ بزرگ‌تر	
$\lvert x-a\rvert-\lvert x-b\rvert$ (b>a)	$a \le x \le b$	xهای بین ریشه‌ها	
$\sin x$	مثلاً $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$	xهای بین دو min و max متوالی	
$\cos x$	مثلاً $0 \le x \le \pi$	xهای بین دو min و max متوالی	
$\tan x$	مثلاً $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	xهای بین دو خط‌چین عمودی	

۴ رابطهٔ یکنوایی، یک‌به‌یک بودن و پیوستگی:

	رابطه	خلاصهٔ رابطه!
۱	هر تابع اکیداً یکنوایی، یک‌به‌یک است.	اکیداً یکنوا ⟸ یک‌به‌یک
۲	هر تابع یک‌به‌یک و پیوسته‌ای، اکیداً یکنواست.	یک‌به‌یک + پیوسته ⟸ اکیداً یکنوا

تابع وارون

۱ نکات اولیهٔ تابع وارون:

۱	اگر نقطهٔ (a,b) روی f باشد، نقطهٔ (b,a) روی f^{-1} است و برعکس.
۲	$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$
۳	$R_{f^{-1}}=D_f$ و $D_{f^{-1}}=R_f$
۴	نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است.
۵	شرط وارون‌پذیری، یک‌به‌یک بودن است.

۲ برای محاسبهٔ $f^{-1}(k)$، بهترین راه این است که معادلهٔ $f(x)=k$ را حل کنیم. جواب این معادله، همان $f^{-1}(k)$ می‌شود؛ مثلاً اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد و ما $f^{-1}(12)$ را بخواهیم، معادلهٔ $x+\sqrt{x}=12$ را حل می‌کنیم که جوابش می‌شود ۹.

۳

ناحیه‌ای که نمودار f در آن است.	۱	۲	۳	۴
ناحیه‌ای که نمودار f^{-1} در آن قرار می‌گیرد.	۱	۴	۳	۲

۴ مراحل به دست آوردن ضابطهٔ وارون:

۱) x را برحسب y می‌نویسیم (باید x تنها شود).

۲) جای x و y را عوض می‌کنیم.

۵ طریقهٔ محاسبهٔ ضابطهٔ وارون توابع مهم:

اسم تابع	ضابطه	ضابطهٔ وارون (یا طریقهٔ محاسبه)	نکات
خطی	$ax+b$	$\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$	توابع خطی $y=x$ و $y=-x+b$، با وارونشان برابرند.
سهمی	$a(x-x_S)^2+y_S$	باید ابتدا مربع کامل کنید.	در دامنه‌های $x\ge x_S$ یا $x\le x_S$ وارون‌پذیر است.
درجه۳	$k(x+a)^3+b$	باید از اتحادهای مکعب ستون بعدی کمک بگیرید.	$(x\pm1)^3=x^3\pm3x^2+3x\pm1$ $(x\pm2)^3=x^3\pm6x^2+12x\pm8$
هموگرافیک	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{-dx+b}{cx-a}$	$a+d=0 \Leftrightarrow f=f^{-1}$

حواستان باشد که دامنهٔ f^{-1}، برد f می‌شود و معمولاً بهترین راه برای محاسبهٔ $D_{f^{-1}}$ (یا همان R_f)، استفاده از نمودار f است.

۶ راه‌های به دست آوردن نقطه (یا نقاط) برخورد f و f^{-1}:

	روش	توضیح روش
۱	ضابطه‌ای	ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم و بعدش معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم.
۲	نموداری	نمودار f را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار f^{-1} به دست آید. تعداد نقاط برخوردشان معلوم می‌شود.
۳	برخورد با نیمساز ربع اول و سوم	اگر f صعودی اکید باشد، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=x$، طول نقاط برخورد f و f^{-1} است.

۷ محاسبهٔ $(fog^{-1})(a)$ یا $(f^{-1}og)(a)$ یا $(f^{-1}og^{-1})(a)$:

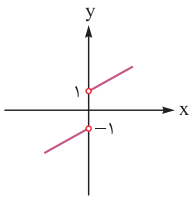
برای محاسبهٔ همهٔ عبارات صفحهٔ قبل، دو مرحله داریم؛ برای مثال $(f^{-1}og^{-1})(a)$ را توضیح می‌دهیم.

