آزمون حضوری
شماره دو

رشته تجربی

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

ویژه کنکور
۱۴۰۳

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضی	**زوج‌درس دهم**: فصل سوم + فصل چهارم + فصل پنجم صفحه ۵۹ تا ۱۱۷ **زوج‌درس یازدهم**: فصل سوم + فصل چهارم صفحه ۴۷ تا ۹۴	۲	۲۲	علی شهرابی	محسن فراهانی

توان‌های گویا

۱ اگر $a^n = b$ و n عددی طبیعی باشد، می‌گوییم a ریشهٔ nام b است. چند مثال:

ریشهٔ سوم ۸	$\sqrt[3]{8} = 2$
ریشه‌های دوم ۲۵	$\pm\sqrt{25} = \pm 5$
ریشه‌های چهارم ۳	$\pm\sqrt[4]{3}$
ریشهٔ پنجم ۱−	$\sqrt[5]{-1} = -1$

۲ ریشهٔ nام عدد a در دو حالت $a \geq 0$ و $a < 0$:

علامت a	ریشهٔ nام (فرد)	ریشهٔ nام (زوج)
$a \geq 0$	$\sqrt[n]{a}$	$\pm\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	$\sqrt[n]{a}$	ندارد

۳ حاصل $\sqrt[n]{a^n}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$$

۴ قواعد رادیکال‌ها:

		توضیح	مثال
۱	جمع و تفریق رادیکال‌ها	باید «عبارت زیر رادیکال‌ها» و «فرجه‌هایشان» برابر باشد.	$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
۲	ضرب و تقسیم رادیکال‌ها	باید «فرجه‌ها» برابر باشد.	$\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{6}$
۳	عدد بیرون‌کشیدن	$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a\sqrt[n]{b} & \text{فرد } n \\ \lvert a \rvert \sqrt[n]{b} & \text{زوج } n, b > 0 \end{cases}$	$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 3^3} = 3\sqrt[3]{2}$
۴	رادیکال تو رادیکال	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[(m \times n)]{a}$	$\sqrt{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[8]{32} = \sqrt[8]{2^5} = 2^{\frac{5}{8}}$
۵	ساده‌کردن توان و فرجه	$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ (اگر k زوج بود، a قدرمطلق می‌گیرد.)	$\sqrt[18]{5^{12}} = \sqrt[3 \times 6]{5^{2 \times 6}} = \sqrt[3]{5^2}$

۵ **توان گویا:** اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

m → توان
n → فرجه

۶ قواعد توان:

ضرب با پایه‌های مساوی	ضرب با توان‌های مساوی	تقسیم با پایه‌های مساوی	تقسیم با توان‌های مساوی	توان منفی	توان به توان
$a^n . a^m = a^{n+m}$	$a^n . b^n = (ab)^n$	$a^n \div a^m = a^{n-m}$	$a^n \div b^n = (\frac{a}{b})^n$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(a^n)^m = a^{(n \times m)}$

عبارت‌های جبری

۱ **اتحاد**: هر تساوی جبری که به ازای تمام مقادیر متغیرها برقرار باشد. مثلاً $x(x+2)=x^2+2x$ یک اتحاد است.

۲ اتحادهای معروف:

	اسم اتحاد	فرم کلی اتحاد	مثال
۱	مربع دوجمله‌ای	$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$	$(2x+5)^2=4x^2+20x+25$
۲	مربع سه‌جمله‌ای	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$	$(x-2y+3z)^2=x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz$
۳	مزدوج	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(5x-3)(5x+3)=25x^2-9$
۴	جمله‌مشترک	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$	$(3x+2)(3x+5)=9x^2+21x+10$
۵	مکعب	$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$	$(2x-5)^3=8x^3-60x^2+150x-125$
۶	چاق و لاغر	$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$	$(3x+2)(9x^2-6x+4)=27x^3+8$

۳ دو فرم پراستفاده از اتحاد مربع و مکعب:

	فرم اتحادی	شبیه‌سازی با S و P
۱	$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$	$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$
۲	$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$	$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

۴ برای سؤالاتی که «$a+b$ و ab» را می‌دهند و a^2+b^2 یا a^3+b^3 را می‌خواهند (یا سؤالاتی که $x+\frac{1}{x}$ را می‌دهند و $x^2+\frac{1}{x^2}$ یا $x^3+\frac{1}{x^3}$ را می‌خواهند) از دو اتحاد بالا استفاده کنید.

۵ ساده‌کردن رادیکال‌های به فرم $\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}$

اگر رادیکال به شکل $\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}$ دیدید، باید زیر رادیکال یعنی $A\pm 2\sqrt{B}$ را به شکل $(\sqrt{C}\pm\sqrt{D})^2$ بنویسید:

$$(\sqrt{C}\pm\sqrt{D})^2=A\pm 2\sqrt{B}\Rightarrow C+D\pm 2\sqrt{CD}=A\pm 2\sqrt{B}\Rightarrow\begin{cases}A=C+D\\B=C\times D\end{cases}$$

یعنی باید دنبال دوتا عدد باشیم که جمعشان A و ضربشان B باشد. مثلاً برای ساده‌کردن $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$، باید دوتا عدد پیدا کنیم که جمعشان ۵ و ضربشان ۶ باشد. این دوتا عدد ۲ و ۳ هستند، پس جای $5+2\sqrt{6}$ می‌نویسیم $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ و داریم:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

۶ **تجزیه**: نوشتن یک عبارت جبری به صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عبارت جبری دیگر

۷ روش‌های معروف تجزیه:

اسم روش	توضیح	مثال
فاکتورگیری	از بزرگ‌ترین عامل مشترک بین جملات فاکتور می‌گیریم.	$12x^5-18x^4=6x^4(2x-3)$
استفاده از اتحادها	● در تجزیهٔ a^n-b^n، اگر n زوج باشد، از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم. ● در تجزیهٔ $a^n\pm b^n$، اگر n مضرب ۳ باشد، از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم. ● در سه‌جمله‌ای‌ها دنبال اتحاد جمله‌مشترک (یا مربع) باشید.	$x^6-7x^3-8 \xlongequal{\text{جمله‌مشترک}} (x^3-8)(x^3+1)$ $\xlongequal{\text{چاق و لاغر}} (x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)$
دسته‌بندی	چند جمله را با هم می‌گیریم و چند جملهٔ دیگر را نیز با هم، بعد با تجزیهٔ هر دسته به عبارتی می‌رسیم که به کمک اتحادها یا فاکتورگیری تجزیهٔ نهایی می‌شود.	$x^3+3x^2-4x-12=x^2(x+3)-4(x+3)$ $\xrightarrow[x+3]{\text{فاکتور از}} (x+3)\underbrace{(x^2-4)}_{\text{مزدوج}}=(x+3)(x-2)(x+2)$
شکستن جملات	برای تجزیهٔ عبارت‌های به فرم x^4+bx^2+c که در نگاه اول قابل تجزیه نیستند مناسب است. باید bx^2 را به شکل dx^2+ex^2 بنویسید که dx^2 با دو جملهٔ دیگر تشکیل اتحاد مربع بدهد و بعد از آن از اتحاد مزدوج استفاده کنید.	$x^4+5x^2+9 \xrightarrow[6x^2-x^2]{\text{جای } 5x^2 \text{ می‌نویسیم}} x^4+6x^2+9-x^2$ $=(x^2+3)^2-x^2=(x^2+3+x)(x^2+3-x)$

۸ گویاکردن مخرج کسرها:

فرم کسر	روش گویاکردن مخرج	مثال
$\frac{\bigcirc}{\sqrt{a}}$	صورت و مخرج را در $\sqrt{a}$ ضرب می‌کنیم.	$\frac{6}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$
$\frac{\bigcirc}{\sqrt[m]{a^n}}$	صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{a^k}$ ضرب می‌کنیم (k کوچک‌ترین عددی است که به ازای آن $n+k$ مضرب m است).	$\frac{12}{\sqrt[3]{2^4}}\times\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{12\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^6}}=\frac{12\sqrt[3]{4}}{4}=3\sqrt[3]{4}$
$\frac{\bigcirc}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ یا $\frac{\bigcirc}{\sqrt{a}\pm b}$	صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.	$\frac{6}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}=\frac{6(\sqrt{7}+2)}{7-4}=2(\sqrt{7}+2)$
$\frac{\bigcirc}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$ یا $\frac{\bigcirc}{\sqrt[3]{a}\pm b}$	صورت و مخرج را در چاق مخرج ضرب می‌کنیم.	$\frac{3}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{3(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{5}$
$\frac{\bigcirc}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$	صورت و مخرج را در لاغر مخرج ضرب می‌کنیم.	$\frac{10}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}\times\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{10(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{5}=2(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$

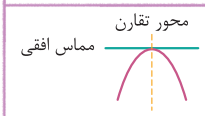
معادلهٔ درجه‌دو و روش‌های مختلف حل آن

تعداد جواب معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۲	دو ریشهٔ مثبت	$\Delta>0, S>0, P>0$
۱	حالت ۱: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P<0$
	حالت۲: یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta=0, \frac{-b}{a}>0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta>0, S<0, P>0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta=0, \frac{-b}{a}<0$
	حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta<0$

۱ برای حل معادلهٔ درجه‌سوم، اول یک ریشه را از بین اعداد ۱± و ۲± حدس می‌زنیم (مثلاً $x=a$ شد). بعد عبارت درجه‌سوم را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم و معادلهٔ درجه‌سوم اولیهٔ را به شکل $(x-a)(\text{درجه۲})=0$ درمی‌آوریم که حلش را بلدیم.

تابع درجه دو (سهمی)

۱ با توجه به علامت a، سهمی دوتا شکل می‌تواند داشته باشد:

	قیافه	طول رأس	عرض رأس	محور تقارن	مماس افقی	مقدار min یا max	بُرد
$a>0$		$\frac{-b}{2a}$	$\frac{-\Delta}{4a}$ یا $f(\frac{-b}{2a})$	$x=\frac{-b}{2a}$	$y=\frac{-\Delta}{4a}$	$\min=\frac{-\Delta}{4a}$	$[\frac{-\Delta}{4a},+\infty)$
$a<0$						$\max=\frac{-\Delta}{4a}$	$(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$

۲ تنها نقطه‌ای از سهمی که با حذف آن، برد تغییر می‌کند، رأس سهمی است.

۳ اگر دو نقطه با yهای یکسان روی سهمی داشته باشیم، میانگین xهایشان، x رأس را می‌دهد.

از جملهٔ بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم میانگین ریشه‌های سهمی، x رأس است.

۴ اگر $ax+by=c$ باشد $(a,b>0)$، زمانی xy ماکزیمم است که ax و by هر دو برابر با $\frac{c}{2}$ باشند.

مثلاً اگر $3x+2y=12$ باشد و ماکزیمم xy را بخواهیم، باید $3x=6$ و $2y=6$ باشد (که $x=2$ و $y=3$ و در نتیجه $xy=6$ را نتیجه می‌دهد).

۵ منظور از صفرهای تابع $f(x)$، «طول نقاط برخورد تابع f با محور xها» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$» است.

۶ نوشتن سریع معادلهٔ سهمی:

	چیزهایی که داریم.	ضابطهٔ سهمی	نکتهٔ تکمیلی
۱	x_1 و x_2 صفرهای سهمی‌اند.	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲	نقطهٔ (x_S,y_S) رأس سهمی است.	$y=a(x-x_S)^2+y_S$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳	سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله ـ سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.	اگر نقطه‌ای به مختصات $(0,c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.

