آزمون حضوری
شماره شش

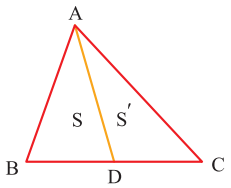
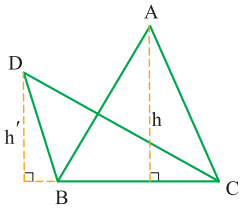
خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

رشتهٔ ریاضی
پایهٔ دوازدهم

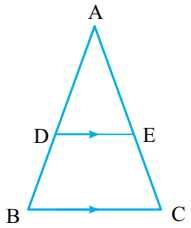
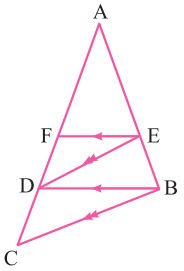
مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

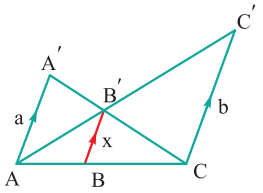
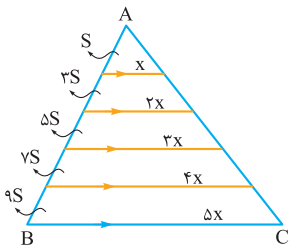
نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
هندسه	هندسه دوازدهم فصل ۲ صفحهٔ ۳۳ تا ۳۹ هندسه دهم فصل ۲ و ۳ صفحهٔ ۳۷ تا ۷۶	۲	۱۳	علیرضا نصراللهی	محسن فراهانی

مساحت مثلث

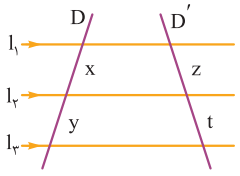
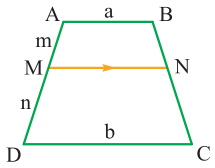
در هر مثلث نسبت اضلاع با عکس نسبت ارتفاع نظیر آن‌ها، متناسب است.	$\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{P}{S}$
اگر دو مثلث دارای ارتفاع‌های برابر باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست.	 $\frac{S}{S'}=\frac{BD}{DC}$
اگر دو مثلث دارای قاعده‌های برابر باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت ارتفاع‌هاست.	 $\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{BCD}}}=\frac{h}{h'}$

قضیهٔ تالس و نتایج آن در مثلث

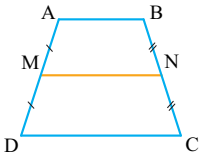
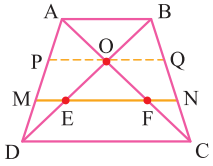
اگر در مثلثی، خطی موازی ضلعی رسم شود، به طوری که دو ضلع دیگر را قطع کند، پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌شود.	 $DE \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \\ \frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC} \end{cases}$
اگر در مثلثی دو جفت خط موازی مطابق شکل داشته باشیم، بین پاره‌خط‌های ایجادشده روی یک ضلع، رابطهٔ ویژه‌ای شکل می‌گیرد.	 $AD^2=AF\times AC$

اگر دو مثلث که در آن‌ها خط موازی مشترکی وجود دارد با هم ادغام شوند، رابطهٔ جالبی شکل می‌گیرد.	 $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
اگر یک ضلع مثلث به n قسمت مساوی تقسیم شود و از هر یک خطی موازی قاعده رسم شود، بین پاره‌خط‌های تولیدشده تصاعد عددی شکل می‌گیرد. مساحت‌های محصور بین خطوط، تشکیل تصاعد عددی با قدر نسبت ۲S می‌دهند.	

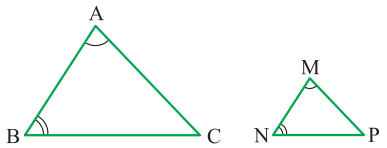
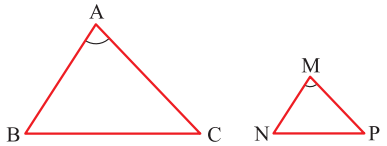
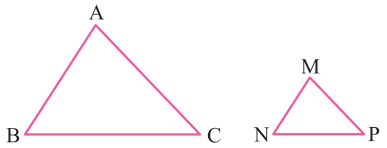
تعمیم قضیهٔ تالس (تالس در ذوزنقه)

