آزمون حضوری
شماره سه

رشته تجربی

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

ویژه کنکور
۱۴۰۳

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضی	**زوج‌درس دهم**: فصل ششم + فصل هفتم صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۷۰ **زوج‌درس یازدهم**: فصل پنجم + فصل ششم + فصل هفتم صفحه‌های ۹۵ تا ۱۶۶	۲	۲۳	علی شهرابی	محسن فراهانی

شمارش، بدون شمردن

۱ اصل جمع و اصل ضرب

اصل	تعریف	حرف ربط
جمع	اگر بتوان کار ۱ را به m_1 روش، کار ۲ را به m_2 روش، کار ۳ را به m_3 روش و ... انجام داد و این کارها را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m_1+m_2+m_3+\cdots$ روش می‌توان کار ۱ یا کار ۲ یا کار ۳ یا ... را انجام داد.	یا
ضرب	اگر کاری در چند مرحله انجام شود به طوری که مرحلهٔ اول به m_1 روش و مرحلهٔ دوم به m_2 روش و ... انجام‌پذیر باشد، کل آن کار به $m_1\times m_2\times\cdots$ روش می‌توان انجام داد.	و

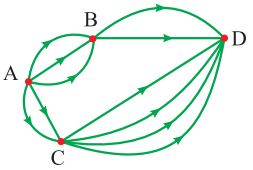
۲ در حل سؤالات مربوط به اصل ضرب، با خانه‌ای شروع می‌کنیم که محدودیت بیشتری دارد. مثلاً وقتی بخواهیم «تعداد اعداد ۳رقمی بدون تکرار که با ارقام ۰ تا ۶ می‌توان نوشت» را حساب کنیم، با خانهٔ «صدگان» شروع می‌کنیم که محدودیت دارد (صفر نباید باشد).

۳ بعضی‌وقت‌ها باید مسئله را به چند قسمت تفکیک کنیم. حالت‌های هر قسمت را به کمک اصل ضرب یا ... حساب کنیم.

سپس تعداد حالت‌های تمام قسمت‌ها را با هم جمع کنیم:

$\Rightarrow$ تعداد کل حالات $=n_1+n_2+n_3+\cdots$

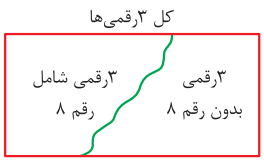
چند تیپ مهم سؤالات این مدلی را ببینید:

	سؤال	مثال	حالت‌ها	جواب
۱	تعداد حالات رفتن از A به D		مسیر A به B به D مسیر A به C به D مجموع	$۳\times۲=۶$ $۲\times۴=۸$ $۶+۸=۱۴$
۲	تعداد اعداد ۳رقمی زوج (بدون تکرار)	با ارقام ۰,۱,۲,۴,۵,۶	یکان صفر باشد. یکان ۲ یا ۴ یا ۶ باشد. مجموع	$۲۰=\frac{۱}{ی}\times\frac{۴}{د}\times\frac{۵}{ص}$ $۴۸=\frac{۳}{ی}\times\frac{۴}{د}\times\frac{۴}{ص}$ $۲۰+۴۸=۶۸$
۳	تعداد اعداد ۳رقمی مضرب ۵ (بدون تکرار)	با ارقام ۰,۱,۲,۴,۵,۶	یکان صفر باشد. یکان ۵ باشد. مجموع	$۲۰=\frac{۱}{ی}\times\frac{۴}{د}\times\frac{۵}{ص}$ $۱۶=\frac{۱}{ی}\times\frac{۴}{د}\times\frac{۴}{ص}$ $۲۰+۱۶=۳۶$

۴ اصل متمم: جملات «$\underbrace{\text{عدد ۳رقمی شامل رقم ۸ باشد}}_{\text{جملهٔ ۱}}$» و «$\underbrace{\text{عدد ۳رقمی شامل رقم ۸ نباشد}}_{\text{جملهٔ ۲}}$» را در نظر بگیرید.

حساب‌کردن مستقیم تعداد حالات جملهٔ ۱، کار دشواری است ولی شمردن مستقیم تعداد حالات جملهٔ ۲ آسان است.

از طرفی مجموع این دو حالت برابر با کل اعداد ۳رقمی می‌شود:



این‌جور مواقع اگر تعداد حالات جمله را خواستند، تعداد کل ۳رقمی‌ها و تعداد ۳رقمی‌های بدون رقم ۸ را حساب می‌کنیم و از هم کم می‌کنیم:

= (تعداد ۳رقمی‌های بدون رقم ۸) − (تعداد کل ۳رقمی‌ها) = تعداد ۳رقمی‌های شامل رقم ۸

$\underline{۹}\times\underline{۱۰}\times\underline{۱۰}-\underline{۸}\times\underline{۹}\times\underline{۹}=۳۴۲$

تذکر هر وقت در سؤال، واژهٔ «حداقل» یا «حداکثر» دیدید به احتمال زیاد سؤال با اصل متمم حل می‌شود.

۵ فاکتوریل

تعریف	**حاصل‌ضرب اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n را با !n نشان می‌دهیم:** $۱\times۲\times۳\times\cdots\times n=n!$					
مقادیر !۰ تا !۶	$۰!=۱$	$۱!=۱$	$۲!=۲$	$۳!=۶$	$۴!=۲۴$	$۵!=۱۲۰$	$۶!=۷۲۰$
بازکردن !n	$n!=n\times(n-۱)!=n\times(n-۱)\times(n-۲)!=\cdots$						

