

آزمون حضوری
شماره سه

رشته ریاضی



تجربی | ریاضی | انسانی

ویژه کنکور
۱۴۰۳

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
حسابان و ریاضیات پایه	زوج درس دهم: فصل‌های ششم و هفتم صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۷۰ زوج درس یازدهم: فصل‌های چهارم و پنجم صفحه ۹۱ تا انتهای کتاب	۲	۲۳	علی شهرابی	محسن فراهانی



شمارش بدون شمردن

۱ اصل جمع و اصل ضرب

حرف ربط	تعریف	اصل
یا	اگر بتوان کار ۱ را به m_1 روش، کار ۲ را به m_2 روش، کار ۳ را به m_3 روش و ... انجام داد و این کارها را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ روش می توان کار ۱ یا کار ۲ یا کار ۳ ... را انجام داد.	جمع
و	اگر کاری در چند مرحله انجام شود به طوری که مرحله اول به m_1 روش و مرحله دوم به m_2 روش و ... انجام پذیر باشد، کل آن کار به $m_1 \times m_2 \times \dots$ روش می توان انجام داد.	ضرب

۲ در حل سؤالات مربوط به اصل ضرب، با خانه‌ای شروع می کنیم که محدودیت بیشتری دارد. مثلاً وقتی بخواهیم «تعداد اعداد ۳ رقمی بدون تکرار که با ارقام ۰ تا ۶ می توان نوشت» را حساب کنیم، با خانه «صدگان» شروع می کنیم که محدودیت دارد (صفر نباید باشد).
 ۳ بعضی وقتها باید مسئله را به چند قسمت تفکیک کنیم. حالت های هر قسمت را به کمک اصل ضرب یا ... حساب کنیم.
 سپس تعداد حالت های تمام قسمت ها را با هم جمع کنیم:



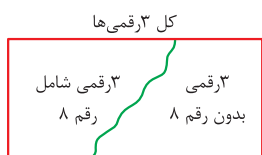
$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالات} = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$$

چند تیپ مهم سؤالات این مدلی را ببینید:

سؤال	مثال	حالت ها	جواب
۱ تعداد حالات رفتن از A به D		مسیر A به B به D مسیر A به C به D مجموع	$3 \times 2 = 6$ $2 \times 4 = 8$ $6 + 8 = 14$
۲ تعداد اعداد ۳ رقمی زوج (بدون تکرار)	با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶	یکان صفر باشد. یکان ۲ یا ۴ یا ۶ باشد. مجموع	$\frac{5}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = 20$ $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = 48$ $20 + 48 = 68$
۳ تعداد اعداد ۳ رقمی مضرب ۵ (بدون تکرار)	با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶	یکان صفر باشد. یکان ۵ باشد. مجموع	$\frac{5}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = 20$ $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = 16$ $20 + 16 = 36$

۴ اصل متمم: جملات «عدد ۳ رقمی شامل رقم ۸ باشد» و «عدد ۳ رقمی شامل رقم ۸ نباشد» را در نظر بگیرید.
 جمله ۱ جمله ۲

حساب کردن مستقیم تعداد حالات جمله ۱، کار دشواری است ولی شمردن مستقیم تعداد حالات جمله ۲ آسان است.
 از طرفی مجموع این دو حالت برابر با کل اعداد ۳ رقمی می شود:





مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

این جور مواقع اگر تعداد حالات جمله را خواستند، تعداد کل ۳ رقمی‌ها و تعداد ۳ رقمی‌های بدون رقم ۸ را حساب می‌کنیم و از هم کم می‌کنیم:

$$= (\text{تعداد ۳ رقمی‌های بدون رقم ۸}) - (\text{تعداد کل ۳ رقمی‌ها}) = \text{تعداد ۳ رقمی‌های شامل رقم ۸}$$

$$= 9 \times 10 \times 10 - 8 \times 9 \times 9 = 342$$

تذکر هر وقت در سؤال، واژه «حداقل» یا «حداکثر» دیدید به احتمال زیاد سؤال با اصل متمم حل می‌شود.

۵ فاکتوریل

تعریف	حاصل ضرب اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n را با n! نشان می‌دهیم: $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$
مقادیر ۰! تا ۶!	$0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$
بازکردن n!	$n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)! = \dots$

۶ جایگشت: هر حالت چیدن چند شیء متمایز کنار هم

۷ چند تیپ سؤال مهم در جایگشت با مثال

تیپ سؤال	مثال	جواب
فلان جا باشد یا فلان جا نباشد.	در چند جایگشت از حروف کلمه alish، حرف اول s است و حرف آخر i نیست؟	$\frac{1}{1c} \times \frac{3}{2c} \times \frac{2}{3c} \times \frac{1}{4c} \times \frac{3}{5c} = 18$ ترتیب پُرکردن ۱ ۳ ۴ ۵ ۲
چند چیز کنار هم باشند.	۶ نفر می‌خواهند کنار هم قرار بگیرند. در چند حالت علی، راستین و ایمان کنار هم هستند؟	A, B, C, ایمان, راستین, علی بسته جواب = $4! \times 3!$ داخل بسته C, B, A و بسته
چند چیز با ترتیب خاصی کنار هم باشند.	در چند جایگشت از حروف کلمه shomal، عبارت mos وجود دارد؟	mos, h, a, l جواب = $4! \times 1$ داخل بسته l, a, h و بسته
n جنس نوع A و n جنس نوع B یکی در میان باشند.	به چند طریق می‌توان ۳ مهندس و ۳ دکتر را کنار هم قرار داد به طوری که همکارها کنار هم نباشند؟	$\frac{3}{m} \times \frac{3}{d} \times \frac{2}{m} \times \frac{2}{d} \times \frac{1}{m} \times \frac{1}{d}$ جواب = $3! \times 3! \times 2$ شروع با دکتر یا مهندس
n+1 جنس نوع A و n جنس نوع B یکی در میان باشند.	به چند طریق می‌توان ۴ مهندس و ۳ دکتر را کنار هم قرار داد به طوری که همکارها کنار هم نباشند؟	$\frac{4}{m} \times \frac{3}{d} \times \frac{3}{m} \times \frac{2}{d} \times \frac{2}{m} \times \frac{1}{d} \times \frac{1}{m}$ جواب = $4! \times 3!$