مرحلهٔ ۱: اول باید $g^{-1}(a)$ را حساب کنیم. اگر ضابطهٔ g را داریم، بهترین راه، حل معادلهٔ $g(x)=a$ است.

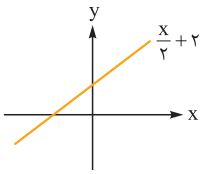
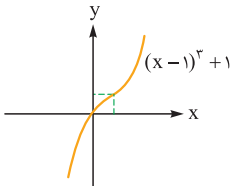
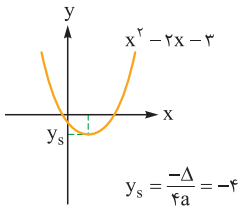
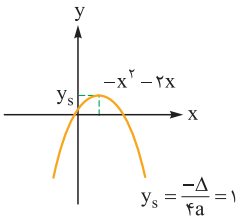
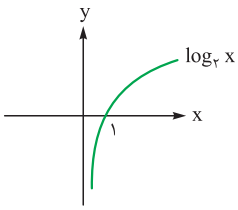
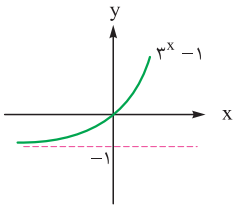
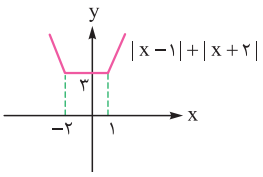
مرحلهٔ ۲: باید $f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(a)}_{\text{جوابش در مرحلهٔ قبل b شده}})$ را حساب کنیم. اگر ضابطهٔ f را داریم، بهترین راه، حل معادلهٔ $f(x)=b$ است.

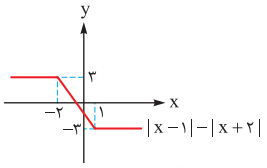
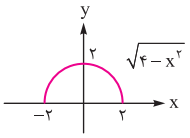
برد

۱ **روش‌های محاسبهٔ برد:**

روش	توضیح	مثال
رسم نمودار	اگر نمودار تابع را بلد باشیم، بهترین روش است.	$f(x)=x+\frac{\lvert x\rvert}{x}=\begin{cases}x+1 & x>0\\ x-1 & x<0\end{cases}\xrightarrow{\text{نمودار}}$  $\xrightarrow{\text{برد}}\mathbb{R}-[-1,1]$
ساختن y به کمک نامساوی‌ها	$(ax+b)^2\ge 0$ ، $\lvert ax+b\rvert\ge 0$ ، $\sqrt{ax+b}\ge 0$	$y=-\lvert 2x+3\rvert+4\xrightarrow{\text{محاسبهٔ برد}}\lvert 2x+3\rvert\ge 0$ $\xrightarrow{\text{قرینه}}-\lvert 2x+3\rvert\le 0\xrightarrow{+4}-\lvert 2x+3\rvert+4\le 4$ $\xrightarrow{\text{برد}}(-\infty,4]$
	$-1\le\sin x\le 1$ ، $-1\le\cos x\le 1$	$y=2\sin x+3\xrightarrow{\text{محاسبهٔ برد}}-1\le\sin x\le 1$ $\xrightarrow{\times 2}-2\le 2\sin x\le 2\xrightarrow{+3}1\le y\le 5\xrightarrow{\text{برد}}[1,5]$
	$0\le u-[u]<1$ ، $[u]+[-u]=\begin{cases}0 & u\in\mathbb{Z}\\ -1 & u\notin\mathbb{Z}\end{cases}$	$y=2x-2[x+1]\xrightarrow{\text{محاسبهٔ برد}}y=2x-2[x]-2$ $=2(\underbrace{x-[x]}_{0\le\ <1})-2\xrightarrow{\text{برد}}[-2,0)$ ($0\le\ <2$ ، $-2\le\ <0$)
طرفین‌وسطین	باید x^2 ، $\sqrt{x}$ ، $\lvert x\rvert$ ، $\sin x$ ، $\cos x$ یا ... را تنها کنیم و بعد عبارت سمت راست تساوی را در بازه‌ای محدود کنیم.	$y=\frac{x^2+1}{x^2+4}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}x^2y+4y-x^2-1=0$ $\Rightarrow x^2(y-1)=-4y+1\Rightarrow x^2=\frac{-4y+1}{y-1}$ $\xrightarrow{x^2\ge 0}\frac{-4y+1}{y-1}\ge 0\xrightarrow[\text{(برد)}]{\text{تعیین علامت}}\frac{1}{4}\le y<1$
استفاده از یکنوایی	$D_f=[a,b]\xrightarrow[\text{و پیوسته}]{\text{f صعودی}}R_f=[f(a),f(b)]$	$f(x)=\underbrace{x^3+2x}_{\text{اکیداً صعودی}}\xrightarrow{D_f=[1,3]}R_f=[\underbrace{f(1)}_{3},\underbrace{f(3)}_{33}]$
	$D_f=[a,b]\xrightarrow[\text{و پیوسته}]{\text{f نزولی}}R_f=[f(b),f(a)]$	