۶ جایگشت: هر حالت چیدن چند شیء متمایز کنار هم

۷ چند تیپ سؤال مهم در جایگشت با مثال

تیپ سؤال	مثال	جواب
فلان جا باشد یا فلان جا نباشد.	در چند جایگشت از حروف کلمهٔ alish، حرف اول s است و حرف آخر i نیست؟	$\underline{۱}_{ح۱}\times\underline{۳}_{ح۲}\times\underline{۲}_{ح۳}\times\underline{۱}_{ح۴}\times\underline{۳}_{ح۵}=۱۸$ ۱ ۳ ۴ ۵ ۲ $\xrightarrow[\text{پرکردن}]{\text{ترتیب}}$
چند چیز کنار هم باشند.	۶ نفر می‌خواهند کنار هم قرار بگیرند. در چند حالت علی، راستین و ایمان کنار هم هستند؟	$\boxed{\text{ایمان , راستین , علی}}$, A,B,C بسته جواب = $\underbrace{۴!}_{\text{C,B,A و بسته}}\times\underbrace{۳!}_{\text{داخل بسته}}$
چند چیز با ترتیب خاصی کنار هم باشند.	در چند جایگشت از حروف کلمهٔ shomal، عبارت mos وجود دارد؟	$\boxed{\text{mos}}$, h , a , l جواب = $\underbrace{۴!}_{\text{l,a,h و بسته}}\times\underbrace{۱}_{\text{داخل بسته}}$
n جنس نوع A و n جنس نوع B یکی در میان باشند.	به چند طریق می‌توان ۳ مهندس و ۳ دکتر را کنار هم قرار داد به طوری که همکارها کنار هم نباشند؟	$\underline{۱}_{د}\times\underline{۱}_{م}\times\underline{۲}_{د}\times\underline{۲}_{م}\times\underline{۳}_{د}\times\underline{۳}_{م}$ جواب = $۳!\times۳!\times۲$ شروع با دکتر یا مهندس
n+۱ جنس نوع A و n جنس نوع B یکی در میان باشند.	به چند طریق می‌توان ۴ مهندس و ۳ دکتر را کنار هم قرار داد به طوری که همکارها کنار هم نباشند؟	$\underline{۱}_{م}\times\underline{۱}_{د}\times\underline{۲}_{م}\times\underline{۲}_{د}\times\underline{۳}_{م}\times\underline{۳}_{د}\times\underline{۴}_{م}$ جواب = $۴!\times۳!$

۸ فرق جایگشت و انتخاب

	تعریف	رابطه
جایگشت	n شیء داریم و می‌خواهیم با آن‌ها صف nنفره تشکیل دهیم.	$n!$
انتخاب	n شیء داریم و می‌خواهیم با آن‌ها صف rنفره تشکیل دهیم.	$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

۹ جایگشت با تکرار و جایگشت دوری

	توضیح	مثال
جایگشت با تکرار	فرض کنید در کل n شیء داریم که n_1 تای آن‌ها از یک نوع، n_2 تای آن‌ها هم از نوعی دیگر و ... باشند. در این صورت تعداد حالات قرارگرفتن آن‌ها کنار هم برابر است با: $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots}$	تعداد حالات قرار گرفتن حروف کلمهٔ azadiii کنار هم برابر است با: $\frac{\overset{\text{کل حروف}}{7!}}{\underset{\text{تعداد a}}{2!} \times \underset{\text{تعداد i}}{3!}}$
جایگشت دوری	تعداد حالات قرارگرفتن n شیء دور یک میز گرد برابر با $(n-1)!$ است.	تعداد حالات قرارگرفتن ۶ نفر دور یک میز گرد برابر با $5!$ یعنی ۱۲۰ است.

۱۰ تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از بین n شیء متمایز که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها برایمان مهم نیست را یک ترکیب rتایی از n شیء می‌گیریم و با $C(n,r)$ یا C_r^n یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

۱۱ چند تیپ سؤال مهم در ترکیب با مثال

تیپ	مثال	جواب
بدون شرط (ساده‌ترین)	به چند طریق می‌توان از بین ۸ نفر یک گروه ۳نفره ساخت؟	$\binom{8}{3}$
یکی باشد	به چند طریق می‌توان با ۸ نفر یک گروه ۳نفره ساخت به طوری که علی در گروه باشد؟	$\binom{8-1}{3-1} = \binom{7}{2}$
یکی نباشد	به چند طریق می‌توان با ۸ نفر یک گروه ۳نفره ساخت به طوری که ایمان در گروه نباشد؟	$\binom{8-1}{3} = \binom{7}{3}$
یکی باشد و یکی نباشد	به چند طریق می‌توان با ۸ نفر یک گروه ۳نفره ساخت به طوری که علی در گروه باشد ولی ایمان نباشد؟	$\binom{8-\overset{\text{ایمان علی}}{1}-\underset{\text{علی انتخاب‌شد.}}{1}}{3-1} = \binom{6}{2}$
تشکیل چند گروه	به چند طریق می‌توان ۸ نفر را به گروه‌های ۲، ۳ و ۳ نفری تقسیم کرد؟	$\binom{8}{2} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3}$
انتخاب از بین چند گروه	به چند طریق می‌توان از بین ۴ مهندس و ۵ پزشک، ۲ مهندس و ۲ پزشک انتخاب کرد؟	$\binom{4}{2} \times \binom{5}{2}$
حالت‌بندی	به چند طریق می‌توان از بین ۴ مهندس و ۵ پزشک، یک گروه ۴ نفره انتخاب کرد که حداقل ۳ پزشک در آن باشد.	$\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{۳ پزشک}} \underset{\text{و}}{\times} \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{۱ مهندس}} \overset{\text{یا}}{+} \underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{۴ پزشک}}$

۱۲ تعداد زیرمجموعه

۱	تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعهٔ nعضوی برابر با $\binom{n}{k}$ است.
۲	تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی برابر با 2^n است، پس: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

۱۳ بعضی تیپ سؤال‌های مهم در زیرمجموعه‌ها

تیپ	مثال	جواب
بدون شرط	تعداد زیرمجموعه‌های ۶عضوی مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۱۰\}$ کدام است؟	$\binom{۱۰}{۶}$
بعضی‌ها باشند.	در چند زیرمجموعهٔ ۶عضوی از مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۱۰\}$، عدد ۲ وجود دارد؟	$\binom{۱۰-۱}{۶-۱}=\binom{۹}{۵}$
بعضی‌ها نباشند.	در چند زیرمجموعهٔ ۶عضوی از مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۱۰\}$، اعداد ۷ و ۸ و ۹ وجود ندارند؟	$\binom{۱۰-۳}{۶}=\binom{۷}{۶}$
بعضی‌ها باشند و بعضی‌ها نباشند.	در چند زیرمجموعهٔ ۶عضوی از مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۱۰\}$، اعداد ۲ و ۳ وجود دارند ولی ۵ وجود ندارد؟	$\binom{۱۰-۲-۱}{۶-۲}=\binom{۷}{۴}$
حداقل تعداد عضو	مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۱۰\}$ چند زیرمجموعهٔ حداقل ۳عضوی دارد؟	$\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۲}+\binom{۱۰}{۳}$
استفاده از اصل ضرب	مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۹\}$ چند زیرمجموعهٔ ۵عضوی دارد که ۳ عضو آن فرد و ۲ عضو آن زوج باشد؟	$\binom{۵}{۳}\times\binom{۴}{۲}$