۸ فرق جایگشت و انتخاب

رابطه	تعریف	
n!	n شیء داریم و می‌خواهیم با آن‌ها صف n نفره تشکیل دهیم.	جایگشت
$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	n شیء داریم و می‌خواهیم با آن‌ها صف r نفره تشکیل دهیم.	انتخاب



۹ جایگشت با تکرار و جایگشت دوری

مثال	توضیح	جایگشت با تکرار
تعداد حالات قرار گرفتن حروف کلمه $azadiiii$ کنار هم برابر است با: $\frac{7!}{3! \times 2!}$ <p>کل حروف $7!$ تعداد a تعداد i</p>	فرض کنید در کل n شیء داریم که n_1 تای آنها از یک نوع، n_2 تای آنها هم از نوعی دیگر و ... باشند. در این صورت تعداد حالات قرار گرفتن آنها کنار هم برابر است با: $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots}$	
تعداد حالات قرار گرفتن ۶ نفر دور یک میز گرد برابر با $5!$ یعنی ۱۲۰ است.	تعداد حالات قرار گرفتن n شیء دور یک میز گرد برابر با $(n-1)!$ است.	جایگشت دوری

۱۰ تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از بین n شیء متمایز که ترتیب قرار گرفتن آنها برایمان مهم نیست را یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گیریم و با $C(n, r)$ یا C_r^n یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

۱۱ چند تیپ سؤال مهم در ترکیب با مثال

تیپ	مثال	جواب
بدون شرط (ساده‌ترین)	به چند طریق می‌توان از بین ۸ نفر یک گروه ۳ نفره ساخت؟	$\binom{8}{3}$
یکی باشد	به چند طریق می‌توان با ۸ نفر یک گروه ۳ نفره ساخت به طوری که علی در گروه باشد؟	$\binom{8-1}{3-1} = \binom{7}{2}$
یکی نباشد	به چند طریق می‌توان با ۸ نفر یک گروه ۳ نفره ساخت به طوری که ایمان در گروه نباشد؟	$\binom{8-1}{3} = \binom{7}{3}$
یکی باشد و یکی نباشد	به چند طریق می‌توان با ۸ نفر یک گروه ۳ نفره ساخت به طوری که علی در گروه باشد ولی ایمان نباشد؟	ایمان علی $\binom{8-1-1}{3-1} = \binom{6}{2}$ علی انتخاب شد.
تشکیل چند گروه	به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به گروه‌های ۲، ۳ و ۳ نفری تقسیم کرد؟	$\binom{8}{2} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3}$
انتخاب از بین چند گروه	به چند طریق می‌توان از بین ۴ مهندس و ۵ پزشک، ۲ مهندس و ۲ پزشک انتخاب کرد؟	$\binom{4}{2} \times \binom{5}{2}$
حالت‌بندی	به چند طریق می‌توان از بین ۴ مهندس و ۵ پزشک، یک گروه ۴ نفره انتخاب کرد که حداقل ۳ پزشک در آن باشد.	یا $\binom{5}{3} \times \binom{4}{1} + \binom{5}{4}$ ۴ پزشک ۱ مهندس ۳ پزشک

۱۲ تعداد زیرمجموعه

۱	تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر با $\binom{n}{k}$ است.
۲	تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر با 2^n است، پس: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$



۱۳) بعضی تیپ سؤال‌های مهم در زیرمجموعه‌ها

تیپ	مثال	جواب
بدون شرط	تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ کدام است؟	$\binom{10}{6}$
بعضی‌ها باشند.	در چند زیرمجموعه ۶ عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ ، عدد ۲ وجود دارد؟	$\binom{10-1}{6-1} = \binom{9}{5}$
بعضی‌ها نباشند.	در چند زیرمجموعه ۶ عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ ، اعداد ۷ و ۸ و ۹ وجود ندارند؟	$\binom{10-3}{6} = \binom{7}{6}$
بعضی‌ها باشند و بعضی‌ها نباشند.	در چند زیرمجموعه ۶ عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ ، اعداد ۲ و ۳ وجود دارند ولی ۵ وجود ندارد؟	$\binom{10-2-1}{6-2} = \binom{7}{4}$
حداقل تعداد عضو	مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ چند زیرمجموعه حداقل ۳ عضوی دارد؟	$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3}$
استفاده از اصل ضرب	مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد که ۳ عضو آن فرد و ۲ عضو آن زوج باشد؟	$\binom{5}{3} \times \binom{4}{2}$

۱۴) مقایسه انتخاب و ترکیب

$C(n, r)$	$P(n, r)$	
ترکیب r شیء از n شیء	جایگشت (انتخاب) r شیء از n شیء	چی می‌خوانیم.
تشکیل گروه r نفره با n نفر	تشکیل صف r نفره با n نفر	تعریف
نیست.	است.	ترتیب قرار گرفتن افراد در آن مهم ...
$C_r^n, \binom{n}{r}$	P_r^n	نمادهای دیگر
$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	فرمول
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$	$P(n, 1) = n$ $P(n, 2) = n(n-1)$ $P(n, n) = n!$	روابط پر استفاده
$P(n, r) = C(n, r) \times r!$		رابطه بین P و C