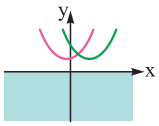
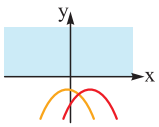
۷ اگر سهمی در نقطهٔ $(\alpha,0)$ بر محور xها مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید: $y=a(x-\alpha)^2$

۸ علامت ضرایب a، b و c

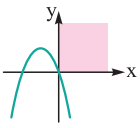
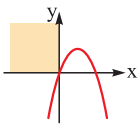
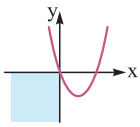
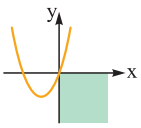
علامت a	علامت b	علامت c
با دهانهٔ سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور yها	عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها

۹ سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات:

حالت ۱: سهمی فقط از ۲ ناحیه عبور کند.

		شکل	شرایط	
			a	Δ
۱	سهمی فقط از ناحیهٔ ۱ و ۲ عبور کند.		+	−
۲	سهمی فقط از ناحیهٔ ۳ و ۴ عبور کند.		−	−

حالت ۲: سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند).

		شکل	شرایط			
			a	b	c	Δ
۱	فقط از ناحیهٔ ۱ نگذرد.		−	−	−	+
۲	فقط از ناحیه ۲ نگذرد.		−	+	−	+
۳	فقط از ناحیهٔ ۳ نگذرد.		+	−	+	+
۴	فقط از ناحیهٔ ۴ نگذرد.		+	+	+	+

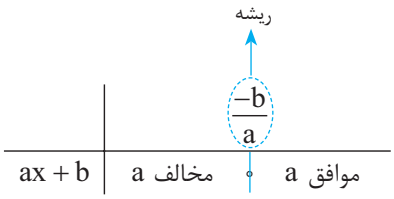
c می‌تواند صفر هم باشد.

حالت ۳: سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند. $\xleftarrow{\text{فقط کافیه که}}$ $P<0$

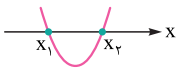
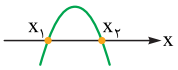
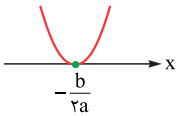
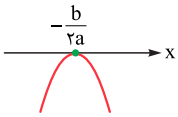
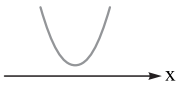
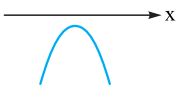
۱۰ شرط آن‌که سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند، آن است که سهمی دو ریشهٔ هم‌علامت داشته باشد.

تعیین علامت

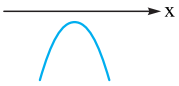
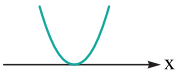
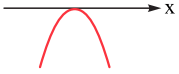
۱ تعیین علامت عبارت درجه‌یک



۲ تعیین علامت عبارت درجه‌دو

علامت دلتا	جدول تعیین علامت	وضعیت نموداری	
		$a>0$	$a<0$
$\Delta>0$	x_1 x_2 ax^2+bx+c: a موافق ، a مخالف ، a موافق		
$\Delta=0$	$x_1=\frac{-b}{2a}$ ax^2+bx+c: a موافق ، a موافق		
$\Delta<0$	ax^2+bx+c: a موافق		

۳ چهار حالت خاص و پرتکرار

	سؤال	شروط	وضعیت نموداری
۱	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره مثبت باشد.	۱) $a>0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xها باشد.	۲) $\Delta<0$	
۲	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره منفی باشد.	۱) $a<0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها باشد.	۲) $\Delta<0$	
۳	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره نامنفی باشد.	۱) $a>0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ زیر محور xها نباشد.	۲) $\Delta\le 0$	
۴	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره نامثبت باشد.	۱) $a<0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ بالای محور xها نباشد.	۲) $\Delta\le 0$	

۴ جواب نامعادلهٔ درجه‌دوم (در حالت $\Delta > 0$)

علامت a	فرم نامعادله	جواب	توضیح فارسی	مثال با جواب
$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\mathbb{R} - [x_1, x_2]$	نابین ریشه‌ها	$x^2 - 2x - 15 > 0 \Rightarrow x > 5$ یا $x < -3$
	$ax^2 + bx + c < 0$	(x_1, x_2)	بین ریشه‌ها	$x^2 - 2x - 15 < 0 \Rightarrow -3 < x < 5$
$a < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$[x_1, x_2]$	بین ریشه‌ها	$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$
	$ax^2 + bx + c < 0$	$\mathbb{R} - (x_1, x_2)$	نابین ریشه‌ها	$2x - x^2 \leq 0 \Rightarrow x \geq 2$ یا $x \leq 0$

۵ جواب‌های نامعادله‌های درجه‌یک و درجه‌دو به فرم‌های زیر می‌تواند باشد:

	فرم نامعادله	مدل‌های ممکن برای جواب
نامعادلهٔ درجه‌یک	$ax + b > 0$ یا $ax + b < 0$	$(\frac{-b}{a}, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{-b}{a})$
	$ax + b \geq 0$ یا $ax + b \leq 0$	$[\frac{-b}{a}, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{-b}{a}]$
نامعادلهٔ درجه‌دو	$ax^2 + bx + c > 0$ یا $ax^2 + bx + c < 0$	$\underbrace{(x_1, x_2)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R}}_{\Delta<0}$ یا $\underbrace{\varnothing}_{\Delta\leq 0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R} - \{x_1\}}_{\Delta=0}$
	$ax^2 + bx + c \geq 0$ یا $ax^2 + bx + c \leq 0$	$\underbrace{[x_1, x_2]}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R}}_{\Delta\leq 0}$ یا $\underbrace{\varnothing}_{\Delta<0}$ یا $\underbrace{\{x_1\}}_{\Delta=0}$

پس اگر جواب نامعادلهٔ $ax^2 + bx + c > 0$ یا $ax^2 + bx + c < 0$ به صورت $(-\infty, k)$ یا به صورت $(k, +\infty)$ شد، عبارت $ax^2 + bx + c$ باید درجه‌یک باشد؛ یعنی ضریب x^2 صفر است $(a = 0)$.