۱۴ مقایسهٔ انتخاب و ترکیب

	P(n,r)			C(n,r)		
چی می‌خوانیم.	جایگشت (انتخاب) rشیء از nشیء			ترکیب r شیء از n شیء		
تعریف	تشکیل صف r نفره با n نفر			تشکیل گروه r نفره با n نفر		
ترتیب قرارگرفتن افراد در آن مهم ...	است.			نیست.		
نمادهای دیگر	P_r^n			C_r^n , $\binom{n}{r}$		
فرمول	$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$			$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}$		
روابط پر استفاده	$P(n,n)=n!$	$P(n,۲)=n(n-۱)$	$P(n,۱)=n$	$\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$	$\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$	$\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$
رابطهٔ بین P و C	$P(n,r)=C(n,r)\times r!$					

۱۵ دو تساوی مهم در ترکیب

	رابطه	مثال
۱	$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$	$\binom{۱۰}{۳}=\binom{۱۰}{۷}$
۲	$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+۱}=\binom{n+۱}{r+۱}$	$\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}=\binom{۱۱}{۴}$

آمار و احتمال

۱ چند تعریف

اصطلاح	تعریف	
پدیدهٔ تصادفی	پدیده یا آزمایشی که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش‌بینی کرد.	
فضای نمونه‌ای	مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی	با S نشان می‌دهیم.
پیشامد تصادفی	هر زیرمجموعه از S، یک پیشامد است.	تعداد کل پیشامدها $= ۲^{n(S)}$

۲ تعداد اعضای فضای نمونه در آزمایش‌های مهم

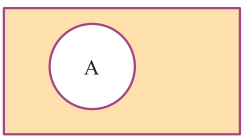
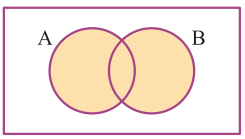
آزمایش	تعداد اعضای S
پرتاب nسکه	۲^n
پرتاب nتاس	۶^n
پرتاب nسکه و mتاس	$۲^n \times ۶^m$
خانوادهٔ nفرزندی	۲^n
جایگشت nشیء متمایز	$n!$
انتخاب rشیء از nشیء	$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$
ترکیب rشیء از nشیء	$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}$

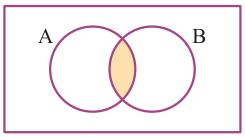
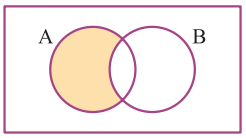
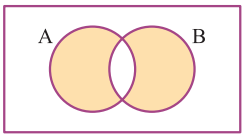
۳ مجموع اعداد ۲ تاس می‌تواند عددی از ۲ (هر ۲ تاس ۱ باشند) تا ۱۲ (هر ۲ تاس ۶ باشند) باشد.

جدول زیر تعداد اعضای پیشامد مجموع اعداد ۲ تاس را نشان می‌دهد:

مجموع اعداد دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد اعضای پیشامد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
قاعده برای حفظ کردن	قاعدهٔ $n-۱$: یعنی اعداد سطر بالا را باید منهای ۱ کنیم تا اعداد سطر پایین به دست آید.					از هر ۲ قاعدهٔ $n-۱$ و $n-۱۳$ جواب می‌دهد.	قاعدهٔ $n-۱۳$: یعنی ۱۳ را منهای اعداد بالا می‌کنیم تا اعداد پایینی به دست آید.				

۴ اعمال روی پیشامدها

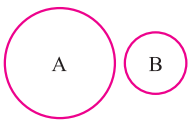
نماد ریاضی	توضیح	نمودار وِن
A'	A رخ ندهد.	
$A \cup B$	A یا B رخ دهد. (حداقل یکی)	

نماد ریاضی	توضیح	نمودار وِن
$A \cap B$	A و B رخ دهند. (هر دو)	
$A - B$	A رخ دهد ولی B رخ ندهد. (فقط A رخ دهد.)	
$(A-B)\cup(B-A)$	دقیقاً یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.	
$(A\cup B)-(A\cap B)$		

۵ چند قانون در مجموعه‌ها

قانون	رابطهٔ ریاضی
تبدیل تفاضل به اشتراک	$A - B = A \cap B'$
بی‌اسم!	$A - B = A - (A \cap B)$
دمورگان	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
جذب	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$

۶ دو پیشامد ناسازگار

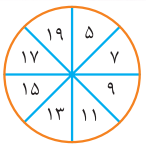
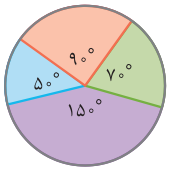
تعریف	رابطهٔ ریاضی	نمودار وِن
دو پیشامد که عضو مشترکی ندارند.	$A \cap B = \varnothing$ یا $P(A \cap B) = ۰$	

۷ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکن}}$$

۸ چند تیپ سؤال مهم در احتمال با مثال

	تیپ سؤال	مثال	جواب
۱	باید اعضای پیشامد را بنویسیم.	با ارقام ۱ تا ۵ یک عدد دورقمی بدون تکرار ارقام می‌نویسیم. با چه احتمالی مضرب ۳ است؟	$n(S)=\frac{۵}{د}\times\frac{۴}{ی}=۲۰$ $A=\{۱۲,۱۵,۲۱,۲۴,۴۲,۴۵,۵۱,۵۴\}\Rightarrow n(A)=۸$ $P(A)=\frac{۸}{۲۰}=۰/۴$
۲	مسائل مربوط به سکه و تاس	در پرتاب یک سکه و یک تاس، با چه احتمالی سکه رو و تاس مضرب ۳ می‌آید؟	$n(S)=\frac{۲}{سکه}\times\frac{۶}{تاس}=۱۲$ $n(A)=\frac{\overset{رو}{۱}}{سکه}\times\frac{\overset{۶,۳}{۲}}{تاس}=۲$ $P(A)=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$
۳	فرزندان خانواده	در یک خانوادهٔ ۵فرزندی، با چه احتمالی دقیقاً ۳ فرزند دختر داریم؟	$n(S)=۲^۵=۳۲$ $n(A)=\binom{۵}{۳}=۱۰$ $P(A)=\frac{۱۰}{۳۲}=\frac{۵}{۱۶}$
۴	مسائل مرتبط با اصل ضرب و جایگشت	با حروف کلمهٔ alish یک کلمهٔ ۵حرفی می‌نویسیم. (بدون تکرار حروف) با چه احتمالی حرف اول آن a است و حرف آخرش h نیست؟	$n(S)=۵!=۱۲۰$ $n(A)=\frac{\overset{a}{۱}}{اول}\times\frac{۳}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{}\times\frac{\overset{\ell,i,s}{۳}}{آخر}=۱۸$ $P(A)=\frac{۱۸}{۱۲۰}=\frac{۳}{۲۰}$
۵	مسائل مرتبط با انتخاب	در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز داریم. ۲ مهره از کیسه خارج می‌کنیم. با چه احتمالی هم‌رنگ‌اند؟	$n(s)=\binom{۹}{۲}=\frac{۹\times۸}{۲}=۳۶$ $n(A)=\binom{۴}{۲}\underset{\text{یا}}{+}\binom{۵}{۲}=۶+۱۰=۱۶$ $P(A)=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$