۱۵) دو تساوی مهم در ترکیب

مثال	رابطه	
$\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$	$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$	۱
$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} = \binom{11}{4}$	$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$	۲



آمار و احتمال

۱ چند تعریف

اصطلاح	تعریف
پدیده تصادفی	پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش‌بینی کرد.
فضای نمونه‌ای	مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی با S نشان می‌دهیم.
پیشامد تصادفی	هر زیرمجموعه از S ، یک پیشامد است. $2^n(S)$ = تعداد کل پیشامدها

۲ تعداد اعضای فضای نمونه در آزمایش‌های مهم

آزمایش	تعداد اعضای S
پرتاب n سکه	2^n
پرتاب n تاس	6^n
پرتاب n سکه و m تاس	$2^n \times 6^m$
خانواده n فرزندی	2^n
جایگشت n شیء متمایز	$n!$
انتخاب r شیء از n شیء	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
ترکیب r شیء از n شیء	$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

۳ مجموع اعداد ۲ تاس می‌تواند عددی از ۲ (هر ۲ تاس ۱ باشند) تا ۱۲ (هر ۲ تاس ۶ باشند) باشد.

جدول زیر تعداد اعضای پیشامد مجموع اعداد ۲ تاس را نشان می‌دهد:

مجموع اعداد دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد اعضای پیشامد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
قاعده برای حفظ کردن	قاعده $n-1$: یعنی اعداد سطر بالا را باید منهای ۱ کنیم تا اعداد سطر پایین به دست آید.					از هر ۲ قاعده $n-1$ و $n-13$ جواب می‌دهد.		قاعده $n-13$: یعنی ۱۳ را منهای اعداد بالا می‌کنیم تا اعداد پایینی به دست آید.			

۴ اعمال روی پیشامدها

نمودار ون	توضیح	نماد ریاضی
	A رخ ندهد.	A'
	A یا B رخ دهد. (حداقل یکی)	$A \cup B$



نمودار ون	توضیح	نماد ریاضی
	A و B رخ دهند. (هر دو)	$A \cap B$
	A رخ دهد ولی B رخ ندهد. (فقط A رخ دهد.)	$A - B$
	دقیقاً یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.	$(A - B) \cup (B - A)$ $(A \cup B) - (A \cap B)$

۵ چند قانون در مجموعه‌ها

رابطه ریاضی	قانون
$A - B = A \cap B'$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$A - B = A - (A \cap B)$	بی‌اسم!
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	دمورگان
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	
$A \cup (A \cap B) = A$	جذب
$A \cap (A \cup B) = A$	

۶ دو پیشامد ناسازگار

نمودار ون	رابطه ریاضی	تعریف
	$A \cap B = \emptyset$ یا $P(A \cap B) = 0$	دو پیشامد که عضو مشترکی ندارند.

۷ رابطه محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکن}}$$



چند تیپ سؤال مهم در احتمال با مثال

تیپ سؤال	مثال	جواب
۱ باید اعضای پیشامد را بنویسیم.	با ارقام ۱ تا ۵ یک عدد دورقمی بدون تکرار ارقام می‌نویسیم. با چه احتمالی مضرب ۳ است؟	<ul style="list-style-type: none"> $n(S) = \frac{5}{5} \times \frac{4}{5} = 20$ $A = \{12, 15, 21, 24, 42, 45, 51, 54\} \Rightarrow n(A) = 8$ $P(A) = \frac{8}{20} = 0.4$
۲ مسائل مربوط به سکه و تاس	در پرتاب یک سکه و یک تاس، با چه احتمالی سکه رو و تاس مضرب ۳ می‌آید؟	<ul style="list-style-type: none"> $n(S) = \frac{2}{\text{تاس}} \times \frac{6}{\text{سکه}} = 12$ $n(A) = \frac{1}{\text{سکه}} \times \frac{2}{\text{تاس}} = 2$ $P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
۳ فرزندان خانواده	در یک خانواده ۵ فرزند، با چه احتمالی دقیقاً ۳ فرزند دختر داریم؟	<ul style="list-style-type: none"> $n(S) = 2^5 = 32$ $n(A) = \binom{5}{3} = 10$ $P(A) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$
۴ مسائل مرتبط با اصل ضرب و جایگشت	با حروف کلمه alish یک کلمه ۵ حرفی می‌نویسیم. (بدون تکرار حروف) با چه احتمالی حرف اول آن a است و حرف آخرش h نیست؟	<ul style="list-style-type: none"> $n(S) = 5! = 120$ $n(A) = \frac{1}{\text{اول}} \times \frac{3}{\text{ا}} \times \frac{2}{\text{ا}} \times \frac{1}{\text{ا}} \times \frac{3}{\text{آخر}} = 18$ $P(A) = \frac{18}{120} = \frac{3}{20}$
۵ مسائل مرتبط با انتخاب	در کیسه‌ای ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز داریم. ۲ مهره از کیسه خارج می‌کنیم. با چه احتمالی هم‌رنگ‌اند؟	<ul style="list-style-type: none"> $n(s) = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$ $n(A) = \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 6 + 10 = 16$ $P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

