آزمون حضوری
شماره شش

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

پایهٔ دوازدهم
رشتهٔ ریاضی

# مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

| نام درس | مباحث | از صفحه | تا صفحه | مؤلف | ویراستار |
|---|---|---|---|---|---|
| آمار و احتمال و ریاضیات گسسته | ریاضیات گسسته دوازدهم<br>فصل ۱<br>صفحهٔ ۱۸ تا ۳۰ | ۲ | ۴ | سروش موئینی | پیام ابراهیم‌نژاد - کیوان صارمی |

## تعریف همنهشتی

| | |
|---|---|
| a و b وقتی همنهشت‌اند که در تقسیم بر یک عدد هم‌باقی‌مانده باشند. | a و b وقتی همنهشت‌اند که تفاضلشان به m بخورد. |
| $\left.\begin{array}{l} a=mq+r \\ b=mq'+r \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$ | $a-b=mq \Leftrightarrow m \mid a-b \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} b$ |

## خواص همنهشتی

| شماره | توصیف | بیان ریاضی | مثال |
|---|---|---|---|
| ۱ | هر عدد با خودش همنهشت است. | $a \overset{m}{\equiv} a$ | $x^{۲}-۲x=۳ \Rightarrow x^{۲}-۲x \overset{m}{\equiv} ۳$ |
| ۲ | همنهشتی تعدی دارد. | $\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$ | $\left.\begin{array}{l} ۶۵x \overset{۸}{\equiv} ۱x \\ x \overset{۸}{\equiv} ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow ۶۵x \overset{۸}{\equiv} ۳$ |
| ۳ | تبدیل تقسیم به همنهشتی و برعکس | $a=mq+r \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} r$ | $a=۶q+۱ \Rightarrow a \overset{۶}{\equiv} ۱$<br>$b \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow b=۷q'+۳$ |
| ۴ | تبدیل پیمانه به مقسوم‌علیه | $\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ d \mid m \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{d}{\equiv} b$ | $x \overset{۲۰}{\equiv} y \Rightarrow x \overset{۱۰}{\equiv} y \ , \ x \overset{۵}{\equiv} y \ , \ x \overset{۴}{\equiv} y , \ldots$ |
| ۵ | به جای هر عدد می‌توان باقی‌ماندهٔ آن را بر m قرار داد. | $a+b\times c \overset{m}{\equiv}$<br>$\downarrow \ \downarrow \ \downarrow$<br>$r_{۱}+r_{۲}\times r_{۳}$ | $۱۲x-۸y+۲۰ \overset{۵}{\equiv} ۲x-۳y+۰$ |
| ۶ | مضارب پیمانه، همنهشت با صفرند و می‌توان آن‌ها را به دو طرف همنهشتی اضافه و کم کرد. | $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mq \overset{m}{\equiv} b \pm mq'$ | $x \overset{۱۷}{\equiv} ۲۰ \Rightarrow x \overset{۱۷}{\equiv} ۳$<br>$y \overset{۸}{\equiv} -۲ \Rightarrow y \overset{۸}{\equiv} ۶$ |
| ۷ | اگر دو عدد در چند پیمانه همنهشت باشند، به ک.م.م آن‌ها نیز همنهشت‌اند. | $\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{array}\right. \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$ | $\left.\begin{array}{l} x \overset{۶}{\equiv} ۱ \\ x \overset{۴}{\equiv} ۱ \end{array}\right. \Rightarrow x \overset{۱۲}{\equiv} ۱$ |
| ۸ | اجازه داریم دو طرف را با عددی جمع، تفریق یا ضرب کنیم و به توان برسانیم. | $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$<br>$ac \overset{m}{\equiv} bc \qquad a^{n} \overset{m}{\equiv} b^{n}$ | $۲^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۵۰}} ۲^{۱۵۰} \overset{۷}{\equiv} ۱$<br>$\xrightarrow{\times ۲} ۲^{۱۵۱} \overset{۷}{\equiv} ۲ \xrightarrow{+۵} ۲^{۱۵۱}+۵ \overset{۷}{\equiv} ۷ \overset{۷}{\equiv} ۰$ |
| ۹ | در بسط اتحاد دوجمله‌ای اگر پیمانه حاصل‌ضرب دو جمله باشد، فقط جملهٔ اول و آخر می‌مانند. | $(a+b)^{n} \overset{ab}{\equiv} a^{n}+b^{n}$ | $۱۰^{۲۵} \overset{۲۱}{\equiv} ۳^{۲۵}+۷^{۲۵}$ |
| ۱۰ | اگر دو طرف را بر عددی تقسیم کنیم، پیمانه بر ب.م.م خودش و آن عدد تقسیم می‌شود. | $ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{\frac{m}{(m,c)}}{\equiv} b$ | $۶x \overset{۱۵}{\equiv} ۹y \xrightarrow{\div ۳} ۲x \overset{۵}{\equiv} ۳y$ |