۶	مسائل مربوط به روزهای هفته	در یک گروه ۳ نفری با چه احتمالی هر سه نفر در روزهای متفاوتی از هفته به دنیا آمده‌اند؟	$n(S)=\frac{۷}{\text{اول}}\times\frac{۷}{\text{دوم}}\times\frac{۷}{\text{سوم}}$ $n(S)==\frac{۷}{\text{اول}}\times\frac{۶}{\text{دوم}}\times\frac{۵}{\text{سوم}}$ $P(A)=\frac{\cancel{۷}\times۶\times۵}{\cancel{۷}\times۷\times۷}=\frac{۳۰}{۴۹}$
۷	مسائل صفحهٔ عقربه‌دار با تقسیم‌بندی یکسان	عقربهٔ صفحهٔ مقابل را می‌چرخانیم. با چه احتمالی روی عددی اول می‌ایستد؟ 	احتمال $=\frac{\text{تعداد خانه‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل تقسیم‌بندی‌ها}}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$ (۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹)
۸	مسائل صفحهٔ عقربه‌دار با تقسیم‌بندی غیریکسان	عقربهٔ صفحهٔ مقابل را می‌چرخانیم. با چه احتمالی روی قسمت آبی یا سبز می‌ایستد؟ 	احتمال $=\frac{\text{مجموع زوایای سبز و آبی}}{۳۶۰^\circ}=\frac{۷۰+۵۰}{۳۶۰}=\frac{۱۲۰}{۳۶۰}=\frac{۱}{۳}$

۹ احتمال پیشامد متمم

کی ازش استفاده می‌کنیم؟	وقتی شمردن اعضای پیشامد A سخت است ولی شمردن اعضای پیشامد متممش یعنی A' ساده است.
فرمول احتمال متمم	$P(A)=۱-P(A')$
کلمات کلیدی سؤال‌ها	اگر در سؤالی از کلمات «حداقل»، «حداکثر» یا «فعل منفی» استفاده شده بود، حتماً یک بار در ذهنتان متمم پیشامد را بررسی کنید. اگر شمردن اعضای متمم راحت‌تر بود، از احتمال متمم سؤال را حل کنید.

۱۰ چند فرمول در احتمال

	توضیح پیشامد	نماد پیشامد	فرمول احتمال
۱	احتمال رخ‌ندادن A	A'	$P(A')=۱-P(A)$
۲	احتمال رخ‌دادن فقط A	$A-B$	$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$
۳	احتمال رخ‌دادن حداقل یکی از دو پیشامد A و B	$A\cup B$	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
۴	احتمال رخ‌دادن حداقل یکی از دو پیشامد A و B (وقتی A و B ناسازگارند.)	$A\cup B$	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{۰}$

۱۱ حفظیات آمار

۱	**آمار**	آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.
۲	**مراحل علم آمار**	جمع‌آوری اعداد و ارقام ← سازماندهی و نمایش ← تحلیل و تفسیر داده ← نتیجه‌گیری، تفاوت و پیش‌بینی
۳	**سرشماری**	مطالعه و بررسی کل اعضای جامعه
۴	**جمعیت یا جامعه**	مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد.
۵	**اندازه یا حجم جامعه**	تعداد اعضای جامعه
۶	**نمونه**	بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب می‌شود.
۷	**اندازه یا حجم نمونه**	تعداد اعضای نمونه
۸	**متغیر**	ویژگی‌ای از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.

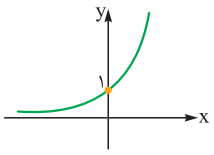
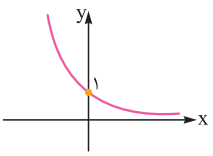
۱۲ انواع متغیر

		قابل اندازه‌گیری است و مقادیر گسسته می‌گیرد.	اگر مقادیر a و b را بگیرد، عدد حقیقی بینشان را هم می‌تواند بگیرد.	قابل مرتب‌کردن است.
کمی	گسسته	✓	×	✓
	پیوسته	✓	✓	✓
کیفی	اسمی	×	×	×
	ترتیبی	×	×	✓

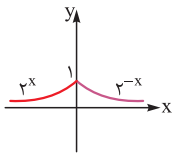
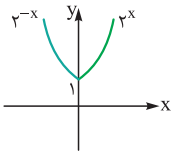
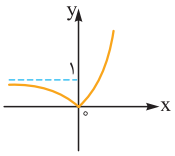
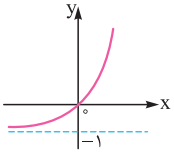
نمایی و لگاریتم

– تابع نمایی –

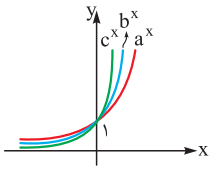
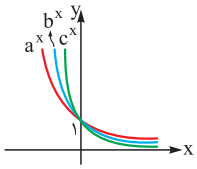
۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ با شرط $a>0$ و $a\neq 1$ تابع نمایی است و براساس مقدار a، دو حالت دارد:

	$a>1$	$0<a<1$
نمودار		
یکنوایی	صعودی اکید	نزولی اکید
دامنه	$\mathbb{R}$	
برد	$\mathbb{R}^+$	
ضابطهٔ وارون	$y=\log_a x$	
مجانب	$y=0$	
حد در بی‌نهایت	$a^{+\infty}\to +\infty$ $a^{-\infty}\to 0^+$	$a^{+\infty}\to 0^+$ $a^{-\infty}\to +\infty$

۲ نمودار چند تابع نمایی:

$y=2^{-\lvert x\rvert}$	$y=2^{\lvert x\rvert}$	$y=\lvert 2^x-1\rvert$	$y=2^x-1$
			

۳ مقایسهٔ توابع نمایی $y=a^x$ با تغییر a:

	
$c>b>a>1$	$1>a>b>c>0$

۴ دو نکته در مورد نمودار تابع نمایی:

۱	اگر نمودار توابع $y=a^x$ و $y=b^x$ نسبت به محور yها قرینه باشند، آن‌گاه: $ab=1$
۲	در تابع نمایی $y=a(b^{cx+d})+e$، خط $y=e$ مجانب افقی تابع است.

۵ اگر معادلهٔ نمایی، ساده حل نشد، باید «با تغییر متغیر» یا «با روش هندسی» آن را حل کنید.