اگر دو خط مورب، چند خط موازی را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌های ایجادشده روی خطوط مورب یکسان است.	 ۱) $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$ ۲) $\frac{x}{x+y}=\frac{z}{z+t}$
اگر در یک ذوزنقه پاره‌خطی موازی دو قاعده رسم شود، نسبتی که روی ساق‌ها پدید می‌آورد، یکسان است.	 ۱) $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ ۲) $MN=\frac{na+mb}{n+m}$

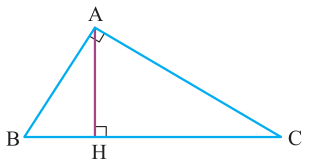
دو رابطهٔ مهم در ذوزنقه

اندازهٔ پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، میانگین دو قاعده است.	$MN=\frac{AB+CD}{۲}$	
● اندازهٔ پاره‌خط محصور بین دو قطر و خط میانگین، نصف تفاضل قاعده‌هاست.	۱) $EF=\frac{CD-AB}{۲}$	
● اگر از محل برخورد قطرها خطی به موازات قاعده‌ها رسم کنیم، پاره‌خط‌های ایجادشده برابرند.	۲) $OP=OQ$ ۳) $\frac{۲}{PQ}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}$	

تشابه مثلث‌ها

هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند. (حالت ز ز)	 $\begin{cases}\hat{A}=\hat{M}\\ \hat{B}=\hat{N}\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP}$
هرگاه دو ضلع دو مثلث متناسب و زاویهٔ بین آن‌ها برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند. (حالت ض ز ض)	 $\begin{cases}\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{MP}\\ \hat{A}=\hat{M}\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP}$
هرگاه اندازه‌های سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلثی دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند. (حالت ض ض ض)	 $\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{MP}=\frac{BC}{NP} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP}$

تشابه و مثلث قائم‌الزاویه

شکل	روابط
	۱) $AH \times BC = AB \times AC$ ۲) $BH \times BC = AB^{۲}$ ۳) $CH \times BC = AC^{۲}$ ۴) $BH \times CH = AH^{۲}$

هرگاه دو مثلث یا به طور کلی دو چندضلعی متشابه باشند، آن‌گاه:	
نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها، محیط و ... برابر با نسبت تشابه است. $\frac{h}{h'}=\frac{m_a}{m_{a'}}=\frac{d_a}{d_{a'}}=\frac{۲p}{۲p'}=k$	نسبت مساحت آن‌ها برابر با مربع نسبت تشابه است. $\frac{S}{S'}=k^{۲}$

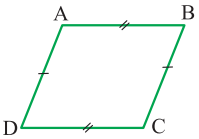
فصل سوم

n ضلعی		
قطرهای گذرنده از یک رأس	تعداد کل قطرها	مجموع زوایای داخلی
$n-۳$	$\frac{n(n-۳)}{۲}$	$(n-۲)\times ۱۸۰$

چهارضلعی‌های خاص

- **متوازی‌الاضلاع**: چهارضلعی که هر دو ضلع مقابل آن با هم موازی باشد.

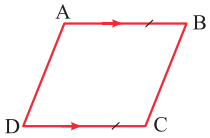
۱) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر ضلع‌های مقابل آن دوبه‌دو هم‌اندازه باشند.



$AD = BC$

$AB = CD$

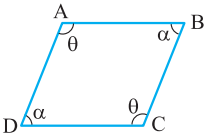
۲) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر دو ضلع مقابل، موازی و مساوی باشند.



$AB = CD$

$AB \parallel CD$

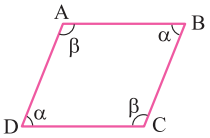
۳) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر زوایای مقابل با هم برابر باشند.



$\hat{A} = \hat{C}$

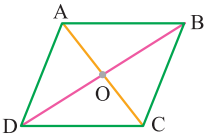
$\hat{B} = \hat{D}$

۴) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر هر دو زاویهٔ مجاور آن مکمل باشند.



$\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ$

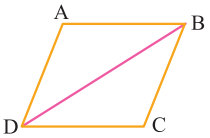
۵) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهای آن همدیگر را نصف کنند.



$OA = OC$

$OB = OD$

۶) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر هر قطر، آن را به دو مثلث مساوی تقسیم کند.



$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{BCD}$

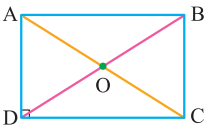
- **مستطیل**: متوازی‌الاضلاعی که همهٔ زوایای آن قائمه باشد. همهٔ ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد به علاوهٔ موارد زیر:

۱) مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن بر هم عمود باشند.