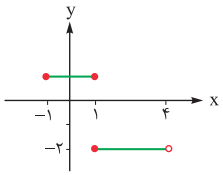
۲ توابعی که بردشان را باید بلد باشیم:

تابع	ضابطه	برد	مثال	جواب برد مثال
خطی $(a \neq 0)$	$f(x)=ax+b$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$
چندجمله‌ای درجهٔ فرد		$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$
سهمی $(a>0)$	$f(x)=ax^2+bx+c$	$[y_S,+\infty)$		$[-4,+\infty)$
سهمی $(a<0)$	$f(x)=ax^2+bx+c$	$(-\infty,y_S]$		$(-\infty,1]$
لگاریتمی	$f(x)=\log_a x$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$
نمایی	$f(x)=a^x+b$	$(b,+\infty)$		$(-1,+\infty)$
هموگرافیک	$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$	$y=\frac{2x-1}{3x+1}$	$\mathbb{R}-\{\frac{2}{3}\}$
گلدانی	$f(x)=\lvert x-a\rvert+\lvert x-b\rvert$	$[\lvert b-a\rvert,+\infty)$		$[3,+\infty)$

تابع	ضابطه	برد	مثال	جواب برد مثال
آبشاری	$f(x)=\|x-a\|-\|x-b\|$	$[-\|b-a\|,\|b-a\|]$		$[-۳,۳]$
نیم‌دایره به شعاع R و مرکز مبدأ	$f(x)=\sqrt{R^۲-x^۲}$	$[۰,R]$		$[۰,۲]$

جزء صحیح

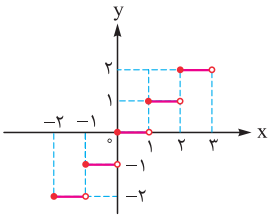
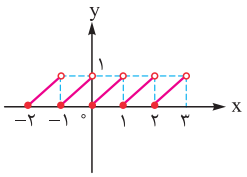
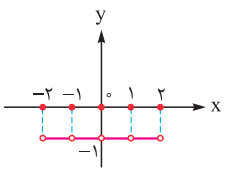
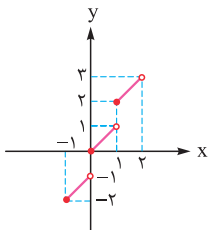
۱ تابع پله‌ای:

تعریف	نمودار	مثال	شکل
توابع چندضابطه‌ای که همهٔ ضابطه‌هایش یک تابع ثابت است.	از تعدادی پاره‌خط افقی تشکیل شده است.	$f(x)=\begin{cases}۱ & -۱\le x<۱\\ -۲ & ۱\le x<۴\end{cases}$	

۲ تعریف جزء صحیح یا براکت:

تعریف	جزء صحیح هر عدد صحیح، خودش می‌شود: $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]=x$
	جزء صحیح هر عدد غیرصحیح، عدد صحیح ماقبل آن می‌شود: $k<x<k+۱\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}[x]=k$

۳ نمودارهای مهم توابع براکتی:

ضابطه	$y=[x]$	$y=x-[x]$	$y=[x]+[-x]$	$y=x+[x]$
نمودار				
برد	$\mathbb{Z}$	$[۰,۱)$	$\{-۱,۰\}$	$\cdots\cup[۰,۱)\cup[۲,۳)\cup\cdots$

معادلهٔ درجه‌دو

۱ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$: $\Delta=b^۲-۴ac$, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$

۲ تعداد ریشه‌ها:

$\Delta<۰$	$\Delta=۰$	$\Delta>۰$
ریشهٔ حقیقی ندارد.	یک ریشهٔ مضاعف ↓ $x_{\text{مضاعف}}=\dfrac{-b}{۲a}$	۲ ریشهٔ متمایز

۳ اگر عبارت درجه‌دومی، مربع کامل باشد، دلتایش صفر است.