۶ مراحل تعیین علامت سریع با یک مثال

فرض کنید می‌خواهیم عبارت $P(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 4)}{x^3 - 9x}$ را تعیین علامت کنیم.

مرحلهٔ ۱	تمام عبارات را تجزیه می‌کنیم.	$P(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)^2}{x(x-3)(x+3)}$
مرحلهٔ ۲	ریشه‌ها و زوج و فردبودن توانشان را معلوم می‌کنیم.	$P(x) = \frac{(x\overset{1}{-}1)(x\overset{-1}{+}1)(x\overset{-2}{+}2)^2}{x(x\underset{3}{-}3)(x\underset{-3}{+}3)}$ (زوج)
مرحلهٔ ۳	جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم.	

	-3	-2	-1	0	1	3
$P(x)$	ت ن	۰	۰	ت ن	۰	ت ن

مرحلهٔ ۴	از خانهٔ سمت راست جدول شروع می‌کنیم. علامت P به ازای $x=۴$ را پیدا می‌کنیم.	$P(x)=\dfrac{\overbrace{(x-۱)}^{+}\overbrace{(x+۱)}^{+}\overbrace{(x+۲)^{۲}}^{+}}{\underbrace{x}_{+}\underbrace{(x-۳)}_{+}\underbrace{(x+۳)}_{+}} \Rightarrow P(۴)>۰$
مرحلهٔ ۵	پس خانهٔ سمت راست، + است. از آن‌جا به سمت چپ حرکت می‌کنیم و یکی‌درمیان علامت‌ها را عوض می‌کنیم. فقط وقتی از $\underbrace{x=-۲}_{\text{(توان زوج)}}$ رد می‌شویم، علامت عوض نمی‌شود.	$\begin{array}{c\|ccccccccccccc} & & -۳ & & -۲ & & -۱ & & ۰ & & ۱ & & ۳ & \\ \hline P(x) & \ominus & \text{ت ن} & \oplus & \circ & \oplus & \circ & \ominus & \text{ت ن} & \oplus & \circ & \ominus & \text{ت ن} & + \end{array}$ عوض نشد!

۷ نامعادلات سادهٔ قدرمطلقی

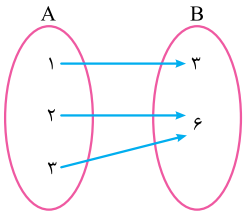
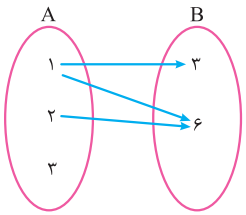
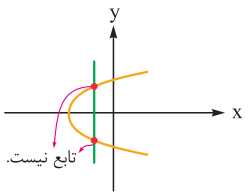
	$a>۰$	$a=۰$	$a<۰$
$\|u\|\geq a$	$u\geq a$ یا $u\leq -a$	$u\in\mathbb{R}$	$u\in\mathbb{R}$
$\|u\|\leq a$	$-a\leq u\leq a$	$u=۰$	$\varnothing$
$\|u\|>a$	$u>a$ یا $u<-a$	$\mathbb{R}-\{u=۰\}$	$u\in\mathbb{R}$
$\|u\|<a$	$-a<u<a$	$\varnothing$	$\varnothing$

تابع

مقدمات (تعریف تابع، دامنه و برد)

۱ تابع دستگاهی است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد.

۲ **روش‌های نمایش تابع:**

	روش نمایش	شرط تابع‌بودن	مثال
۱	پیکانی (نمودار وِن)	از هر عضو مجموعهٔ مبدأ، باید دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.	 تابع است.  تابع نیست.
۲	زوج مرتبی	مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها نباید برابر باشد. اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد.	$\{(۱,۲),(۲,۳),(-۱,۳)\} \rightarrow$ تابع است. $\{(۱,۲),(۳,۵),(۱,۶)\} \rightarrow$ تابع نیست.
۳	جدولی	مؤلفه‌های سطر مربوط به xها نباید یکسان باشد. اگر مؤلفه‌های x یکسان داشتیم، مؤلفه‌های y شان هم باید یکسان باشد.	x: ۲ ۳ ۵ ۳ y: −۱ ۷ ۴ ۲ تابع نیست.
۴	نموداری	اگر خطی موازی محور yها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار مربوط به یک تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، تابع است.	
۵	توصیفی	با توجه به جملهٔ توصیفی، اگر به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی داشته باشیم، آن رابطه تابع است.	رابطه‌ای که به هر فرد، کد ملی‌اش را نسبت می‌دهد. { ورودی: انسان‌ها، خروجی: کد ملی } چون هر شخص نمی‌تواند بیش از یک کد ملی داشته باشد، پس تابع است.
۶	ضابطه‌ای	اگر به ازای هر x، فقط یک خروجی داشته باشیم، تابع است. روابطی که در آن‌ها y تنها می‌شود، حتماً تابع هستند؛ مثل $\underset{\text{تنها}}{y} = \log_۲ x + \cos\frac{۱}{x}$	در رابطهٔ $y^۲ = x + ۱$، اگر $x = ۱$ را بدهیم، ۲تا خروجی می‌دهد: $y^۲ = ۲ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲} \rightarrow$ تابع نیست.

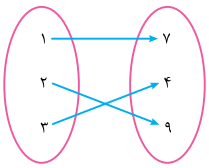
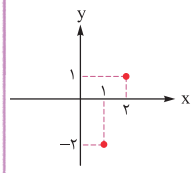
۳ سؤالات تابع‌نویسی: از ما می‌خواهد عبارتی (مثل محیط، مساحت و ...) را برحسب یک متغیر (مثل ضلع، شعاع و ...) بنویسیم.