<p>۶</p> <p>مسائل مربوط به روزهای هفته</p> <p>در یک گروه ۳ نفری با چه احتمالی هر سه نفر در روزهای متفاوتی از هفته به دنیا آمده‌اند؟</p>	<p>۷</p> <p>مسائل صفحه عقربه‌دار با تقسیم‌بندی یکسان</p> <p>عقربه صفحه مقابل را می‌چرخانیم. با چه احتمالی روی عددی اول می‌ایستد؟</p>	<p>۸</p> <p>مسائل صفحه عقربه‌دار با تقسیم‌بندی غیر یکسان</p> <p>عقربه صفحه مقابل را می‌چرخانیم. با چه احتمالی روی قسمت آبی یا سبز می‌ایستد؟</p>
<p>• $n(S) = \frac{7}{\text{اول}} \times \frac{7}{\text{دوم}} \times \frac{7}{\text{سوم}}$</p> <p>• $n(S) = \frac{7}{\text{اول}} \times \frac{6}{\text{دوم}} \times \frac{5}{\text{سوم}}$</p> <p>• $P(A) = \frac{7 \times 6 \times 5}{7 \times 7 \times 7} = \frac{30}{49}$</p>	<p>۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹</p> <p>↑</p> <p>• احتمال = $\frac{\text{تعداد خانه‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل تقسیم‌بندی‌ها}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$</p>	<p>• احتمال = $\frac{\text{مجموع زوایای سبز و آبی}}{360^\circ} = \frac{70^\circ + 50^\circ}{360^\circ} = \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$</p>

۹ احتمال پیشامد متمم

کی ازش استفاده می‌کنیم؟	وقتی شمردن اعضای پیشامد A سخت است ولی شمردن اعضای پیشامد متمم یعنی A' ساده است.
فرمول احتمال متمم	$P(A) = 1 - P(A')$
کلمات کلیدی سؤال‌ها	اگر در سؤالی از کلمات «حداقل»، «حداکثر» یا «فعل منفی» استفاده شده بود، حتماً یک بار در ذهنتان متمم پیشامد را بررسی کنید. اگر شمردن اعضای متمم راحت‌تر بود، از احتمال متمم سؤال را حل کنید.

۱۰ چند فرمول در احتمال

توضیح پیشامد	نماد پیشامد	فرمول احتمال
۱ احتمال رخ ندادن A	A'	$P(A') = 1 - P(A)$
۲ احتمال رخ دادن فقط A	A - B	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
۳ احتمال رخ دادن حداقل یکی از دو پیشامد A و B	A ∪ B	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
۴ احتمال رخ دادن حداقل یکی از دو پیشامد A و B (وقتی A و B ناسازگارند.)	A ∪ B	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_0$



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

۱۱) حفظیات آمار

۱	آمار	آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.
۲	مراحل علم آمار	نتیجه‌گیری، تفاوت و پیش‌بینی → تحلیل و تفسیر داده → سازماندهی و نمایش → جمع‌آوری اعداد و ارقام
۳	سرشماری	مطالعه و بررسی کل اعضای جامعه
۴	جمعیت یا جامعه	مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد.
۵	اندازه یا حجم جامعه	تعداد اعضای جامعه
۶	نمونه	بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب می‌شود.
۷	اندازه یا حجم نمونه	تعداد اعضای نمونه
۸	متغیر	ویژگی‌ای از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.

۱۲) انواع متغیر

کمی	گسسته	قابل اندازه‌گیری است و مقادیر گسسته می‌گیرد.		کیفی	ترتیبی	اسمی	پیوسته	قابل اندازه‌گیری است و مقادیر a و b را بگیرد، عدد حقیقی بینشان را هم می‌تواند بگیرد.		قابل مرتب‌کردن است.
		✓	×					×	✓	
کیفی	ترتیبی	×	×	×	×	×	×	×	×	×
		×	×	×	×	×	×	×	×	×
		×	×	×	×	×	×	×	×	×

رادیان

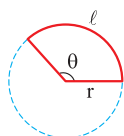
۱ نکات اولیه رادیان:

۱	تعریف ۱ رادیان	<p>زاویه مرکزی روبه‌رو به کمائی که طولش برابر با شعاع دایره است: 1 rad</p>
۲	تقریب ۱ رادیان	$1\text{ rad} \approx 57.3^\circ$
۳	مرزها برحسب رادیان	
۴	رابطه بین درجه و رادیان	$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$
۵	تبدیل سریع درجه به رادیان و برعکس	$D \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180^\circ}} R$ $R \xrightarrow{\times \frac{180^\circ}{\pi}} D$

۲ زوایای مهم برحسب درجه و رادیان:

15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π



$$l = r\theta$$

برحسب رادیان

۳ طول کمان روبه‌رو زاویه θ رادیان در دایره‌ای به شعاع r :

۴ در سؤالات «چرخیدن دو قرقره متصل به یک تسمه» یا «چرخیدن دو چرخ وسیله‌ای که چرخ‌های نابرابر دارد»، شروع حل با برابر قراردادن

$$l_1 = l_2 \rightarrow r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \rightarrow \dots$$

طول کمان‌های طی شده است:

۵ قطاع (θ برحسب رادیان):

مساحت	محیط	شکل
$\frac{1}{2} \theta r^2$	$l + 2r$ یا $r\theta + 2r$	



۶ گسترده مخروط

	شکل
<p>(۱) مولد مخروط با شعاع قطاع برابر است: $L = r_{\text{قطاع}}$</p> <p>(۲) محیط قاعده مخروط با طول کمان قطاع برابر است: $2\pi r_m = r_{\text{قطاع}} \theta \rightarrow P_{\text{قاعده}} = l$</p>	روابط بین قطاع و مخروط
<p>(۱) $L = \sqrt{r_m^2 + h^2}$</p> <p>(۲) $S_{\text{جانبی}} = \pi r_m L$</p>	دو رابطه مهم در مخروط

۷ $\left| \frac{11}{4}m - 3h \right| = \text{زاویه بین عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت } h \text{ و } m \text{ دقیقه}$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