معادلهٔ درجه‌دو

۱ ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$: $\Delta=b^2-4ac$, $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

۲ تعداد ریشه‌ها:

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
ریشهٔ حقیقی ندارد.	یک ریشهٔ مضاعف ↓ $x_{\text{مضاعف}}=\frac{-b}{2a}$	۲ ریشهٔ متمایز

۳ اگر عبارت درجه‌دومی، مربع کامل باشد، دلتایش صفر است.

۴ دو حالت خاص پرکاربرد:

رابطهٔ بین ضرایب	ریشه‌ها	مثال
$a+b+c=0$	$1,\frac{c}{a}$	$3x^2-8x+5=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{5}{3} \end{cases}$
$a+c=b$	$-1,\frac{-c}{a}$	$5x^2-7x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{12}{5} \end{cases}$

۵ با شرط $\Delta>0$ داریم:

جمع ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	اختلاف ریشه‌ها	مجموع مربع ریشه‌ها	مجموع مکعب ریشه‌ها
$S=\frac{-b}{a}$	$P=\frac{c}{a}$	$M=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$x_1^2+x_2^2=S^2-2P$	$x_1^3+x_2^3=S^3-3SP$

۶ اگر حاصل عباراتی مثل $\sqrt{x_1}\pm\sqrt{x_2}$ را خواستید حساب کنید، آن را مساوی A قرار دهید و طرفین را به توان ۲ برسانید.

۷ معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل‌ضرب آن‌ها P باشد، به صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

۸ بحث روی علامت ریشه‌ها: مثلاً وقتی قرار است معادله دو ریشهٔ منفی متمایز داشته باشد، باید سه نامعادلهٔ $\Delta>0$، $S<0$ و $P>0$ را حل کنیم و بین جواب‌هایشان اشتراک بگیریم.

		Δ	S	P
۱	دو ریشهٔ مثبت متمایز	+	+	+
۲	دو ریشهٔ منفی متمایز	+	−	+
۳	دو ریشهٔ ناهم‌علامت	+	+	$P\le 0$
۴	دو ریشهٔ قرینه	+	۰	−
۵	دو ریشهٔ معکوس	+	+	۱

۹ اگر $P<0$ باشد (یا a و c هم‌علامت نباشند)، حتماً $\Delta>0$ است و نیازی به چک‌کردن شرط $\Delta>0$ نیست.

۱۰ منظور از صفرهای تابع $f(x)$، «طول نقاط برخورد تابع f با محور xها» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$» است.

۱۱ نوشتن سریع معادلهٔ سهمی:

	چیزهایی که داریم.	ضابطهٔ سهمی	نکتهٔ تکمیلی
۱	x_1 و x_2 صفرهای سهمی‌اند.	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲	نقطهٔ (x_S,y_S) رأس سهمی است.	$y=a(x-x_S)^2+y_S$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳	سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله ـ سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.	اگر نقطه‌ای به مختصات $(0,c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.

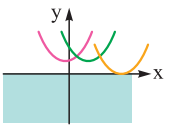
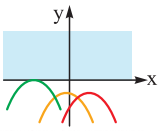
۱۲ اگر سهمی در نقطهٔ $(\alpha,0)$ بر محور xها مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید: $y=a(x-\alpha)^2$

۱۳ علامت ضرایب a، b و c:

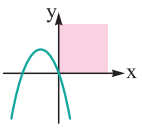
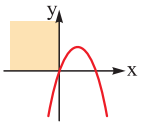
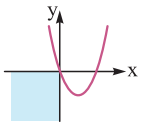
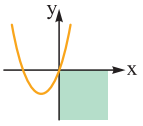
علامت a	علامت b	علامت c
با دهانهٔ سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور yها	عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها

۱۴ سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات:

حالت ۱: سهمی فقط از ۲ ناحیه عبور کند.