مثال تابع مساحت مربع برحسب محیط آن؟

پاسخ می‌دانیم $P=۴a$ و $S=a^۲$ است. از $P=۴a$ نتیجه می‌گیریم $a=\frac{P}{۴}$. حالا این تساوی را در رابطهٔ مساحت قرار می‌دهیم:

$$S=a^۲ \xrightarrow{a=\frac{P}{۴}} S=(\frac{P}{۴})^۲ \Rightarrow S=\frac{P^۲}{۱۶} \xrightarrow{\text{به شکل تابع}} S(P)=\frac{P^۲}{۱۶}$$

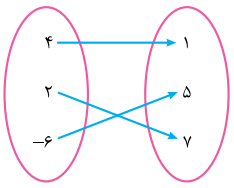
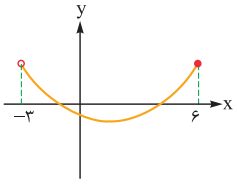
۴ مقدار تابع در یک نقطه:

روش نمایش تابع	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی	ضابطه‌ای
مثال		$f=\{(۱,۲),(۲,۶)\}$	x: ۱ ۲ ۳ y: −۳ ۶ ۲		f تابعی است که به هر عددی، مکعبش را نسبت می‌دهد.	$f(x)=\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۲x+۵}}$
مقدار تابع در $x=۲$	$f(۲)=۹$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۱$	$f(۲)=۲^۳=۸$	$f(۲)=\frac{۵}{۳}$

۵ نقاط برخورد مهم:

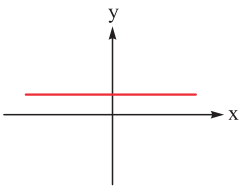
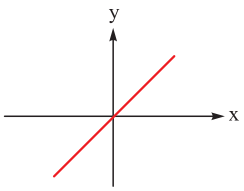
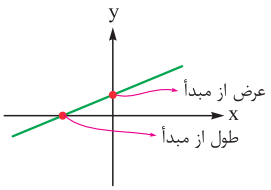
نقطهٔ برخورد تابع f با ...	راه حل	مختصات نقطه (نقاط)
محور xها	«y را صفر می‌دهیم» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$»	$(\ ,۰)$ ← جواب‌های $f(x)=۰$
محور yها	«x را صفر می‌دهیم» یا «مقدار $f(۰)$»	$(۰,f(۰))$
تابع g	حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ ← جواب‌ها ← $x_۱,\ldots$	$(x_۱,f(x_۱)),\ldots$
نیمساز ربع اول و سوم	حل معادلهٔ $f(x)=x$ ← جواب‌ها ← $x_۱,\ldots$	$(x_۱,x_۱),\ldots$

۶ محاسبهٔ دامنه در نمایش مختلف یک تابع (به‌جز نمایش ضابطه‌ای):

روش محاسبهٔ دامنه	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی
	همهٔ اعدادی که از آن‌ها فلش خارج شده	همهٔ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها	همهٔ اعداد سطر مربوط به x	تصویر نمودار روی محور xها	ورودی‌ها!
مثال		$f=\{(۵,۲),(۱,۳)\}$	x: ۱ −۴ ۶ y: ۶ ۵ ۹		تابعی که به هر عدد مربع کامل دورقمی، جذرش را نسبت می‌دهد.
دامنه	$D=\{۴,۲,-۶\}$	$D_f=\{۵,۱\}$	$D=\{۱,-۴,۶\}$	$D=(-۳,۶]$	دامنه $=\{۱۶,۲۵,\ldots,۸۱\}$

انواع تابع

۱ چند تابع خاص

تابع	ضابطه	نکته	نمودار	دامنه	برد
ثابت	$f(x) = c$ (عدد)	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج مرتب‌ها با هم برابر است. در نمایش ضابطه‌ای، ضرایب جملات شامل x باید صفر باشد.	یک خط افقی 	$\mathbb{R}$	C
همانی	$f(x) = x$	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. در نمایش ضابطه‌ای، ضریب x، یک و ضریب سایر جملات صفر است.	نیمساز ربع اول و سوم 	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
خطی	$f(x) = mx + h$	محل برخورد با محور yها $h \rightarrow$ (عرض از مبدأ) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (شیب)		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

انتقال نمودار توابع

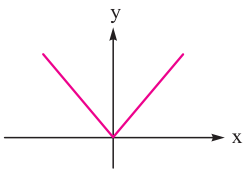
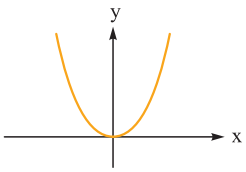
۱ انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض:

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.

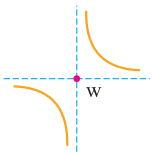
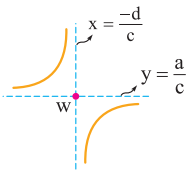
تابع قدرمطلق به صورت $f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ نمایش داده می‌شود.

به توابعی که به ازای محدوده‌های مختلفی از دامنه، معادله‌های متفاوتی داشته باشند (مثل تابع قدرمطلق)، تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای) می‌گوییم.