$AB \perp BC$

$AD \perp CD$

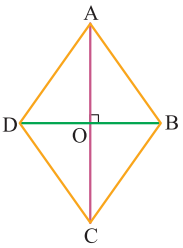
۲) مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که دو قطر آن با هم برابر باشند.



$AC = BD$

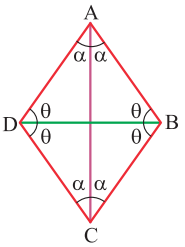
- **لوزی**: متوازی‌الاضلاعی است که هر چهار ضلع آن با هم برابر باشد. همهٔ ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد به علاوهٔ موارد زیر:

۱) لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن برهم عمود باشند.

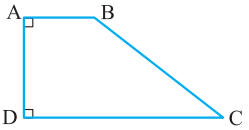
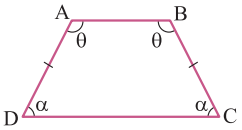


$AC \perp BD$

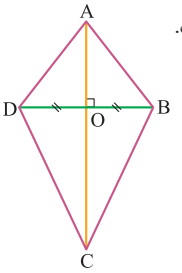
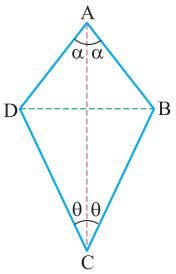
۲) لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن نیمساز زوایا باشد.



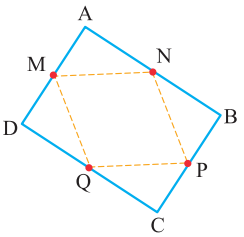
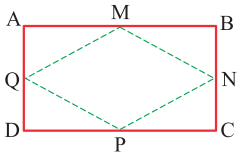
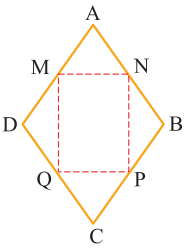
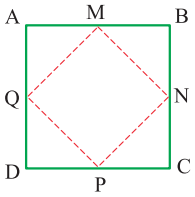
- **مربع**: متوازی‌الاضلاعی که همهٔ زوایای آن قائمه و هر چهار ضلع آن با هم برابرند. مربع تمام ویژگی‌های لوزی و مستطیل را دارد.
- **ذوزنقه**: چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی داشته باشد.

ذوزنقه قائم‌الزاویه	ذوزنقه متساوی‌الساقین
ذوزنقه‌ای که دو زاویهٔ قائمه داشته باشد. 	ذوزنقه‌ای که ساق‌های آن با هم برابر باشد.  $AD = BC$ بنابراین: $\hat{A} = \hat{B}, \hat{C} = \hat{D}$ $BD = AC$

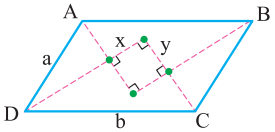
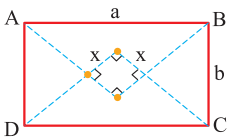
کایت: چهارضلعی که اضلاع آن دوبه‌دو با هم برابرند.

۱) قطر بزرگ عمودمنصف قطر کوچک است. AC عمودمنصف BD است. 	۲) قطر بزرگ نیمساز زاویه است ولی قطر کوچک نیمساز نیست. 

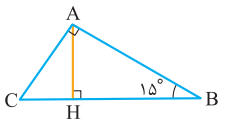
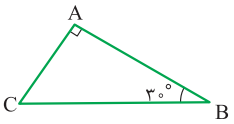
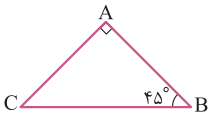
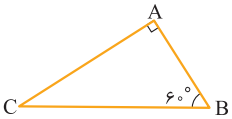
وصل کردن وسط اضلاع چهارضلعی

۱) هر چهارضلعی دلخواه ← شکل حاصل: متوازی‌الاضلاع MNPQ متوازی‌الاضلاع 	۲) چهارضلعی با قطرهای برابر (مستطیل، ذوزنقه متساوی‌الساقین، مربع) ← شکل حاصل: لوزی MNPQ لوزی 
۳) چهارضلعی با قطرهای عمود برهم (لوزی، کایت، مربع) ← شکل حاصل: مستطیل MNPQ مستطیل 	۴) چهارضلعی با قطرهای برابر و عمود برهم (مربع) ← شکل حاصل: مربع MNPQ مربع 