## قضیه‌های کمکی در باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت‌های بزرگ

| نام | ویلسن | نیوتن | فرما |
|---|---|---|---|
| فرمول | $(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$ | $a^{4k+r} \overset{10}{\equiv} a^r$ <br> $r=1,2,3,4$ | $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$ |
| پیمانه | عدد اول | ۱۰ | عدد اول |

## مسئلهٔ تقویم

از یک روز هفته (مثلاً دوشنبه) اگر $7k$ روز جلوتر یا عقب‌تر برویم، باز هم دوشنبه است. پس در تعیین روز، فقط باقی‌مانده بر ۷ مهم است؛ یعنی اگر $m \overset{7}{\equiv} n$، آن‌گاه $m$ روز بعد و $n$ روز بعد در هفته یک روز هستند.

مثلاً از ۳ فروردین تا ۲ آبان به تعداد $28+5\times31+30+2$ روز گذشته که باقی‌مانده‌اش بر ۷ می‌شود: $0+1+2+2 \overset{7}{\equiv} 5$

پس انگار ۵ روز گذشته و اگر بدانیم ۳ فروردین «شنبه» است، ۲ آبان می‌شود «پنج‌شنبه».

## معادلهٔ سیالهٔ خطی

| فرم معادله | شرط وجود جواب | روش حل عادی | روش حل با همنهشتی |
|---|---|---|---|
| $ax+by=c$ | $(a,b)\mid c$ | اول معادله را بر $(a,b)$ تقسیم می‌کنیم. سپس یک جواب را با جست‌وجو پیدا می‌کنیم: $x_0, y_0$ و جواب کلی $x=x_0+k\frac{b}{(a,b)}$ و $y=y_0-k\frac{a}{(a,b)}$ است. | اگر یک مجهول مهم نباشد یا یافتن یک جواب سخت باشد، معادلهٔ $ax+by=c$ را به صورت $ax \overset{b}{\equiv} c$ یا $by \overset{a}{\equiv} c$ درمی‌آوریم و با تقسیم برضریب مجهول، مسئله حل می‌شود. |

### نکته

اگر $x$ و $y$ تعداد ظرف،تمبر، سکه و ... باشند، باید $x \geq 0$ و $y \geq 0$ قرار دهیم و تعداد مقادیر صحیح $k$ را بشماریم.

**مثال**

$12x+20y=100$

**پاسخ**

جواب دارد: $(12,20)=4 \mid 100 \xrightarrow{\div 4} 3x+5y=25$

$$\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0+5k \\ y=5-3k \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

**مثال**

$17x+13y=100$

**پاسخ**

$(17,13)=1 \mid 100$

یک جواب سخت است:

$$17x \overset{13}{\equiv} 100 \Rightarrow 4x \overset{13}{\equiv} q \overset{13}{\equiv} -4 \xrightarrow[(4,13)=1]{\div 4} x \overset{13}{\equiv} -1 \Rightarrow x=13q-1$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}} y=-17q+9$$

## معادلهٔ همنهشتی

معادلهٔ $ax \overset{m}{\equiv} b$ یک معادلهٔ همنهشتی نام دارد.

شرط وجود جواب برای $x$ این است که $(a,m)\mid b$.

برای حل باید بعد از نوشتن همنهشت‌های a و b دو طرف را بر ضریب x تقسیم کرد. $7x \overset{11}{\equiv} 2 \overset{3\times 11}{\equiv} 33+2 \overset{11}{\equiv} 35 \xrightarrow[(7,11)=1]{\div 7} x \overset{11}{\equiv} 5$

$(7,11)=1 \mid 2$

## – کلاس‌ها (دسته‌های) هم‌ارزی در رابطهٔ همنهشتی –

همان‌طور که در تقسیم دیدید، با در نظرگرفتن باقی‌مانده‌های مختلف در تقسیم بر عدد طبیعی b مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به b کلاس افراز می‌شود. در همنهشتی نیز می‌توان گفت تمام اعداد صحیح در پیمانهٔ m با یکی از اعداد $0,1,2,...m-1$ همنهشت هستند.

(کلاس) دستهٔ همنهشتی r در پیمانهٔ m: $[r]_m=\{x \mid x \overset{m}{\equiv} r\}$

مثلاً $[2]_5$ یعنی مجموعهٔ اعداد $5q+2$ که در تقسیم بر ۵ باقی‌ماندهٔ ۲ دارند.

## – دو ویژگی مهم دربارهٔ کلاس‌های همنهشتی –

۱ در همنهشتی به پیمانهٔ m، m کلاس داریم.

مثلاً در پیمانهٔ ۶، ۶ کلاس داریم و اگر $\mathbb{Z}$ به ۹ کلاس افراز شده، پیمانه ۹ بوده است.

۲ دو عدد وقتی در یک کلاس قرار دارند که همنهشت باشند: $[x]_m=[y]_m \Rightarrow x \overset{m}{\equiv} y$