

آزمون حضوری  
شماره دوازده



رشته ریاضی  
پایه دوازدهم

## مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

این مرورنامه، ویژه مباحث جدید آزمون است. مرورنامه مباحثی که در آزمون‌های قبل به آن‌ها پرداخته شده، در پنل کاربری شما قابل دریافت است و در این فایل از تکرار آن پرهیز شده است.

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
حسابان	حسابان دوازدهم فصل ۵ - درس ۲ و ۳ - صفحه ۱۲۷ تا ۱۴۴	۲	۵	علی شهبازی	احمد رضا رسولی



## تقعر و نقطه عطف + رسم نمودار

۱ تقعر

مثال	وضعیت خطوط مماس	وضعیت $f'$	جهت تقعر	علامت $f''$
	خطوط مماس، پایین منحنی	صعودی	رو به بالا	مثبت
	خطوط مماس، بالای منحنی	نزولی	رو به پایین	منفی

۲ اگر بازه‌ای را خواستند که در آن  $f$  صعودی و تقعرش رو به پایین باشد، باید دو معادله  $f' \geq 0$  و  $f'' \leq 0$  را حل کنید و بین جواب‌هایشان اشتراک بگیرید.

۳ نقطه  $X_0 \in D_f$  را نقطه عطف تابع  $f$  می‌نامند، اگر هر سه شرط زیر را داشته باشد:

۱	تابع $f$ در $X_0$ پیوسته باشد.
۲	$f''$ در $X_0$ تغییر علامت دهد (یا نمودار $f$ در $X_0$ تغییر تقعر دهد).
۳	تابع $f$ در $X_0$ دارای خط مماس واحد باشد (نقطه گوشه نباشد).

۴ چند مثال از عطف بودن یا نبودن نقاط مشکوک:

شرایط عطف بودن	خط مماس قائم	خط مماس	✓	✓	×
عضو $D_f$ باشد	✓	✓	✓	✓	×
پیوسته باشد	✓	✓	✓	×	×
تغییر تقعر بدهد	✓	✓	✓	✓	✓
خط مماس واحد داشته باشد	✓	✓	✓	×	×
عطف است	عطف است	عطف نیست	عطف نیست	عطف نیست	عطف نیست

این طرفش  
بالای منحنی



۵ تعریف دوم نقطه عطف:

نقطه‌ای که خط مماس بر منحنی از منحنی عبور کند، نقطه عطف نام دارد.

۶ مراحل تعیین نقطه عطف تابع  $f(x)$ :

۱	ابتدا $f'$ و بعدش $f''$ را حساب می‌کنیم.
۲	$f''$ را تعیین علامت می‌کنیم.
۳	هر کجا $f''$ تغییر علامت داد، نقطه عطف داریم.

۷ اگر نقطه  $(a, b)$  نقطه عطف تابع  $f$  باشد، آن گاه هر دو شرط زیر را باید داشته باشد:

۱	این نقطه روی تابع است: $f(a) = b$
۲	مشتق دومش در $a$ باید صفر باشد: $f''(a) = 0$

۸ شکل حدودی یک تابع در همسایگی یک نقطه، به کمک علامت  $f'$  و  $f''$ :

الف)  $f'$  و  $f''$  صفر نباشند:

-	-	+	+	$f'$ (یکنواپی)
-	+	-	+	$f''$ (تقعر)

ب)  $f'$  صفر باشد و  $f''$  صفر نباشد:

صفر	صفر	$f'$
-	+	$f''$

پ)  $f'$  و  $f''$  هر دو صفر باشند: در این حالت باید  $f'$  را در آن نقطه تعیین علامت کنید.

$f'$   -   - نزولی   نزولی	$f'$   +   + صعودی   صعودی	$f'$   +   - صعودی   نزولی	$f'$   -   + نزولی   صعودی	تعیین علامت $f'$

ت)  $f'$  در آن نقطه، بی نهایت شود: اگر  $f'$  در نقطه ای بی نهایت شود، تابع در آن نقطه خط مماس قائم دارد ولی با توجه به این که حالت های مختلفی می تواند داشته باشد، باید علامت بی نهایت برای  $f'$  را در آن نقطه مشخص کنیم.