۱ زوایای متمم، مکمل، قرینه و هم‌پایان $(k \in \mathbb{Z})$:

هم‌پایان	قرینه	مکمل	متمم	
زوایایی که اختلافشان مضربی از 360° است.	قرینه θ یعنی $-\theta$	دو زاویه که مجموعشان 180° است.	دو زاویه که مجموعشان 90° است.	تعریف
$2k\pi + \theta$ یا $360^\circ k + \theta$	$-\theta$	$\pi - \theta$ یا $180^\circ - \theta$	$\frac{\pi}{2} - \theta$ یا $90^\circ - \theta$	برای زاویه θ
				روی دایره
یک یا چند دور کامل می‌زند.	قرینه نسبت به محور Xها	قرینه نسبت به محور Yها	قرینه نسبت به $y = x$	
همه چی ثابت می‌ماند.	\cos ها برابر و بقیه قرینه هم هستند. (کسینوس منفی را می‌خورد!)	\sin ها برابر و بقیه قرینه هم هستند.	\sin یکی با \cos دیگری و \tan یکی با \cot دیگری برابر است و بالعکس.	رابطه با نسبت‌های زاویه θ
$\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$	$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ$	$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$	$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$	مثال



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

نوشتن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ برحسب زاویه α در ۳ مرحله:

مرحله ۱	$2\pi < \text{زاویه} < \pi$	اگر کمان از 2π بیشتر بود، مجاز هستیم مضارب 2π را از آن کم کنیم تا به زاویه‌ای در محدوده صفر تا 2π برسیم.
مرحله ۲	تغییر اسم می‌دهد یا نه؟	اگر π یا 2π داشتیم، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود، ولی اگر $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ داشتیم، \sin به \cos (و بالعکس) و \tan به \cot (و بالعکس) تبدیل می‌شود.
مرحله ۳	علامت + یا -	α را زاویه‌ای در ربع اول (مثلاً 1°) در نظر می‌گیریم و با توجه به آن، محدوده زاویه $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$ را مشخص و علامت نسبت را تعیین می‌کنیم.

مثال $\sin(\frac{7\pi}{2} - \alpha)$

مرحله ۱: از $\frac{7\pi}{2}$ ، 2π کم می‌کنیم:

$$\sin(2\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha) = \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$$

مرحله ۲: به خاطر $\frac{3\pi}{2}$ ، \sin به \cos تبدیل می‌شود.

مرحله ۳: با فرض $\alpha = 1^\circ$ ، زاویه $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ می‌شود 26° که در ربع (۳) قرار دارد و در این ربع \sin منفی است.

$$\sin(\frac{7\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$$

پس:

جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$:

	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
تغییر اسم می‌دهد یا نمی‌دهد؟	می‌دهد	می‌دهد	نمی‌دهد	نمی‌دهد	می‌دهد	می‌دهد	نمی‌دهد	نمی‌دهد
ناحیه (ربع) زاویه جدید	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۱
\sin	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
\cos	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
\tan	$\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$	$\tan \alpha$
\cot	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$	$\cot \alpha$

برای آن‌که کسرهایی به فرم $\frac{a \sin \alpha + b \cos \alpha}{c \sin \alpha + d \cos \alpha}$ برحسب $\tan \alpha$ بنویسیم،

$$\frac{\frac{a \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{b \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{c \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{d \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{a \tan \alpha + b}{c \tan \alpha + d}$$

باید همه نسبت‌ها را به $\cos \alpha$ تقسیم کنیم:



توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس

ضابطه تابع	نمودار	دامنه	بُرد	دوره تناوب	نقاط max	نقاط min	صفه‌های تابع
$y = \sin x$		\mathbb{R}	$[-1, 1]$	2π	$2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$2k\pi + \frac{3\pi}{2}$	$k\pi$
$y = \cos x$		\mathbb{R}	$[-1, 1]$	2π	$2k\pi$	$2k\pi + \pi$	$k\pi + \frac{\pi}{2}$

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$	جمع	سینوس
$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$	تفاضل	
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	جمع	کسینوس
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	تفاضل	
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	جمع	تانژانت
$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$	تفاضل	

۱ اتحادهای $\alpha \pm \beta$

۲ برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایای 15° ، 75° ، 105° و ... از اتحادهای بالا استفاده می‌کنیم.

۳ اتحادهای 2α

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	اتحاد	سینوس
$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$	نتیجه	
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	اتحاد	کسینوس
$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$	نتایج	
$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$		
$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	اتحاد	تانژانت

۴ اتحادهای 3α

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$



۵ نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۱۵° و (۷۵°) و $۲۲/۵^\circ$ و $(۶۷/۵^\circ)$ را بلد باشید.

	sin	cos	tan	cot
$۱۵^\circ = \frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{۴}$ یا $\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{۴}$ یا $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$	$۲-\sqrt{۳}$	$۲+\sqrt{۳}$
$۷۵^\circ = \frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{۴}$ یا $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{۴}$ یا $\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲}$	$۲+\sqrt{۳}$	$۲-\sqrt{۳}$
$۲۲/۵^\circ = \frac{\pi}{۸}$	$\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}{۲}$	$\sqrt{۲}-۱$	$\sqrt{۲}+۱$
$۶۷/۵^\circ = \frac{۳\pi}{۸}$	$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}{۲}$	$\sqrt{۲}+۱$	$\sqrt{۲}-۱$

برای به دست آوردن سینوس و کسینوس زوایای ۱۵° و $۲۲/۵^\circ$ از دواتحاد $۱+\cos ۲\alpha = ۲\cos^2 \alpha$ و $۱-\cos ۲\alpha = ۲\sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم.

