آزمون حضوری
شماره دوازده

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

رشتهٔ ریاضی
پایهٔ دوازدهم

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

این مرورنامه، ویژهٔ مباحث جدید آزمون است. مرورنامهٔ مباحثی که در آزمون‌های قبل به آن‌ها پرداخته شده، در پنل کاربری شما قابل دریافت است و در این فایل از تکرار آن پرهیز شده است.

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضیات گسسته	ریاضیات گسسته دوازدهم فصل ۳ – صفحهٔ ۴۳ تا ۸۴	۲	۴	سروش موئینی	زهرا جالینوسی ـ احمدرضا رسولی

اصل شمول و عدم شمول

تعداد اعضایی که به A یا B تعلق دارند.	$\lvert A\cup B\rvert=\lvert A\rvert+\lvert B\rvert-\lvert A\cap B\rvert$
تعداد اعضایی که فقط به A تعلق دارند و به B تعلق ندارند.	$\lvert A-B\rvert=\lvert A\rvert-\lvert A\cap B\rvert$
تعداد اعضایی که نه به A و نه به B تعلق دارند.	$\lvert \bar{A}\cap\bar{B}\rvert=\lvert\overline{A\cup B}\rvert=\lvert S\rvert-\lvert A\cup B\rvert$
تعداد اعضایی که به A یا B یا C (حداقل یکی) تعلق دارند.	$\lvert A\cup B\cup C\rvert=\lvert A\rvert+\lvert B\rvert+\lvert C\rvert-\lvert A\cap B\rvert-\lvert A\cap C\rvert-\lvert B\cap C\rvert+\lvert A\cap B\cap C)$
تعداد اعضایی که به هیچ‌یک از A و B و C تعلق ندارند.	$\lvert \bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\rvert=\lvert S\rvert-\lvert A\cup B\cup C\rvert$

نکات مهم

۱ مسأله غیرآرایش:

تعداد حالاتی که از n نامه هیچ‌یک در پاکت درست خودش نباشد، برابر است با:

$$d_n=n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

مقادیر آن را ببینید:

n	۱	۲	۳	۴	۵
d_n	۰	۱	۲	۹	۴۴

۲ تعداد اعداد طبیعی کم‌تر یا مساوی N که نسبت به N اول باشند، برابر است با:

$$\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ عامل‌های اول در تجزیهٔ N هستند.

معادلهٔ خطی ضرائب واحد

در معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ تعداد جواب‌ها را با شرط‌های زیر یاد می‌گیریم:

جواب صحیح و نامنفی $(x_i\geq 0)$ $\quad \binom{n+k-1}{k-1}$

جواب طبیعی $(x_i>0)$ $\quad \binom{n-1}{k-1}$

جواب با شرط $x_1\geq a_1$ $\quad \binom{n-a_1+k-1}{k-1}$

نکات مهم

۱ اگر مجهولی ضریب یا توان داشته باشد، آن را از معادله جدا و تمام مقادیرش را جای‌گذاری می‌کنیم. مثلاً در معادلهٔ $x_1+x_2+2x_3^2=20$. مجهول x_3 فقط ۰ و ۱ و ۲ و ۳ است و ۴ معادلهٔ ۲ یا ۱۲ یا ۱۸ یا $x_1+x_2=20$ را بررسی می‌کنیم.

۲ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ با شرط $x_1<a_1$ برابر است با تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی منهای تعداد جواب‌های مردود که در آن‌ها $x_1\geq a_1$ است.

۳ تعداد جواب‌های حسابی نامعادلهٔ خطی $x_1+x_2+\cdots+x_r\leq n$ با تعداد جواب‌های حسابی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_r+x_{r+1}=n$ برابر است؛ یعنی یک مجهول اضافه کرده و نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنیم.

شمارش تعداد توابع پوشا

از مجموعهٔ mعضوی A به مجموعهٔ nعضوی B، به تعداد $|B|^{|A|}=n^m$ تابع می‌توان نوشت.

الف) تعداد توابع یک به یک برابر است با: $P(n,m)$ و لازم است $n \geq m$ باشد.