۶ نامعادلهٔ نمایی:

$a > ۱$	$۰ < a < ۱$
با حذف پایه‌ها، جهت عوض نمی‌شود.	با حذف پایه‌ها، جهت عوض می‌شود.
$a^B > a^C \Rightarrow B > C$	$a^B > a^C \Rightarrow B < C$

۷ کاربرد توابع نمایی:

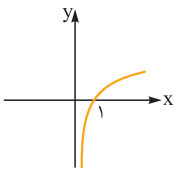
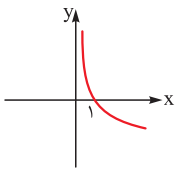
مسائل نیمه‌عمر	$(\frac{۱}{۲})^n \times$ جرم اولیه = جرم باقی‌مانده $n = \frac{\text{کل زمان}}{\text{طول یک نیمه‌عمر}}$: تعداد نیمه‌عمر
مسائل درصد افزایش یا کاهش متوالی	اگر به ماده‌ای به طور متوالی در هر مرحله، k درصد اضافه کنیم، آن‌گاه: $A_n = A_۰ (۱+\frac{k}{۱۰۰})^n$
	اگر از ماده‌ای به طور متوالی در هر مرحله، k درصد کم کنیم آن‌گاه: $A_n = A_۰ (۱-\frac{k}{۱۰۰})^n$

لگاریتم

۱ تبدیل نمایی به لگاریتم و بالعکس:

$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$

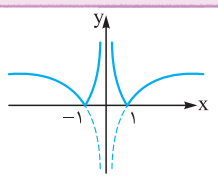
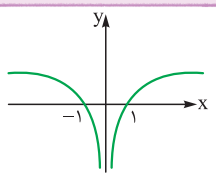
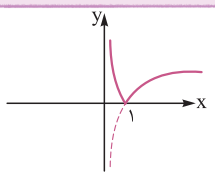
۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ با توجه به مقدار a، دو حالت دارد:

	$a > ۱$	$۰ < a < ۱$
نمودار		
یکنوایی	صعودی اکید	نزولی اکید
دامنه	$\mathbb{R}^+$	
برد	$\mathbb{R}$	
ضابطه وارون	$y = a^x$	
مجانب	$x = ۰$	

۳ دامنهٔ عبارت لگاریتمی، سه شرط دارد:

$\log_B A$ ، $A > ۰$ ، $B > ۰, B \neq ۱$

۴ نمودار چند تابع لگاریتمی:

$y = \|\log_۲ \|x\|\|$	$y = \log_۲ \|x\|$	$y = \|\log_۲ x\|$
		

۵ ویژگی‌های لگاریتم:

۱	$\log_a a = ۱$
۲	$\log_a ۱ = ۰$
۳	$\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a$
۴	$\log_c a + \log_c b = \log_c (ab)$
۵	$\log_c a - \log_c b = \log_c (\frac{a}{b})$
۶	$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
۷	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

۶ پنج‌تا نکته:

۱	رابطهٔ $\log ۲$ و $\log ۵$	$\log ۲ + \log ۵ = ۱$
۲	دو عدد وارون هم	$\log_b a$ و $\frac{۱}{\log_a b}$
۳	بیرون‌کشیدن توان زوج	$\log x^۲ = ۲\log\|x\|$
۴	بیرون‌کشیدن توان فرد	$\log x^۳ = ۳\log x$
۵	تقریب‌ها	$\log ۲ \simeq ۰/۳ , \log ۵ \simeq ۰/۷$

۷ در توابع $y = \log_d(ax+b)+c$ ، ریشهٔ عبارت جلوی لگاریتم (یعنی $x = \frac{-b}{a}$)، مجانب قائم (همان خط‌چین عمودی) تابع است.

۸ نامعادلهٔ لگاریتمی:

$a > ۱$	$۰ < a < ۱$
با حذف پایه‌ها، جهت عوض نمی‌شود.	با حذف پایه‌ها، جهت عوض می‌شود.
$\log_a B > \log_a C \Rightarrow B > C$	$\log_a B > \log_a C \Rightarrow B < C$

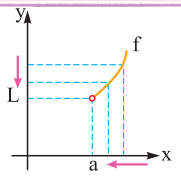
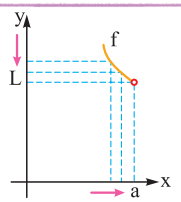
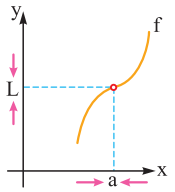
۹ کاربردهای لگاریتم:

مسئلهٔ زلزله	$\log E = ۱۱/۸ + \frac{۳}{۲}M$ E: انرژی آزادشده (برحسب ارگ) M: قدرت زلزله (برحسب ریشتر)
تعداد ارقام	تعداد ارقام عدد $A = [\log A] + ۱$

حد و پیوستگی

مقدمات حد

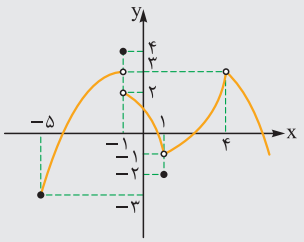
۱۰ تعریف حد:

نوع حد	نماد ریاضی	تعریف	روی نمودار
حد راست	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$	اگر x با مقادیر بیشتر از a (از سمت راست) به a نزدیک شود، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شوند. کاری با خود نقطهٔ a و سمت چپش نداریم.	
حد چپ	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$	اگر x با مقادیر کم‌تر از a (از سمت چپ) به a نزدیک شود، مقادیر تابع به L نزدیک می‌شوند. کاری با خود نقطهٔ a و سمت راستش نداریم.	
حد	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$	اگر حد راست و چپ در $x=a$ هر دو برابر با L باشند، در $x=a$ حد داریم. کاری با خود نقطهٔ a نداریم.	

۱۱ برای آن‌که تابع f در $x=a$ حد داشته باشد (و مقدار حدش L باشد)، باید هر دو شرط زیر را داشته باشد:

۱	در اطراف $x=a$ تعریف‌شده باشد. (هر دو طرف)
۲	حد راست و چپش در $x=a$ برابر L باشد.

مثال ۱ با توجه به نمودار زیر داریم:

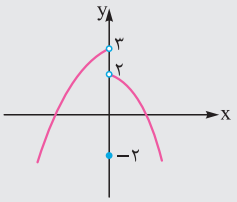


طول نقطه	حد راست	حد چپ	حد	مقدار
$x=-۵$	-۳	ندارد.	ندارد.	-۳
$x=-۱$	۲	۳	ندارد.	۴
$x=۱$	-۱	-۱	-۱	-۲
$x=۴$	۳	۳	۳	تعریف‌نشده

۱۲ چندتا میل‌کردن خاص!