شکل حاصل از برخورد نیمساز زوایای چهارضلعی

حالت	شکل	اندازهٔ ضلع
۱) از تقاطع نیمسازهای داخلی هر متوازی‌الاضلاع همواره یک مستطیل حاصل می‌شود.		$x=\|a-b\|\sin\alpha$ $y=\|a-b\|\cos\alpha$
۲) از تقاطع نیمسازهای داخلی هر مستطیل همواره یک مربع حاصل می‌شود.		$x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\|a-b\|$ (همون Sin ۴۵ یا Cos ۴۵)

روابط مثلث قائم‌الزاویه

شکل				
رابطه	$AH=\frac{BC}{۴}$	$AC=\frac{BC}{۲}$	$AC=\frac{\sqrt{۲}}{۲}BC$	$AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$

وارون ماتریس

وارون ماتریس ۲×۲	دترمینان ماتریس	ماتریس ۲×۲
$A^{-۱}=\frac{۱}{\|A\|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$	$\|A\|=ad-bc$	$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

وارون ماتریس‌های خاص

وارون ماتریس‌های خاص	ماتریس‌های خاص
$A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{a} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{b} \end{bmatrix}$	$A=\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$
$B^{-۱}=\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{b} \\ \frac{۱}{a} & ۰ \end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix} ۰ & a \\ b & ۰ \end{bmatrix}$

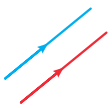
خواص وارون: اگر A و B دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر، k یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد داریم:

وارون جای دو ماتریس را در ضرب عوض می‌کند.	وارون ضریب را عکس می‌کند.	جای وارون و توان قابل تعویض است.	وارونِ وارون هر ماتریس، برابر خود ماتریس است.
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}\times A^{-1}$	$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$	$(A^{-1})^{-1}=A$
$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$	$(5A)^{-1}=\frac{1}{5}A^{-1}$	$(A^3)^{-1}=(A^{-1})^3$	$A^{-1}=B \Leftrightarrow A=B^{-1}$

دستگاه معادلات

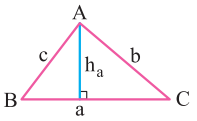
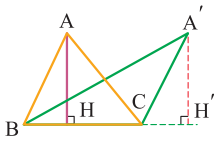
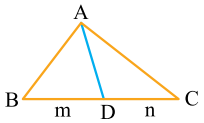
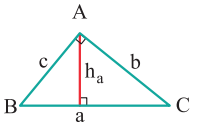
حل معادلهٔ ماتریسی و دستگاه	معادلهٔ ماتریسی	ماتریس مجهولات	ماتریس مقادیر معلوم	ماتریس ضرایب	دستگاه دو معادله دومجهولی
$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$	$AX=B$	$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix}c\\c'\end{bmatrix}$	$A=\begin{bmatrix}a & b\\a' & b'\end{bmatrix}$	$\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$
					فرم ماتریسی
					$\begin{bmatrix}a & b\\a' & b'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\c'\end{bmatrix}$

بحث در تعداد جواب‌های دستگاه

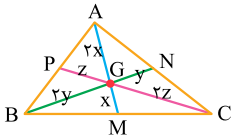
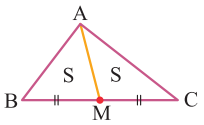
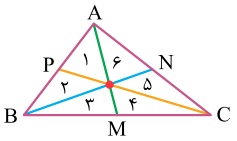
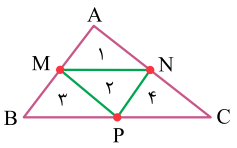
متقاطع	موازی	منطبق	وضعیت دو خط
دستگاه فقط یک جواب دارد.	دستگاه جواب ندارد.	دستگاه بی‌شمار جواب دارد.	تعداد جواب‌ها
$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ 	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	وضعیت ضرایب

فصل سوم دهم: درس دوم - مساحت و کاربردهای آن

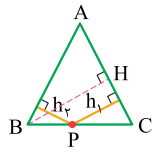
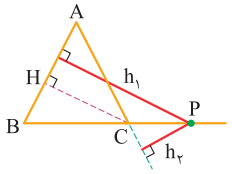
محاسبهٔ مساحت مثلث