		شکل	شرایط	
			a	Δ
۱	سهمی فقط از ناحیهٔ ۱ و ۲ عبور کند.		+	$\Delta \le 0$
۲	سهمی فقط از ناحیهٔ ۳ و ۴ عبور کند.		−	$\Delta \le 0$

حالت ۲: سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند).

		شکل	شرایط			
			a	b	c	Δ
۱	فقط از ناحیهٔ ۱ نگذرد.		−	−	−	+
۲	فقط از ناحیه ۲ نگذرد.		−	+	−	+
۳	فقط از ناحیهٔ ۳ نگذرد.		+	−	+	+
۴	فقط از ناحیهٔ ۴ نگذرد.		+	+	+	+

c می‌تواند صفر هم باشد.

حالت ۳: سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند. $\xleftarrow{\text{فقط کافیه که}}$ $P<0$

۱۵ شرط آن‌که سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند، آن است که سهمی دو ریشهٔ هم‌علامت داشته باشد: $\Delta>0$ و $P\ge 0$.

۱۶ حل معادلات درجه۳ که عامل $x-a$ دارند: $\overbrace{f(x)}^{\text{درجه۳}}=0$

مرحلهٔ ۱	جای x، اعداد ۱، ۱−، ۲ و ۲− را قرار می‌دهیم تا ببینیم به ازای کدامشان تساوی برقرار است.
مرحلهٔ ۲	اگر به ازای $x=a$، تساوی برقرار شد، عبارت را به $x-a$ تقسیم می‌کنیم: $\begin{array}{l\|l} x-a & \text{عبارت درجه۳} \\ \hline \vdots & \text{عبارت درجه۲} \\ 0 & \end{array}$
مرحلهٔ ۳	معادلهٔ درجه‌سوم اولیه را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم: $(x-a)(\text{عبارت درجه۲})=0$
مرحلهٔ ۴	از حل دو معادلهٔ روبه‌رو، جواب‌های معادله به دست می‌آیند: $\begin{cases} x-a=0 \\ \text{عبارت درجه۲}=0 \end{cases}$

۱۷ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ (با شرط $a\neq 0$) با تغییر متغیر $x^2=t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۴	دو ریشهٔ مثبت	$\Delta>0, S>0, P>0$
۳	یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر	$c=0, \frac{-b}{a}>0$
۲	حالت ۱: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P<0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta=0, \frac{-b}{a}>0$
۱	یک ریشهٔ صفر	$b=c=0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta>0, S<0, P>0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta=0, \frac{-b}{a}<0$
	حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta<0$

۱۸ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ یا هر معادله‌ای که همهٔ توان‌های x در آن زوج باشد، صفر است. (اگر $x=a$ جواب باشد، $x=-a$ هم جواب است؛ درواقع توان‌های زوج اعداد قرینه باهم برابر و مجموع آن‌ها صفر است.)

مثلاً در معادله‌های $2x^4-7x^2+1=0$ و $x^8-4x^6+2x^2=0$، مجموع ریشه‌ها صفر است.

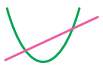
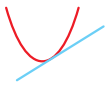
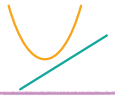
روش هندسی (نموداری)

۱ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط برخورد نمودارهای این دو تابع، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است و برعکس، یعنی هر جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$، یکی از نقاط برخورد دو تابع است.

۲ **یادآوری انتقال نمودار:**

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.

۳ وضعیت خط و سهمی نسبت به هم: معادلهٔ $\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{سهمی}}=\underbrace{mx+h}_{\text{خط}}$ را تشکیل می‌دهیم. بعد آن را به صورت $ax^2+b'x+c'=0$ درمی‌آوریم. دلتای این معادله، وضعیت خط و سهمی را مشخص می‌کند.

علامت Δ	وضعیت خط و سهمی	شکل
$\Delta>0$	سهمی و خط در ۲ نقطه متقاطع‌اند.	
$\Delta=0$	خط در یک نقطه بر سهمی مماس است.	
$\Delta<0$	سهمی و خط، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.	

۴ روش هندسی، **تعداد** و **محدودهٔ‌تقریبی** جواب‌ها را به ما می‌دهد، ولی جواب دقیق را معمولاً به ما نمی‌دهد.

۵ در معادلاتی که جنس عبارت‌های دو طرف تساوی، مثل هم نیست، معمولاً سراغ روش هندسی می‌رویم.