اگر ...	آن‌گاه ...	
$x\to ۰$	$x^۲\to ۰^+$	$\lvert x\rvert\to ۰^+$
$x\to a$	$(x-a)^۲\to ۰^+$	$\lvert x-a\rvert\to ۰^+$
$\sin x\to ۱$	$۱-\sin x\to ۰^+$	
$\cos x\to ۱$	$۱-\cos x\to ۰^+$	

مثال ۲ اگر نمودار $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، آن‌گاه:



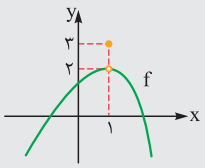
۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(\underbrace{1-\sin x}_{1^-}) \overset{\text{معادل با}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(\underbrace{-x^2}_{0^+}) \overset{\text{معادل با}}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3$

۱۳ حد توابع ساخته‌شده از روی f: فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد، در این صورت:

	تابع	حاصل حد
۱	$\lvert f\rvert$	$\lim\limits_{x\to a}\lvert f(x)\rvert=\lvert L\rvert$
۲	f^{-1}	$\lim\limits_{x\to L} f^{-1}(x)=a$
۳	$[f]$	حالت ۱: $L\notin\mathbb{Z} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)]=[L]$
		حالت ۲: $L\in\mathbb{Z}$ ، $x=a$ نقطهٔ min یا max باشد. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)]=\underbrace{L-1}_{\max}$ یا $\underbrace{L}_{\min}$
		حالت ۳: $L\in\mathbb{Z}$ ، $x=a$ نقطهٔ min یا max نباشد. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ موجود نیست.
۴	$f(g(x))$	مرحلهٔ ۱: حد تابع داخلی را وقتی $x\to a$ حساب می‌کنیم، مثلاً L می‌شود (مهم است که L^+ می‌شود یا L^-).
		مرحلهٔ ۲: حد تابع بیرونی را وقتی $x\to L^?$ می‌رود حساب می‌کنیم.

مثال ۳



$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f^{-1}(x)=1$

مثال ۴

حالت ۱: $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x}=\sqrt{5}\simeq 2/2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 5}[\sqrt{x}]=[\sqrt{5}]=2$

حالت ۲: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+3)=2 \xrightarrow[\text{نقطهٔ min است.}]{\text{برای سهمی، } x=1} \lim\limits_{x\to 1}[x^2-2x+3]=2$

حالت ۳: $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+3)=3 \xrightarrow[\text{نقطهٔ min یا max نیست.}]{\text{برای سهمی، } x=2}$ $\lim\limits_{x\to 2}[x^2-2x+3]$ موجود نیست

مثال ۵ اگر $f(x)=\sin x-1$ و $g(x)=[x]$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(f(x))$ چه‌قدر است؟

پاسخ

مرحلهٔ ۱: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1^- -1=0^-$

مرحلهٔ ۲: $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=[0^-]=-1$

۱۴ حد توابع زیر در هر نقطه از دامنه‌شان برابر با مقدار تابع در آن نقطه است.

چندجمله‌ای	گویا	$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\cot x$	$\log_a x$	a^x (نمایی)

۱۵ چه وقت‌هایی برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ، باید حد راست و چپ را چک کنیم؟

	نقاط مهم	مثال	بررسی حد وقتی $x \to ۱$
چندضابطه‌ای	مرز دامنه‌ها	$f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x>۱ \\ ۲x-۳ & x<۱ \end{cases}$	حد راست: $۱^۲+۲=۳$ حد چپ: $۲(۱)-۳=-۱$ $\Rightarrow$ حد ندارد.
قدرمطلق	ریشه‌های قدرمطلق (در حالت $\frac{۰}{۰}$)	$f(x)=\dfrac{x^۲+۲x-۳}{\lvert x-۱\rvert}$	حد راست: $\dfrac{\cancel{(x-۱)}(x+۳)}{\cancel{x-۱}}=۴$ حد چپ: $\dfrac{\cancel{(x-۱)}(x+۳)}{-\cancel{(x-۱)}}=-۴$ $\Rightarrow$ حد ندارد.
براکتی	نقاطی که به ازای آن‌ها داخل براکت، عدد صحیح شود.	$f(x)=[۲x]-[x]$	حد راست: $[۲^+]-[۱^+]=۲-۱=۱$ حد چپ: $[۲^-]-[۱^-]=۱-۰=۱$ $\Rightarrow$ حد $=۱$

۱۶ دوتا حد مهم:

	ضابطهٔ تابع	نکتهٔ مهم	مثال
۱	$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in\mathbb{Z} \\ h(x) & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$	حدش در تمام نقاط از ضابطهٔ مربوط به $x\notin\mathbb{Z}$ حساب می‌شود.	$f(x)=\begin{cases} ۲x & x\in\mathbb{Z} \\ x^۳ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۲^۳=۸$
۲	$f(x)=[g(x)]+[-g(x)]$	حدش در تمام نقاط برابر با -۱ است.	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۸}} ([\sin ۲x]+[-\sin ۲x])=-۱$

۱۷ فرق $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ و $[\lim\limits_{x\to a} f(x)]$: فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آن وقت:

۱	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$	مهم است که حاصل حد بالا L^+ شده یا L^-. هر کدام بود، از آن براکت می‌گیریم.
	مثال	$\lim\limits_{x\to ۰}[\cos x]=[۱^-]=۰$
۲	$[\lim\limits_{x\to a} f(x)]$	خود L مهم است (کاری نداریم L^+ است یا L^-). حاصل حد $[L]$ می‌شود.
	مثال	$[\lim\limits_{x\to ۰}\cos x]=[۱]=۱$

۱۸ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آن‌گاه:

تابع	$kf(x)$	f^n	$\sqrt{f}$	$\frac{1}{f}$	$\lvert f\rvert$
حد در $x=a$	$k.L$	L^n	$\sqrt{L},(L>0)$	$\frac{1}{L},(L\neq 0)$	$\lvert L\rvert$

۱۹ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ ، آن‌گاه:

تابع	$f\pm g$	$f\times g$	$\frac{f}{g}$
حد در $x=a$	$L_1\pm L_2$	$L_1\times L_2$	$\frac{L_1}{L_2},(L_2\neq 0)$

۲۰ بررسی حد داشتن یا نداشتن توابع $f \begin{smallmatrix}+\\-\\\times\\\div\end{smallmatrix} g$ در حالات مختلف (حد دارد: ✓ حد ندارد: ✗):

f	g	$f\pm g$	$f\times g$	$\frac{f}{g}$
✓	✓	✓	✓	✓ (به شرطی که حاصل حد مخرج مخالف صفر باشد.)
✓	✗	✗	نامعلوم*	نامعلوم*
✗	✓	✗	نامعلوم*	✗
✗	✗	نامعلوم		

تذکر در ۳ حالتِ «نامعلوم*»، اگر تابعی که حد دارد، حدش صفر باشد باید وضعیت تابع را بررسی کنیم، ولی اگر حدش صفر نباشد، قطعاً حد نداریم.