۲ چند تابع معروف با نمودارشان:

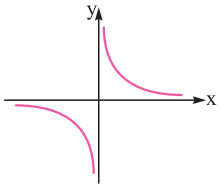
ضابطه	$y=\|x\|$	$y=x^2$
نمودار		
دامنه	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
برد	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$

۳ نکات مهم تابع هموگرافیک با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$:

شرط هموگرافیک‌بودن	$ad-bc\neq 0, c\neq 0$	
دامنه	$\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$	
برد	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$	
معادلهٔ خط‌چین عمودی	$x=\frac{-d}{c}$	
معادلهٔ خط‌چین افقی	$y=\frac{a}{c}$	
ضابطهٔ وارون	$\frac{-dx+b}{cx-a}$	
شرط برابری f و f^{-1}	$a+d=0$	
مرکز تقارن	$w=(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$	
محورهای تقارن	دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از نقطهٔ w	
شکل تابع	 $ad-bc<0$	 $ad-bc>0$

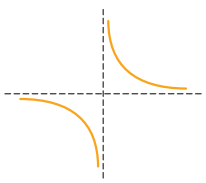
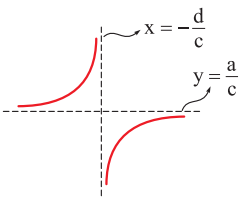
توابع گویا

۱ مطالب اولیهٔ تابع گویا:

ضابطه	دامنه	نمودار $y=\frac{1}{x}$
$f(x)=\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$	$\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$	

۲ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\text{چندجمله‌ای}}{ax^2+bx+c}$ به صورت $\mathbb{R}-\{k\}$ باشد، باید «$\Delta_{\text{مخرج}}=0$» و «$k=\frac{-b}{2a}$» باشد.

۳ نکات مهم تابع هموگرافیک با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$:

شرط هموگرافیک‌بودن	$ad-bc\neq 0$ و $c\neq 0$	
دامنه	$\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$	
برد	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$	
معادلهٔ خط‌چین عمودی	$x=\frac{-d}{c}$	
معادلهٔ خط‌چین افقی	$y=\frac{a}{c}$	
ضابطهٔ وارون	$\frac{-dx+b}{cx-a}$	
شرط برابری f و f^{-1}	$a+d=0$	
مرکز تقارن	$w=(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$	
محورهای تقارن	دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از w	
شکل تابع	 $ad-bc<0$	 $ad-bc>0$

تساوی تابع

۱) شروط تساوی دو تابع f و g:
- الف) $D_f = D_g$ (دامنه‌ها قبل از ساده‌کردن باید محاسبه شوند.)
- ب) ضابطه‌های دو تابع را بتوانیم با کارهای جبری و ... مثل هم کنیم.

۲) در تساوی توابع حواستان به موارد زیر باشد:

الف) دامنهٔ تابع به فرم $y=\sqrt{AB}$ از حل نامعادلهٔ $AB \geq 0$ و دامنهٔ تابع به فرم $y=\sqrt{A}\times\sqrt{B}$ از اشتراک جواب نامعادله‌های $A \geq 0$ و $B \geq 0$ به دست می‌آید.

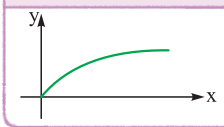
ب) توابع $y=A$ و $y=\frac{A\times B}{B}$ به شرطی با هم برابرند که B ریشه‌ای نداشته باشد. (B چندجمله‌ای است.)

پ) توابع $f(x)=\begin{cases}\frac{A\times B}{B} & B\neq 0\\ C & B=0\end{cases}$ و $g(x)=\cdots$ به شرطی برابرند که
- اولاً: $g(x)=A$
- ثانیاً: مقدار $g(x)$ به ازای ریشهٔ $B=0$، برابر با C شود.

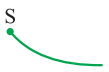
ت) $\log x^2 = 2\log|x|$ و $\log x^3 = 3\log x$

توابع رادیکالی

۱) مطالب اولیهٔ تابع رادیکالی:

دامنه	نمودار $y=\sqrt{x}$
≥ 0 زیر رادیکال	

۲) نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=a\sqrt{bx+c}+d$ به یکی از ۴ شکل زیر است:

	علامت a	علامت b	شکل نمودار	مختصات نقطهٔ شروع (S)
۱	+	+		$(\frac{-c}{b}, d)$ ریشهٔ داخل رادیکال، عدد بیرونی
۲	+	−		
۳	−	+		
۴	−	−		

جزء صحیح

۱ تابع پله‌ای:

تعریف	تابع چندضابطه‌ای که هر کدام از ضابطه‌هایش یک تابع ثابت است.
نمودار	از تعدادی پاره‌خط افقی تشکیل شده است.
مثال	$f(x)=\begin{cases} ۱ & -۱\le x<۱ \\ -۲ & ۱\le x<۴ \end{cases}$

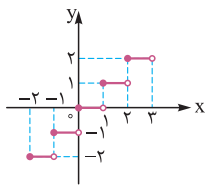
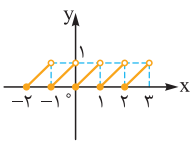
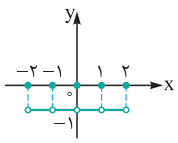
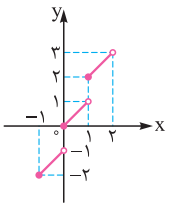
۲ تعریف جزء صحیح یا براکت:

تعریف

جزء صحیح هر عدد صحیح، خودش می‌شود: $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x]=x$

جزء صحیح هر عدد غیرصحیح، عدد صحیح ماقبل آن می‌شود: $k<x<k+۱ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} [x]=k$

۳ نمودارهای مهم توابع براکتی:

ضابطه	$y=[x]$	$y=x-[x]$	$y=[x]+[-x]$	$y=x+[x]$
نمودار				
برد	$\mathbb{Z}$	$[۰,۱)$	$\{-۱,۰\}$	$\ldots\cup[۰,۱)\cup[۲,۳)\cup\ldots$

۴ ویژگی‌های مهم براکت:

۱	$[u]\in\mathbb{Z}$
۲	$[u]=k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le u<k+۱$
۳	$۰\le u-[u]<۱$
۴	$[u]+[-u]=\begin{cases} ۰ & u\in\mathbb{Z} \\ -۱ & u\notin\mathbb{Z} \end{cases}$
۵	$k\in\mathbb{Z} \rightarrow [u\pm k]=[u]\pm k$

تابع یک‌به‌یک

۱ به تابعی که در خروجی‌هایش عدد تکراری نداریم، یک‌به‌یک می‌گوییم.