۶ اتحادهای تکمیلی

۱	$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{۲} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{۴})$
۲	$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$
۳	$\cot \alpha - \tan \alpha = ۲\cot ۲\alpha$
۴	$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
۵	$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = ۱ - ۲\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^2 ۲\alpha$
۶	$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = ۱ - ۳\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^2 ۲\alpha$

۷ چند تکنیک

اگر عبارت‌مان به شکل $\cos \alpha \cos ۲\alpha \cos ۴\alpha \dots$ بود باید خودمان $\sin \alpha$ را در آن ضرب کنیم و بعد از ساده کردن، جواب به دست آمده را بر $\sin \alpha$ تقسیم کنیم.

$$\begin{aligned} \text{مثال} \quad \cos ۱^\circ \cdot \cos ۲^\circ \cdot \cos ۴^\circ &\xrightarrow[\sin ۱^\circ]{\text{ضربدر و تقسیم بر}} \frac{\frac{1}{2}\sin ۲^\circ}{\sin ۱^\circ} \cdot \cos ۲^\circ \cdot \cos ۴^\circ = \frac{\frac{1}{2}\sin ۴^\circ}{\sin ۱^\circ} \cdot \cos ۴^\circ \\ &= \frac{\frac{1}{4}\sin ۸^\circ}{\sin ۱^\circ} = \frac{\frac{1}{8}\sin ۸^\circ}{\sin ۱^\circ} = \frac{1}{8} \tan ۸^\circ \end{aligned}$$



برای ساده کردن عبارت‌های به فرم $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ از $\sqrt{a^2 + b^2}$ فاکتور می‌گیریم و بعد آن را به شکل ضربی از $\sin(\alpha + \beta)$ می‌نویسیم.

۲

مثال $\sin 1^\circ + \sqrt{3} \cos 1^\circ \xrightarrow{\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2} 2\left(\frac{1}{2} \sin 1^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 1^\circ\right)$
 $= 2(\cos 60^\circ \sin 1^\circ + \sin 60^\circ \cos 1^\circ) = 2 \sin(1^\circ + 60^\circ) = 2 \sin 7^\circ$

همسایگی

۱) انواع همسایگی:

انواع همسایگی	نمایش روی محور	تعریف بر حسب x_0	مثال برای $x_0 = 1$
همسایگی		x_0 باید داخل بازه باشد. $x_0 \in (a, b)$	$(-2, 2)$
همسایگی راست		x_0 باید ابتدای بازه باشد. (x_0, b)	$(1, 2)$
همسایگی چپ		x_0 باید انتهای بازه باشد. (a, x_0)	$(-1, 1)$
همسایگی محذوف		x_0 از داخل بازه حذف می‌شود. $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ یا $(a, b) - \{x_0\}$	$(0, 3) - \{1\}$ یا $(0, 1) \cup (1, 3)$

۲) اگر بازه (a, b) یک همسایگی برای x_0 باشد، باید $a < x_0 < b$ باشد. اگر لازم شد، باید دو نامعادله $a < x_0$ و $x_0 < b$ را حل کنیم و

بین جواب‌هایشان اشتراک بگیریم.

حد و پیوستگی

مقدمات حد

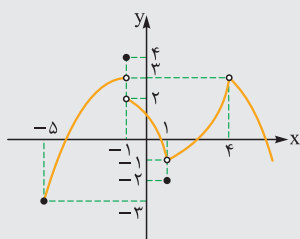
تعریف حد:

نوع حد	نماد ریاضی	تعریف	روی نمودار
حد راست	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$	اگر x با مقادیر بیشتر از a (از سمت راست) به a نزدیک شود، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شوند. کاری با خود نقطه a و سمت چپش نداریم.	
حد چپ	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	اگر x با مقادیر کمتر از a (از سمت چپ) به a نزدیک شود، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شوند. کاری با خود نقطه a و سمت راستش نداریم.	
حد	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	اگر حد راست و چپ در $x = a$ هر دو برابر با L باشند، در $x = a$ حد داریم. کاری با خود نقطه a نداریم.	

برای آن که تابع f در $x = a$ حد داشته باشد (و مقدار حدش L باشد)، باید هر دو شرط زیر را داشته باشد:

۱	در $x = a$ همسایگی راست و چپ داشته باشد.
۲	حد راست و چپ در $x = a$ برابر L باشد.

مثال ۱ با توجه به نمودار زیر داریم:



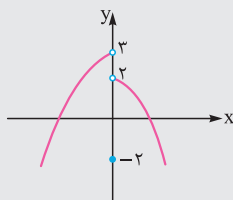
طول نقطه	حد راست	حد چپ	حد	مقدار
$x = -5$	-3	ندارد.	ندارد.	-3
$x = -1$	2	3	ندارد.	4
$x = 1$	-1	-1	-1	-2
$x = 4$	3	3	3	تعریف نشده

چندتا میل کردن خاص!

اگر ...	آن گاه ...
$x \rightarrow 0$	$ x \rightarrow 0^+$
$x \rightarrow a$	$ x - a \rightarrow 0^+$
$\sin x \rightarrow 1$	$1 - \sin x \rightarrow 0^+$
$\cos x \rightarrow 1$	$1 - \cos x \rightarrow 0^+$



مثال ۲ اگر نمودار $y = f(x)$ به شکل زیر باشد، آن گاه:

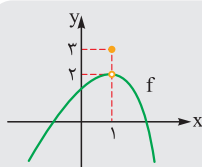


$$۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(1 - \sin x) \stackrel{\text{معادل با}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x^2) \stackrel{\text{معادل با}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$$

۴ حد توابع ساخته شده از روی f : فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد، در این صورت:

تابع	حاصل حد
۱ $ f $	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L $
۲ f^{-1}	$\lim_{x \rightarrow L} f^{-1}(x) = a$
۳ $[f]$	$L \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [L]$
	$L \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = \begin{cases} L-1 & \text{با } \max \\ L & \text{با } \min \end{cases}$
	$L \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$ موجود نیست.
۴ $f(g(x))$	مرحله ۱: حد تابع داخلی را وقتی $x \rightarrow a$ حساب می کنیم، مثلاً L می شود (مهم است که L^+ می شود یا L^-).
	مرحله ۲: حد تابع بیرونی را وقتی $x \rightarrow L^?$ می رود حساب می کنیم.