رفع ابهام «$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$»

۱ روش‌های حل حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وقتی $x\to a$:

روش حل	چه‌جوری حل می‌کنیم؟	مثال
به کمک تجزیه	باید در صورت و مخرج عامل $x-a$ را پیدا کنیم.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{4}{-1}=-4$
به کمک تقسیم	عبارتی که راحت تجزیه نمی‌شود را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\overbrace{x^3-x^2-4}^{\text{بر } x-2 \text{ تقسیم می‌کنیم.}}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{8}{4}=2$
به کمک اتحادهای مثلثاتی	از اتحادهای $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ و $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ استفاده می‌کنیم.	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overbrace{\cos^2 x}^{1-\sin^2 x}}{1-\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}{\cancel{1-\sin x}}=1+1=2$

۲ اگر $u \to 0$، می‌توانیم جای $(1+u)^n$ از $1+nu$ استفاده کنیم.

مثال

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^3-1}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(1+2x)^3-1}^{1+3(2x)}}{\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{2}}}_{1+\frac{1}{2}x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+6x-1}{1+\frac{x}{2}-1}=\frac{6x}{\frac{x}{2}}=12$$

پیوستگی

۱ انواع پیوستگی:

نوع پیوستگی	تعریف	نموداری
پیوستگی راست	مقدار = حد راست	
پیوستگی چپ	مقدار = حد چپ	
پیوستگی	مقدار = $\underbrace{\text{حد چپ} = \text{حد راست}}_{\text{حد}}$	

۲ پیداکردن مجهول در توابع پیوسته:

فرم تابع	برای پیوستگی f در $x=a$ چه می‌کنیم؟	شرط پیوستگی در نقطهٔ مرزی دامنه
$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq a \\ k & x=a \end{cases}$	حد چپ و راست را از g می‌گیریم؛ مقدارش هم k است.	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=k$
$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq a \\ h(x) & x<a \end{cases}$	حد راست و مقدارش را از g و حد چپ را از h می‌گیریم.	$g(a)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)$
$f(x)=\begin{cases} g(x) & x>a \\ k & x=a \\ h(x) & x<a \end{cases}$	حد راست را از g و حد چپ را از h می‌گیریم؛ مقدارش هم k است.	$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)=k$

۳ توابع پیوسته روی $\mathbb{R}$:

$\sin x$	$\cos x$	$\lvert x\rvert$	$\sqrt[\text{فرد}]{x}$

۴ توابع پیوسته روی دامنه:

تابع	فرم ضابطه	نقاط پیوستگی (دامنه)	مثال
کسری	$\frac{A}{u}$	$\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$	$\frac{x+1}{x^2-4} \xrightarrow{\text{نقاط پیوستگی}} \mathbb{R}-\{\pm 2\}$
لگاریتمی	$\log_b u$	$u>0$	$\log_2(x-3) \Rightarrow (3,+\infty)$
تانژانت	$\tan u$	$u\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$	$\tan\frac{\pi x}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x\neq 2k+1$
کتانژانت	$\cot u$	$u\neq k\pi$	$\cot\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}\neq k\pi \Rightarrow x\neq 2k\pi$
رادیکالی (با فرجهٔ زوج)	$\sqrt[\text{زوج}]{u}$	$u>0$	$\sqrt{x-4} \Rightarrow (4,+\infty)$

۵ نقاط ناپیوستگی توابع براکتی: $\{u \in \mathbb{Z}$ هایی که به ازای آن‌ها $x\} - \{u$ های نسبیِ $\min\}$ = نقاط ناپیوستگیِ $[u]$

مثال $(-۲,۲)$ در بازهٔ $[x^۲]$ نقاط ناپیوستگی $= \{۰,\pm۱,\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\} - \{۰\} = \{\pm۱,\pm\sqrt{۲},\pm\sqrt{۳}\}$

$x = ۰$ نقطهٔ min سهمی $y = x^۲$ است.

۶ پیوستگی روی بازه:

بازه	شرط پیوستگی	شکل
(a,b)	پیوستگی در تمام نقاط بین $x = a$ تا $x = b$	
$[a,b)$	۱) پیوستگی در بازهٔ (a,b) ۲) پیوستگی راست در $x = a$	
$(a,b]$	۱) پیوستگی در بازهٔ (a,b) ۲) پیوستگی چپ در $x = b$	
$[a,b]$	۱) پیوستگی در بازهٔ (a,b) ۲) پیوستگی راست در $x = a$ ۳) پیوستگی چپ در $x = b$	

۷ بررسی پیوستگی یا ناپیوستگی توابع $f \underset{\times}{\overset{+}{-}} g$ $\div$ در حالات مختلف (پیوسته: ✓ ناپیوسته: ✗):

f	g	$f \pm g$	$f \times g$	$\frac{f}{g}$
✓	✓	✓	✓	✓ (به شرطی که حاصل حد مخرج مخالف صفر باشد.)
✓	✗	✗	نامعلوم*	نامعلوم*
✗	✓	✗	نامعلوم*	✗
✗	✗	نامعلوم		

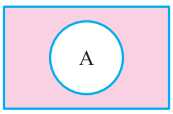
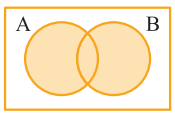
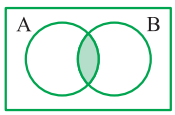
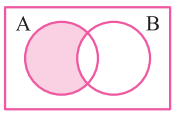
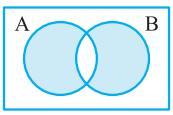
تذکر در ۳ حالت «نامعلوم*»، اگر تابعی که حد دارد، حدش صفر باشد باید وضعیت تابع را بررسی کنیم، ولی اگر حدش صفر نباشد، قطعاً پیوستگی نداریم.

احتمال

۱ چند تعریف (یادآوری):

اصطلاح	تعریف	
پدیدهٔ تصادفی	پدیده یا آزمایشی که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش‌بینی کرد.	
فضای نمونه‌ای	مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی	با S نشان می‌دهیم.
پیشامد تصادفی	هر زیرمجموعه از S، یک پیشامد است.	تعداد کل پیشامدها $= ۲^{n(S)}$

۲ اعمال روی پیشامدها (یادآوری):

نماد ریاضی	توضیح	نمودار ون
A'	A رخ ندهد.	
$A \cup B$	A یا B رخ دهد. (حداقل یکی)	
$A \cap B$	A و B رخ دهند. (هر دو)	
$A - B$	A رخ دهد، ولی B رخ ندهد (فقط A رخ دهد).	
$(A-B)\cup(B-A)$ $(A\cup B)-(A\cap B)$	دقیقاً یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.	