مثلاً در معادله‌های $\underbrace{x^2-1}_{\text{سهمی}}=\underbrace{2^x}_{\text{نمایی}}$ یا $\underbrace{\log x}_{\text{لگاریتمی}}=\underbrace{\sin x}_{\text{مثلثاتی}}$

معادلات گویا و گنگ

۱ بعد از حل معادلهٔ گویا، حتماً چک کنید که جواب‌های به دست آمده، ریشه‌های مخرج نباشند.

۲ اگر شخص اول کاری را به تنهایی در A ساعت، شخص دوم همان کار را در B ساعت و هر دو با هم در C ساعت انجام دهند، رابطهٔ روبه‌رو بین A، B و C برقرار است:

$$\underbrace{\frac{1}{A}}_{\text{زمان نفر اول}}+\underbrace{\frac{1}{B}}_{\text{زمان نفر دوم}}=\underbrace{\frac{1}{C}}_{\text{زمان هر دو نفر با هم}}$$

۳ اگر وسیله‌ای مسیری به طول x را با سرعت v_1 برود و با سرعت v_2 برگردد، با توجه به رابطهٔ $t=\frac{x}{v}$، داریم:

$$t_{\text{رفت}}\pm t_{\text{برگشت}}=\underbrace{\text{یه عدد}}_{\text{سؤال می‌ده}}\Rightarrow\frac{x_{\text{ر}}}{v_{\text{ر}}}\pm\frac{x_{\text{ب}}}{v_{\text{ب}}}=\text{یه عدد}$$

۴ در نسبت طلایی با طول L و عرض W داریم:

$$\frac{L}{W}=\frac{L+W}{L}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

۵ اگر محلولی به جرم m کیلوگرم و حل‌شونده‌ای به جرم M کیلوگرم داشته باشیم، طبق رابطهٔ $\frac{M}{m}=$ غلظت، داریم:

۱) اضافه‌کردن X کیلوگرم از حل‌شونده:

$$\text{غلظت جدید}=\frac{M+X}{m+X}$$

۲) اضافه‌کردن X کیلوگرم از حلّال:

$$\text{غلظت جدید}=\frac{M}{m+X}$$

۶ اگر قیمت کالایی بعد از تخفیف X تومان کم شود و خریدار بتواند Y عدد بیشتر از آن بخرد، طبق رابطهٔ $\frac{\text{پول خریدار}}{\text{قیمت کالا}}=$ تعداد، داریم:

$$\text{تعداد جدید}=\frac{\text{پول خریدار}}{\text{قیمت جدید}}=\text{تعداد اولیه}+Y \Rightarrow \frac{\text{پول خریدار}}{\text{قیمت جدید}-X}=\frac{\text{پول خریدار}}{\text{تعداد جدید}}+Y$$

۷ برای حل معادلات گنگ، دو طرف معادله را به توان می‌رسانیم و در بعضی از موارد، این کار را تکرار می‌کنیم و در نهایت به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

۸ بعد از حل معادلهٔ گنگ، جواب‌های به دست آمده را در معادلهٔ اولیه چک کنید.

۹ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=۰$ (با شرط $a\neq ۰$) با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=۰$	جواب‌های معادلهٔ $at^۲+bt+c=۰$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۲	حالت (۱) دو ریشهٔ مثبت	$\Delta>۰, S>۰, P>۰$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر	$c=۰, \frac{-b}{a}>۰$
۱	حالت (۱) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P<۰$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta=۰, \frac{-b}{a}>۰$
	حالت (۳) یک ریشهٔ صفر	$b=c=۰$
بدون جواب	حالت (۱) هر دو ریشه منفی	$\Delta>۰, S<۰, P>۰$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta=۰, \frac{-b}{a}<۰$
	حالت (۳) فاقد ریشه	$\Delta<۰$

۱۰ اگر جمع چند رادیکال صفر شده، عبارت داخل تک‌تک آن‌ها صفر است:

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=۰ \Rightarrow \begin{cases} A=۰ \\ , \\ B=۰ \end{cases}$$

۱۱ بعضی از معادلات گنگ نیاز به حل ندارند.

مثلاً $\sqrt{x-۳}+\sqrt{۱-x}=x$، چون دامنه‌ها به ترتیب $x\geq ۳$ و $x\leq ۱$ است که اشتراکشان تهی می‌شود.