$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	مشتق راست
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	مشتق چپ



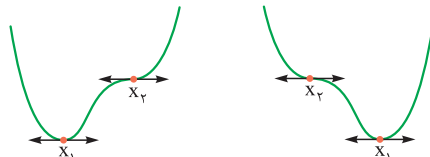
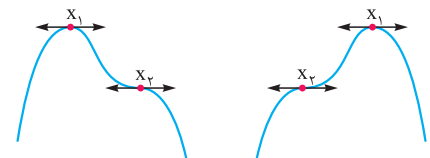
۹ بررسی نقاط مهم روی  $f'$ : از روی نمودار  $f'$ ، می‌توانیم نقاط «اکسترمم نسبی» و «عطف» تابع  $f$  را مشخص کنیم.

وضعیت نقطه روی $f'$	توضیح!	چه نقطه‌ای برای $f$ می‌شود؟
	وقتی $f'$ از + به - تغییر علامت دهد	max نسبی
	وقتی $f'$ از - به + تغییر علامت دهد	min نسبی
	نقاط min یا max تابع $f'$	عطف
	مجاوب قائم‌های هم‌سوی $f'$	عطف (با مماس قائم)

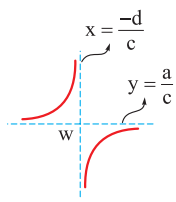
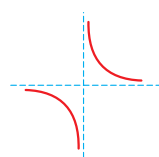
۱۰ نکات تابع درجه سوم با ضابطه  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

۱	حتماً یک نقطه عطف به طول $\frac{-b}{3a}$ دارد. این نقطه مرکز تقارن تابع است.
۲	اگر تابع نقاط مینیمم و ماکزیمم نسبی داشت، نقطه عطف، دقیقاً وسطشان است: $\begin{cases} x_{\text{عطف}} = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} \\ y_{\text{عطف}} = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2} \end{cases}$
۳	شکل تابع با توجه به علامت دلتای $f'$ و $a$ به یکی از شکل‌های زیر است:
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math>a &lt; 0</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>a &gt; 0</math> </div> </div>
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">   <math>\Delta_{f'} &gt; 0</math> </div> <div style="text-align: center;">   <math>\Delta_{f'} &gt; 0</math> </div> </div>
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">   <math>\Delta_{f'} &lt; 0</math> </div> <div style="text-align: center;">   <math>\Delta_{f'} &lt; 0</math> </div> </div>
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">   <math>\Delta_{f'} = 0</math> </div> <div style="text-align: center;">   <math>\Delta_{f'} = 0</math> </div> </div>

۱۱) توابع درجه چهارمی که برای ما ارزش طرح سؤال دارند، نمودارشان به یکی از شکل‌های زیر است:

علامت ضریب $x^4$	شکل تابع	نقاط مهم	روابط ریاضی
$a > 0$		$x_1$ : نقطه اکسترمم نسبی $x_2$ : نقطه عطف با مماس افقی	(۱) $f'(x_1) = 0$ (۲) $f'(x_2) = 0$ (۳) $f''(x_2) = 0$
$a < 0$			

۱۲) نکات تابع هموگرافیک با ضابطه  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ :

$ad - bc \neq 0$ و $c \neq 0$	شرط همگرافیک بودن
$\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$	دامنه
$\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$	برد
$x = -\frac{d}{c}$	معادله خط چین عمودی
$y = \frac{a}{c}$	معادله خط چین افقی
$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$	ضابطه وارون
$a+d=0$	شرط برابری $f$ و $f^{-1}$
$w = (-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$	مرکز تقارن
دو خط با شیب‌های $\pm 1$ و گذرنده از نقطه $w$	محورهای تقارن
$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	مشتق
	شکل تابع
$ad - bc > 0$	
	شکل تابع
$ad - bc < 0$	