۳ چند قانون در مجموعه‌ها:

قانون	رابطهٔ ریاضی
تبدیل تفاضل به اشتراک	$A - B = A \cap B'$
بی‌اسم!	$A - B = A - (A \cap B)$
دمورگان	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
جذب	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (A \cup B) = A$

۴ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد:

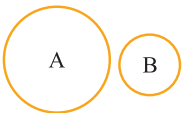
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکن}}$$

۵ مجموع اعداد ۲ تاس می‌تواند عددی از ۲ (هر ۲ تاس ۱ باشند) تا ۱۲ (هر ۲ تاس ۶ باشند) باشد.

جدول زیر تعداد اعضای پیشامد مجموع اعداد ۲ تاس را نشان می‌دهد:

مجموع اعداد دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد اعضای پیشامد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
قاعده برای حفظ کردن	قاعدهٔ $n-1$: یعنی اعداد سطر بالا را باید منهای ۱ کنیم تا اعداد سطر پایین به دست آید.					از هر ۲ قاعدهٔ $n-1$ و $13-n$ جواب می‌دهد.	قاعدهٔ $13-n$: یعنی ۱۳ را منهای اعداد بالا می‌کنیم تا اعداد پایینی به دست آید.				

۶ «دو پیشامد ناسازگار» و «دو پیشامد مستقل»:

	تعریف	رابطهٔ ریاضی	نمودار ون
ناسازگار	دو پیشامد که عضو مشترکی ندارند.	$A\cap B=\varnothing$ یا $P(A\cap B)=0$	
مستقل	وقوع هر کدام بر احتمال وقوع دیگری تأثیر ندارد.	$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$	

۷ اگر A و B مستقل باشند، «A و B'»، «A' و B» و «A' و B'» هم مستقل‌اند.

۸ چند رابطه در احتمال:

	توضیح پیشامد	نماد پیشامد	فرمول احتمال
۱	احتمال رخ‌ندادن A	A'	$P(A')=1-P(A)$
۲	احتمال رخ‌دادن فقط A	$A-B$	$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$
۳	احتمال رخ‌دادن حداقل یکی از دو پیشامد A و B	$A\cup B$	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
۴	احتمال رخ‌دادن حداقل یکی از دو پیشامد A و B (وقتی ناسازگارند.)		$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
۵	احتمال رخ‌دادن حداقل یکی از دو پیشامد A و B (وقتی مستقل‌اند.)		$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

۹ برای حل سؤالات احتمال شرطی یکی از دوتا کار زیر را انجام می‌دهیم:

بدون استفاده از فرمول	در صورت امکان با اعمال‌کردن شرط، فضای نمونهٔ جدید را می‌نویسیم. بعد در بین اعضای فضای نمونهٔ جدید، عضوهای مطلبومان را می‌شماریم: $\text{احتمال شرطی}=\dfrac{\text{تعداد عضوهای مطلوب از بین اعضای فضای نمونهٔ جدید}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونهٔ جدید}}$
استفاده از فرمول	احتمال رخ‌دادن پیشامد A به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد، برابر است با $\underbrace{P(A\mid B)}_{\text{احتمال A به‌شرط B}}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

آمار

۱ **آمار توصیفی** به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب معیارهای گرایش به مرکز (میانگین و میانه) و معیارهای پراکندگی (دامنهٔ تغییرات، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات) می‌پردازد.

۲ معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی: اگر تعداد داده‌ها برابر n باشد، آنگاه داریم:

	اسم معیار	نماد	فرمول به فارسی	فرمول به ریاضی
معیارهای گرایش به مرکز	میانگین	$\bar{x}$	$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}$	$\bar{x} = \frac{S}{n}$
	میانه	Q_2	تعداد داده‌ها فرد باشد. ← داده وسطی تعداد داده‌ها زوج باشد. ← میانگین دو داده وسطی	داده $\frac{n+1}{2}$ اُم میانگین داده $\frac{n}{2}$ اُم و $(\frac{n}{2}+1)$ اُم
معیارهای پراکندگی	دامنهٔ تغییرات	R	اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده	$R = \max - \min$
	واریانس	σ^2	$\text{واریانس} = \frac{\text{مجموع مربعات اختلاف داده‌ها از میانگین}}{\text{تعداد}}$	$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$
	انحراف معیار	σ	$\text{انحراف معیار} = \sqrt{\text{واریانس}}$	$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$
	ضریب تغییرات	CV	$\text{ضریب تغییرات} = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

۳ اگر تعدادی داده که میانگینشان با میانگین داده‌های اولیه برابر است به داده‌هایمان اضافه کنیم (یا از بین آن‌ها حذف کنیم)، میانگین داده‌های جدید تغییری نمی‌کند.

۴ اگر میانگین n_1 داده آماری $\bar{x}_1$، میانگین n_2 داده آماری $\bar{x}_2$ ... میانگین n_m داده آماری $\bar{x}_m$ باشد، میانگین کل آن‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \cdots + n_m\bar{x}_m}{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}$$

۵ همواره مجموع اختلاف (انحراف) داده‌ها از میانگین، صفر است: $(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})=0$

۶ دادهٔ دورافتاده: داده‌ای که نسبت به سایر داده‌ها خیلی کوچک یا خیلی بزرگ باشد.

اگر دادهٔ **دورافتاده** داشته باشیم، بهتر است از **میانه** استفاده کنیم.

۷ فرمول دوم واریانس: (مربع میانگین) − (میانگین مربعات) = واریانس یا $\sigma^2 = \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$

۸ اگر یکی از معیارهای پراکندگی (R یا σ^2 یا σ یا CV) صفر شود، یعنی تمام داده‌ها برابر بوده‌اند.

۹ اثر تغییر داده‌ها روی معیارهای مرکزی و پراکندگی (همه داده‌ها را در a ضرب و سپس با b جمع کنیم.):

شاخص	برای داده‌های $ax_i + b$
میانگین	$a\bar{x} + b$
میانه	$aQ_2 + b$
دامنهٔ تغییرات	$\lvert a \rvert . R$
واریانس	$a^2 . \sigma^2$
انحراف معیار	$\lvert a \rvert . \sigma$
ضریب تغییرات	$\frac{\lvert a \rvert . \sigma}{a\bar{x} + b}$

۱۰ مقایسه دقت ۲ گروه: دقتِ B < دقتِ A $\xrightarrow{\text{برمی‌گرده}}$ پراکندگیِ B > پراکندگیِ A $\Rightarrow CV_A > CV_B$