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x) = 1$$

مثال ۳

$$۱ \text{ حالت: } \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \sqrt{x} = \sqrt{5} \approx 2.23 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} [\sqrt{x}] = [\sqrt{5}] = 2$$

$$۲ \text{ حالت: } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = 2 \xrightarrow{\text{نقطه } \min \text{ است. برای } x=1 \text{ سهمی.}} \lim_{x \rightarrow 1} [x^2 - 2x + 3] = 2$$

$$۳ \text{ حالت: } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 3 \xrightarrow{\text{نقطه } \min \text{ یا } \max \text{ نیست. برای } x=2 \text{ سهمی.}} \lim_{x \rightarrow 2} [x^2 - 2x + 3] \text{ موجود نیست.}$$

مثال ۴

مثال ۵ اگر $f(x) = \sin x - 1$ و $g(x) = [x]$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} g(f(x))$ چه قدر است؟

$$۱ \text{ مرحله: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = 1^- - 1 = 0^-$$

$$۲ \text{ مرحله: } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = [0^-] = -1$$

پاسخ



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

۵ حد توابع زیر در هر نقطه از دامنه‌شان برابر با مقدار تابع در آن نقطه است.

$\cos x$	$\sin x$	گویا	چندجمله‌ای
a^x (نمایی)	$\log_a x$	$\cot x$	$\tan x$

۶ چه وقت‌هایی برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ، باید حد راست و چپ را چک کنیم؟

نقاط مهم	مثال	بررسی حد وقتی $x \rightarrow$
چندضابطه‌ای	$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 1 \\ 2x - 3 & x < 1 \end{cases}$	حد ندارد. $\Rightarrow \left. \begin{aligned} &\text{حد راست: } 1^2 + 2 = 3 \\ &\text{حد چپ: } 2(1) - 3 = -1 \end{aligned} \right\}$
قدرمطلق	$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{ x - 1 }$	حد ندارد. $\Rightarrow \left. \begin{aligned} &\text{حد راست: } \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4 \\ &\text{حد چپ: } \frac{(x-1)(x+3)}{-(x-1)} = -4 \end{aligned} \right\}$
براکتی	$f(x) = [2x] - [x]$	$\Rightarrow \text{حد} = 1 \left. \begin{aligned} &\text{حد راست: } [2^+] - [1^+] = 2 - 1 = 1 \\ &\text{حد چپ: } [2^-] - [1^-] = 1 - 0 = 1 \end{aligned} \right\}$

۷ دوتا حد مهم:

ضابطه تابع	نکته مهم	مثال
$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{Z} \\ h(x) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	حدش در تمام نقاط از ضابطه مربوط به $x \notin \mathbb{Z}$ حساب می‌شود.	$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Z} \\ x^2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2^2 = 4$
$f(x) = [g(x)] + [-g(x)]$	حدش در تمام نقاط برابر با -1 است.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} ([\sin 2x] + [-\sin 2x]) = -1$

۸ فرق $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$ و $[\lim_{x \rightarrow a} f(x)]$: فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد، آن وقت:

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$	مهم است که حاصل حد بالا L^+ شده یا L^- . هر کدام بود، از آن براکت می‌گیریم.
مثال	$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x] = [1^-] = 0$
$[\lim_{x \rightarrow a} f(x)]$	خود L مهم است (کاری نداریم L^+ است یا L^-). حاصل حد $[L]$ می‌شود.
مثال	$[\lim_{x \rightarrow 0} \cos x] = [1] = 1$



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

۹ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد، آن گاه:

تابع	$kf(x)$	f^n	\sqrt{f}	$\frac{1}{f}$	$ f $
حد در $x = a$	$k.L$	L^n	$\sqrt{L}, (L > 0)$	$\frac{1}{L}, (L \neq 0)$	$ L $

۱۰ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آن گاه:

تابع	$f \pm g$	$f \times g$	$\frac{f}{g}$
حد در $x = a$	$L_1 \pm L_2$	$L_1 \times L_2$	$\frac{L_1}{L_2}, (L_2 \neq 0)$

۱۱ بررسی حد داشتن یا نداشتن توابع $f \pm g$ در حالات مختلف (حد دارد: ✓ حد ندارد: ✗):

f	g	$f \pm g$	$f \times g$	$\frac{f}{g}$
✓	✓	✓	✓	✓ (به شرطی که حاصل حد مخرج مخالف صفر باشد.)
✓	✗	✗	نامعلوم*	نامعلوم*
✗	✓	✗	نامعلوم*	✗
✗	✗	نامعلوم	نامعلوم	نامعلوم

تذکر در ۳ حالت «نامعلوم*»، اگر تابعی که حد دارد، حدش صفر باشد باید وضعیت تابع را بررسی کنیم، ولی اگر حدش صفر نباشد، قطعاً حد نداریم.