ب) تعداد توابع پوشا برابر است با: $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$

حالت‌های مختلف را معمولاً حفظ می‌کنیم:

$n=\|B\|$	۲	۳	$m-1$	m
تعداد توابع پوشا از A به B	2^m-2	$3^m-3\times2^m+3$	$\binom{m}{2}\times(m-1)!$	$m!$

جایگشت با تکرار

اگر nشیء متمایز در کنار هم قرار گیرند $n!$ حالت داریم.

اگر n_1 تا از آن‌ها یکسان باشند، تعداد جایگشت‌ها $\frac{n!}{n_1!}$ خواهد بود.

مثال

$a,b,c,d,d,d \Rightarrow \frac{6!}{3!}$

$a,b,c,d,e,f \Rightarrow 6!$

$a,b,b,c,c,c \Rightarrow \frac{6!}{2!3!}$

کمال الملک $\Rightarrow \frac{9!}{\underset{ک}{2!}\,\underset{ل}{3!}\,\underset{م}{2!}\,\underset{ا}{2!}}$

– شمارش افرازها –

اگر n نفر در اتاق‌های $n_1, n_2, \ldots$ نفری قرار گیرند تعداد حالت‌ها برابر است با: $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots}$

اگر در بین n_i ها تکراری باشد بر «تکراری فاکتوریل» تقسیم می‌شود.

۶ نفر در اتاق‌های ۱ و ۵ تختی: $\frac{6!}{1!5!}$

۶ نفر در ۲ اتاق ۳تختی: $\frac{6!}{3!3!\underset{\text{تکرار}}{2!}}$

۶ نفر در اتاق‌های ۱ و ۱ و ۲ و ۲ تختی: $\frac{6!}{2!2!2!\;1!1!2!}$

اصل لانه‌کبوتری

اگر تعداد حالت‌ها از تعداد افراد کم‌تر باشد، حداقل ۲ نفر در یک حالت مشابه قرار دارند.

مدل اول: اگر تعداد کبوترها حداقل $n+1$ باشد، حداقل ۲ کبوتر در یک لانه هستند.

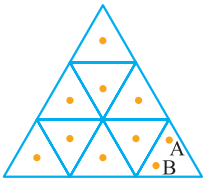
مثلاً اگر حداقل ۱۳ نفر داشته باشیم، حداقل ۲ نفر ماه تولد یکسان دارند.

یا وقتی $25-10=1+32\times32$ نفر داریم، حداقل ۲ نفر حرف اول نام و حرف اول فامیلی‌شان یکی است.

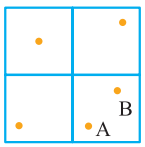
مدل دوم: اگر تعداد کبوترها از k برابر تعداد لانه‌ها بیشتر باشد، حداقل یک لانه $k+1$ کبوتر دارد. به زبان بهتر، تعداد کبوترهای یک لانه حداقل $\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil$ است ($\lceil\ \rceil$ جزء صحیح سقفی است)؛ پس مثلاً در بین ۱۰۰ نفر حداقل $\left\lceil\frac{100}{12}\right\rceil=9$ نفر ماه تولد یکسان دارند.

مدل سوم: اگر بخواهیم کاری را آنقدر انجام دهیم تا از نتیجهٔ خاصی مطمئن باشیم، باید بدترین حالت را در نظر گرفت. مثلاً از اعداد ۱ تا ۲۰ باید حداقل ۱۷ عدد انتخاب کرد تا مطمئن باشیم در بین اعداد انتخابی، عدد مضرب ۵ هست. (ممکن است ۵ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۰ دقیقاً در ۴ عدد آخر در بیایند.)

مدل چهارم: در مسائل هندسی دوبعدی، یک سطح را به n قسمت تقسیم می‌کنیم و حداقل $n+1$ نقطه داریم؛ پس در یک قسمت حداقل دو نقطه قرار می‌گیرند که فاصلهٔ آن‌ها از عدد خاصی (قطر مربع، قطر مستطیل، شعاع دایره و ...) بیشتر نیست.



ده نقطه درون مثلث با اضلاع ۳ $\Rightarrow AB < 1$



پنج نقطه درون مربع به ضلع ۲ $\Rightarrow AB < \sqrt{2}$

در مسائل سه‌بعدی، یک حجم داریم که به n قسمت تقسیم می‌شود و با حداقل $n+1$ نقطه، مطمئن هستیم دوتا از آن‌ها در ناحیهٔ یکسانی هستند و فاصلهٔ آن‌ها از عدد خاصی کم‌تر است.