نمایش	شرط یک‌به‌یک بودن
زوج مرتبی	مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها باید متفاوت باشند.
جدولی	اعداد سطر دوم جدول باید متفاوت باشند.
پیکانی	به هیچ عددی نباید بیشتر از یک پیکان وارد شود.
نموداری	خطی موازی محور xها نباید نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.
ضابطه‌ای	$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

۲ توابع یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک معروف:

اسم تابع	یک‌به‌یک	غیر یک‌به‌یک	
چندجمله‌ای	خطی با شیب غیرصفر	ثابت	چندجمله‌ای درجه زوج
$\frac{ax+b}{cx+d}$	با شرط $ad-bc\neq 0$ (هموگرافیک می‌شه)	با شرط $ad-bc=0$ (ثابت می‌شه)	

تابع وارون

۱ نکات اولیهٔ تابع وارون:

۱	اگر نقطهٔ (a,b) روی f باشد، نقطهٔ (b,a) روی f^{-1} است و برعکس.
۲	$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$
۳	$R_{f^{-1}}=D_f$ و $D_{f^{-1}}=R_f$
۴	نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است.
۵	شرط وارون‌پذیری، یک‌به‌یک بودن است.

۲ برای محاسبهٔ $f^{-1}(k)$، بهترین راه این است که معادلهٔ $f(x)=k$ را حل کنیم. جواب این معادله، همان $f^{-1}(k)$ می‌شود. مثلاً اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد و ما $f^{-1}(12)$ را بخواهیم، معادلهٔ $x+\sqrt{x}=12$ را حل می‌کنیم که جوابش می‌شود ۹.

۳

ناحیه‌ای که نمودار f در آن است.	۱	۲	۳	۴
ناحیه‌ای که نمودار f^{-1} در آن قرار می‌گیرد.	۱	۴	۳	۲

۴ مراحل به دست آوردن ضابطهٔ وارون:
- ۱) x را برحسب y می‌نویسیم (باید x تنها شود).
- ۲) جای x و y را عوض می‌کنیم.

۵ ضابطهٔ وارون توابع مهم:

اسم تابع	ضابطه	ضابطهٔ وارون (یا طریقهٔ محاسبه)	نکات
خطی	$ax+b$	$\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$	توابع خطی $y=x$ و $y=-x+b$، با وارونشان برابرند.
هموگرافیک	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{-dx+b}{cx-a}$	$a+d=0 \Leftrightarrow f=f^{-1}$

حواستان باشد که دامنهٔ f^{-1}، برد f می‌شود و معمولاً بهترین راه برای محاسبهٔ $D_{f^{-1}}$ (یا همان R_f)، استفاده از نمودار f است.

۶ راه‌های به دست آوردن نقطه (یا نقاط) برخورد f و f^{-1}:

	روش	توضیح روش
۱	ضابطه‌ای	ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم و بعد معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم.
۲	نموداری	نمودار f را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار f^{-1} به دست آید. تعداد نقاط برخوردشان معلوم می‌شود.
۳	برخورد با نیمساز ربع اول و سوم	اگر f صعودی اکید باشد، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=x$، طول نقاط برخورد f و f^{-1} است.

اعمال جبری روی توابع

۱ چهار عمل اصلی روی توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

اسم عمل	نماد	تعریف ریاضی	دامنه
جمع دو تابع	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
تفریق دو تابع	$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_f \cap D_g$
ضرب دو تابع	fg	$(fg)(x)=f(x).g(x)$	$D_f \cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$

۲ اعمال جبری در نمایش زوج مرتبی با یک مثال:

مثال: فرض کنید $f=\{(1,4),(2,7),(3,10)\}$ و $g=\{(2,-1),(3,6),(4,1)\}$ باشد و ما $f+2g$ را بخواهیم.

مرحلهٔ ۱: اشتراک دامنه‌های f و g را حساب می‌کنیم: $D_{f+2g}=\{2,3\}$

مرحلهٔ ۲: مقدار $f+2g$ را به ازای xهای دامنه به دست می‌آوریم:

$x=2: f(2)+2g(2)=7+2(-1)=5 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (2,5)$

$x=3: f(3)+2g(3)=10+2(6)=22 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (3,22)$

مرحلهٔ ۳: $f+2g=\{(2,5),(3,22)\}$

۳ محاسبهٔ برد توابع $f \frac{+}{\times} g$:

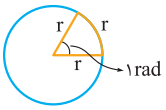
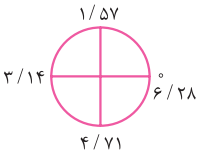
مرحلهٔ ۱	مرحلهٔ ۲	مرحلهٔ ۳
ابتدا دامنهٔ تابع $f \frac{+}{\times} g$ را حساب می‌کنیم.	ضابطهٔ $f \frac{+}{\times} g$ را تشکیل می‌دهیم.	برد تابع $f \frac{+}{\times} g$ را در دامنه‌اش به دست می‌آوریم.

۴ رسم توابع $-f(x)$ و $kf(x)$ از روی تابع $f(x)$:

ضابطه	چه بلایی سر نمودار $f(x)$ می‌آوریم؟
$-f(x)$	نسبت به محور xها قرینه می‌شود.
$kf(x)$	xها تغییر نمی‌کند، ولی yهایش k برابر می‌شود.