رفع ابهام «صفر/صفر»

۱ روش‌های حل حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وقتی $x \rightarrow a$:

روش حل	چه جوری حل می‌کنیم؟	مثال
به کمک تجزیه	باید در صورت و مخرج عامل $x - a$ را پیدا کنیم.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{4}{-1} = -4$
گویا کردن با اتحاد مزدوج	صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب می‌کنیم.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1}-3}{2x-4} \times \frac{\sqrt{5x-1}+3}{\sqrt{5x-1}+3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x-1-9}{6(2x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(x-2)}{12(x-2)} = \frac{5}{12}$
گویا کردن با اتحاد چاق و لاغر	صورت و مخرج را در چاق عبارت رادیکالی ضرب می‌کنیم.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x-5} \times \frac{\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt[3]{x+3}+4}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+2\sqrt[3]{x+3}+4} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3-8}{12(x-5)} = \frac{1}{12}$



وقتی $u \rightarrow 0$ ، می‌توانیم جای $\sin u$ از u استفاده کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

مثال ۱ برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ ، جای $\sin 3x$ می‌نویسیم $3x$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

مثال ۲ برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$ ، جای $\sin(x-2)$ می‌نویسیم $(x-2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = [1^-] = 0$$

۳ اگر $\frac{\sin u}{u}$ داخل براکت رفت، باید جایش 1^- بنویسید، پس:

۴ اگر $u \rightarrow 0$ ، می‌توانیم جای $(1+u)^n$ از $1+nu$ استفاده کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^3 - 1}{\sqrt{1+x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(1+2x)^3 - 1}^{1+3(2x)}}{\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}_{1+\frac{1}{2}x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+6x-1}{1+\frac{x}{2}-1} = \frac{6x}{\frac{x}{2}} = 12$$

مثال ۳

- پیوستگی -

۱ انواع پیوستگی:

نموداری	تعریف	نوع پیوستگی
	مقدار = حد راست	پیوستگی راست
	مقدار = حد چپ	پیوستگی چپ
	مقدار = حد چپ = حد راست	پیوستگی

۲ پیدا کردن مجهول در توابع پیوسته:

فرم تابع	برای پیوستگی f در $x=a$ چه می‌کنیم؟	شرط پیوستگی در نقطه مرزی دامنه
$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ k & x = a \end{cases}$	حد چپ و راست را از g می‌گیریم؛ مقدارش هم k است.	$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$
$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq a \\ h(x) & x < a \end{cases}$	حد راست و مقدارش را از g و حد چپ را از h می‌گیریم.	$g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x)$
$f(x) = \begin{cases} g(x) & x > a \\ k & x = a \\ h(x) & x < a \end{cases}$	حد راست را از g و حد چپ را از h می‌گیریم؛ مقدارش هم k است.	$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = k$



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

۳) توابع پیوسته روی \mathbb{R} :

$\sqrt[n]{x}$	$ x $	$\cos x$	$\sin x$
---------------	-------	----------	----------

۴) توابع پیوسته روی دامنه:

تابع	فرم ضابطه	نقاط پیوستگی (دامنه)	مثال
کسری	$\frac{A}{u}$	$\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$	$\frac{x+1}{x^2-4} \xrightarrow{\text{نقاط پیوستگی}} \mathbb{R} - \{\pm 2\}$
لگاریتمی	$\log_b u$	$u > 0$	$\log_7(x-3) \Rightarrow (3, +\infty)$
تانژانت	$\tan u$	$u \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\tan \frac{\pi x}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq 2k+1$
کتانژانت	$\cot u$	$u \neq k\pi$	$\cot \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} \neq k\pi \Rightarrow x \neq 2k\pi$
رادیکالی با فرجه زوج	$\sqrt[n]{u}$	$u > 0$	$\sqrt{x-4} \Rightarrow (4, +\infty)$

مرورنامه آزمون حضوری شماره سه

رشته ریاضی

۵) نقاط ناپیوستگی توابع براکتی:

$\{u \in \mathbb{Z} \mid x \text{ هایی که به ازای آن‌ها } u \in \mathbb{Z}\} - \{u \mid \text{نسبی}\}$ نقاط ناپیوستگی $[u]$

مثال $\{x \mid \text{نقطه } \min \text{ سهمی } y = x^2 \text{ است}\} = \{0, \pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{3}\} - \{0\} = \{\pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{3}\}$
در بازه $(-2, 2)$

۶) پیوستگی روی بازه:

بازه	شرط پیوستگی	شکل
(a, b)	پیوستگی در تمام نقاط بین $x = a$ تا $x = b$	
$[a, b)$	۱) پیوستگی در بازه (a, b) ۲) پیوستگی راست در $x = a$	
$(a, b]$	۱) پیوستگی در بازه (a, b) ۲) پیوستگی چپ در $x = b$	
$[a, b]$	۱) پیوستگی در بازه (a, b) ۲) پیوستگی راست در $x = a$ ۳) پیوستگی چپ در $x = b$	



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان و ریاضیات پایه

۷ بررسی پیوستگی یا ناپیوستگی توابع $f \pm g$ در حالات مختلف (پیوسته: ✓ ناپیوسته: ✗):

$\frac{f}{g}$	$f \times g$	$f \pm g$	g	f
✓ (به شرطی که حاصل حد مخرج مخالف صفر باشد.)	✓	✓	✓	✓
نامعلوم*	نامعلوم*	✗	✗	✓
✗	نامعلوم*	✗	✓	✗
نامعلوم			✗	✗

تذکر در ۳ حالت «نامعلوم» اگر تابعی که حد دارد، حدش صفر باشد، باید وضعیت تابع را بررسی کنیم، ولی اگر حدش صفر نباشد، قطعاً پیوستگی نداریم.

مرورنامه آزمون حضوری شماره سه

رشته ریاضی