مساحت مثلث (رابطهٔ ضلع و ارتفاع) ($P =$ نصف محیط)	$S=\frac{۱}{۲}a.h_a\ ,\ a=\frac{۲S}{h_a}\ ,\ h_a=\frac{۲S}{a}$ $\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{P}{S}$	
مثلث‌های هم‌قاعده	$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'BC}}}=\frac{AH}{A'H'}$	
مثلث‌های هم‌ارتفاع	$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}=\frac{m}{n}$	
مثلث قائم‌الزاویه	$S=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}a.h_a$	

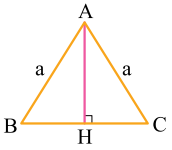
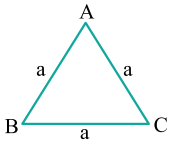
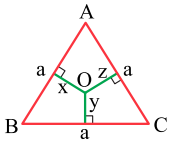
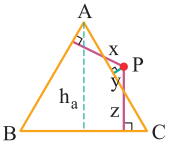
میانه‌ها و مساحت

۱) میانه‌های اضلاع مثلث همرس‌اند و به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند.	$\frac{GM}{GA}=\frac{GN}{GB}=\frac{GP}{GC}=\frac{۱}{۲}$	
۲) میانه، مثلث را به دو مثلث معادل تقسیم می‌کند.	$S_{\overset{\Delta}{ABM}}=S_{\overset{\Delta}{ACM}}$	
۳) اگر میانه‌های مثلث را رسم کنیم، شش مثلث معادل ایجاد می‌شود.	$S_۱=S_۲=S_۳=S_۴=S_۵=S_۶$	
۴) اگر وسط اضلاع مثلث را به هم وصل کنیم، ۴ مثلث معادل ایجاد می‌شود.	$S_۱=S_۲=S_۳=S_۴=\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{۴}$	

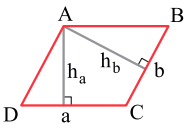
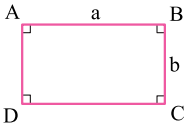
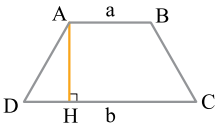
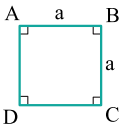
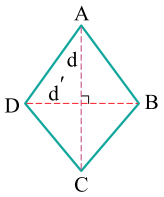
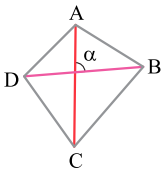
مثلث متساوی‌الساقین

۱) اگر P نقطه‌ای دلخواه روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین باشد:	$h_1 + h_2 = BH$	
۲) اگر P نقطه‌ای دلخواه روی امتداد قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین باشد:	$\lvert h_1 - h_2 \rvert = CH$	

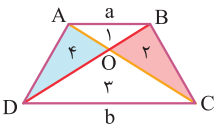
مثلث متساوی‌الاضلاع

۱) اندازهٔ ارتفاع، میانه و نیمساز همواره $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر ضلع است.	$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$	
۲) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع $\frac{\sqrt{3}}{4}$ برابر مربع ضلع است.	$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	
۳) اگر O نقطه‌ای دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع باشد:	$x + y + z = h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$	
۴) اگر P نقطه‌ای دلخواه خارج مثلث متساوی‌الاضلاع باشد:	$x - y + z = h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$	

مساحت چهارضلعی‌های خاص

مساحت متوازی‌الاضلاع	مساحت مستطیل
 $S = a \times h_a = b \times h_b$	 $S = a.b$
مساحت ذوزنقه	**مساحت مربع**
 $S = \frac{1}{2} \times AH \times (a+b)$	 $S = a^2$
مساحت چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم (کایت، لوزی)	**مساحت چهارضلعی (حالت کلی)**
 $S = \frac{1}{2} d.d'$	 $S = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin\alpha$

قضیهٔ شبه‌پروانه در ذوزنقه



(۱) $S_2 = S_4$

(۲) $S_1.S_3 = S_2.S_4 = S_2^2 = S_4^2$

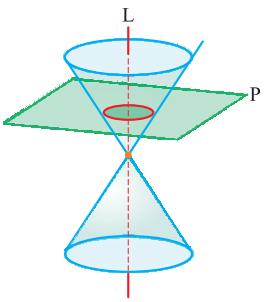
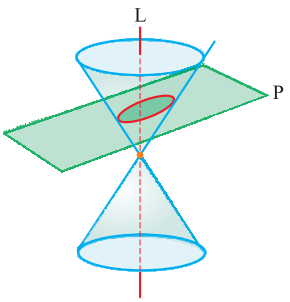
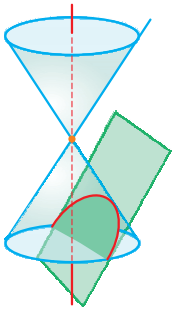
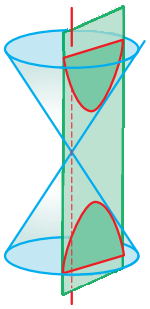
رابطهٔ پیک

اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، داریم:

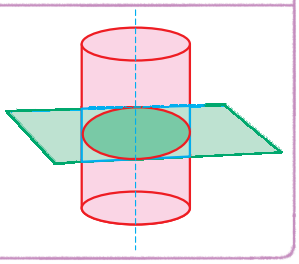
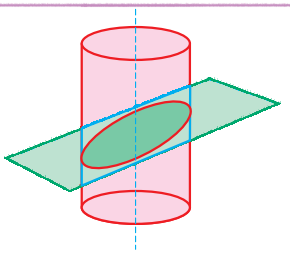
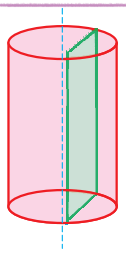
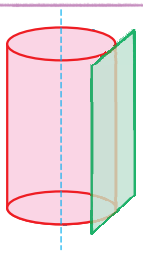
$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$

درس اول فصل ۲: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

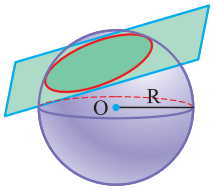
مقاطع مخروطی

دایره	بیضی	سهمی	هذلولی
صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود است.	صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نبوده و با مولد موازی نیست.	صفحهٔ P با مولد موازی است.	صفحهٔ P موازی محور سطح مخروطی بوده و هر دو نیمهٔ آن را قطع می‌کند.
			

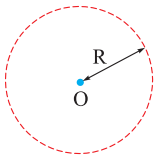
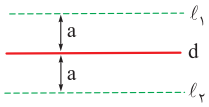
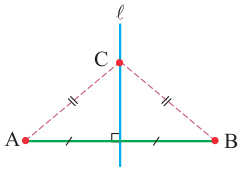
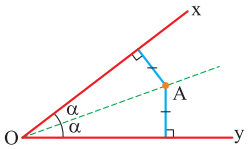
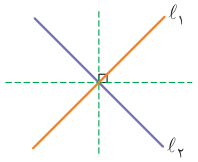
مقاطع استوانه‌ای

دایره	بیضی	دو خط موازی	یک خط
صفحهٔ P عمود بر محور استوانه	صفحهٔ P به صورت مورب	صفحهٔ P موازی محور استوانه و به فاصلهٔ کم‌تر از شعاع آن	صفحهٔ P موازی محور استوانه و به فاصلهٔ شعاع از آن
			

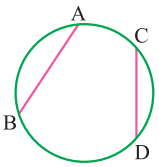
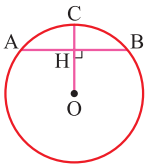
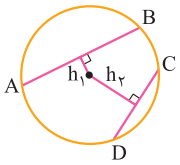
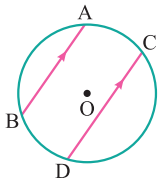
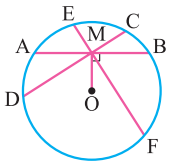
سطح مقطع حاصل از برخورد هر صفحه با کره‌ای به مرکز O و شعاع R همواره یک دایره است.



مکان هندسی‌های معروف

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت مانند O به فاصلهٔ R باشند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ a باشند، دو خط به موازات d و به فاصلهٔ a از آن هستند.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از اضلاع یک زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع ℓ_1 و ℓ_2 به یک فاصله باشند، نیمسازهای زوایای به وجود آمده توسط آن دو خط متقاطع است.	

۱ رابطهٔ وتر و کمان در دایره:

حالت	وترهای برابر	شعاع عمود بر وتر	نامساوی در وترها	وترهای موازی	کوتاه‌ترین و بلندترین وتر گذرنده از نقطهٔ دلخواه M
شکل					
ویژگی	$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$	$AH = BH$ $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$	$AB > CD \Leftrightarrow h_1 < h_2$	$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$	AB: کوتاه‌ترین قطر = ۲R: بلندترین