رادیان

۱ نکات اولیهٔ رادیان:

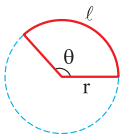
۱	تعریف ۱ رادیان	زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمانی که طولش برابر با شعاع دایره است: 
۲	تقریب ۱ رادیان	$1\,rad \simeq 57/3^\circ$
۳	مرزها برحسب رادیان	
۴	رابطهٔ بین درجه و رادیان	$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$
۵	تبدیل سریع درجه به رادیان و برعکس	$D \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} R$ ، $R \xrightarrow{\times \frac{180}{\pi}} D$

۲ زوایای مهم برحسب درجه و رادیان:

15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

۳ طول کمان روبه‌رو زاویهٔ θ رادیان در دایره‌ای به شعاع r:

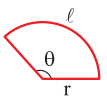


$\ell = r\theta$
↓
برحسب رادیان

۴ در سؤالات «چرخیدن دو قرقرهٔ متصل به یک تسمه» یا «چرخیدن دو چرخ وسیله‌ای که چرخ‌های نابرابر دارد»، شروع حل با برابر قراردادن طول کمان‌های طی شده است:

$\ell_1 = \ell_2 \rightarrow r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \rightarrow \dots$

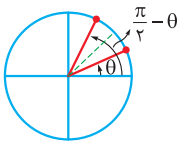
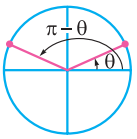
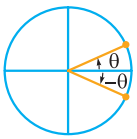
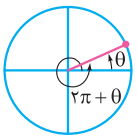
۵ قطاع (θ برحسب رادیان):

شکل	محیط	مساحت
	$\ell + 2r$ یا $r\theta + 2r$	$\frac{1}{2}\theta r^2$

۶ زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت h و m دقیقه $= \left|\frac{11}{2}m - 30h\right|$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

۱ زوایای متمم، مکمل، قرینه و هم‌پایان $(k \in \mathbb{Z})$:

	متمم	مکمل	قرینه	هم‌پایان
تعریف	دو زاویه که مجموعشان 90° است.	دو زاویه که مجموعشان 180° است.	قرینهٔ θ یعنی $-\theta$	زوایایی که اختلافشان مضربی از 360° است.
برای زاویهٔ θ	$\frac{\pi}{2} - \theta$ یا $90^\circ - \theta$	$\pi - \theta$ یا $180^\circ - \theta$	$-\theta$	$2k\pi + \theta$ یا $360^\circ k + \theta$
روی دایره	 قرینه نسبت به $y = x$	 قرینه نسبت به محور yها	 قرینه نسبت به محور xها	 یک یا چند دور کامل می‌زنند.
رابطه با نسبت‌های زاویهٔ θ	$\sin$ یکی با $\cos$ دیگری و $\tan$ یکی با $\cot$ دیگری برابر است و بالعکس.	$\sin$ها برابر و بقیه قرینهٔ هم هستند.	$\cos$ها برابر و بقیه قرینهٔ هم هستند. (کسینوس منفی را می‌خورد!)	همه چی ثابت می‌ماند.
مثال	$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$	$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$	$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ$	$\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$

۲ نوشتن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ برحسب زاویهٔ α در ۳ مرحله:

مرحلهٔ ۱	$0 <$ زاویه $< 2\pi$	اگر کمان از 2π بیشتر بود، مجاز هستیم مضارب 2π را از آن کم کنیم تا به زاویه‌ای در محدودهٔ صفر تا 2π برسیم.
مرحلهٔ ۲	تغییر اسم می‌دهد یا نه	اگر π یا 2π داشتیم، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود، ولی اگر $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ داشتیم، $\sin$ به $\cos$ (و بالعکس) و $\tan$ به $\cot$ (و بالعکس) تبدیل می‌شود.
مرحلهٔ ۳	علامت + یا −	α را زاویه‌ای در ربع اول (مثلاً 10°) در نظر می‌گیریم و با توجه به آن، محدودهٔ زاویهٔ $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ را مشخص و علامت نسبت را تعیین می‌کنیم.

مثال: $\sin(\frac{7\pi}{2} - \alpha)$

مرحلهٔ ۱: از $\frac{7\pi}{2}$، 2π کم می‌کنیم:

$$\sin(\underbrace{2\pi}_{\text{حذف}} + \frac{3\pi}{2} - \alpha) = \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$$

مرحلهٔ ۲: به خاطر $\frac{3\pi}{2}$، $\sin$ به $\cos$ تبدیل می‌شود.

مرحلهٔ ۳: با فرض $\alpha = 10^\circ$، زاویهٔ $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ می‌شود 260° که در ربع (۳) قرار دارد و در این ربع $\sin$ منفی است.

پس:

$$\sin(\frac{7\pi}{2} - \alpha) = \underbrace{-}_{\text{مرحلهٔ ۳}}\overbrace{\cos}^{\text{مرحلهٔ ۲}}\alpha$$

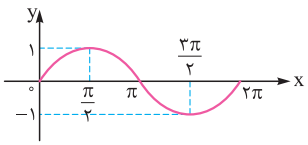
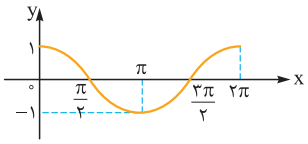
۳ جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$:

	$\frac{\pi}{۲}-\alpha$	$\frac{\pi}{۲}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$	$\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$	$۲\pi-\alpha$	$۲\pi+\alpha$
تغییر اسم می‌دهد یا نمی‌دهد؟	می‌دهد	می‌دهد	نمی‌دهد	نمی‌دهد	می‌دهد	می‌دهد	نمی‌دهد	نمی‌دهد
ناحیهٔ (ربع) زاویهٔ جدید	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۱
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tan	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$
cot	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$

۴ برای آن‌که کسرهایی به فرم $\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{c\sin\alpha+d\cos\alpha}$ را برحسب $\tan\alpha$ بنویسیم، باید همهٔ نسبت‌ها را به $\cos\alpha$ تقسیم کنیم:

$$\frac{\frac{a\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{b\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{c\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{d\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{a\tan\alpha+b}{c\tan\alpha+d}$$

توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس

ضابطهٔ تابع	نمودار	دامنه	بُرد	دورهٔ تناوب	نقاط max	نقاط min	صفرهای تابع
$y=\sin x$		$\mathbb{R}$	$[-۱,۱]$	۲π	$۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$	$k\pi$
$y=\cos x$		$\mathbb{R}$	$[-۱,۱]$	۲π	$۲k\pi$	$۲k\pi+\pi$	$k\pi+\frac{\pi}{۲}$