آزمون حضوری
شماره دو

رشته ریاضی

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

ویژه کنکور
۱۴۰۳

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
حسابان و ریاضی پایه	**زوج‌درس دهم**: فصل سوم + فصل چهارم + فصل پنجم صفحه ۵۹ تا ۱۱۷ **زوج‌درس یازدهم**: فصل دوم + فصل سوم صفحه ۳۷ تا ۹۰	۲	۲۲	علی شهرابی	محسن فراهانی

توان‌های گویا

۱ اگر $a^n = b$ و n عددی طبیعی باشد، می‌گوییم a ریشهٔ nام b است. چند مثال:

ریشهٔ سوم ۸	$\sqrt[3]{8} = 2$
ریشه‌های دوم ۲۵	$\pm\sqrt{25} = \pm 5$
ریشه‌های چهارم ۳	$\pm\sqrt[4]{3}$
ریشهٔ پنجم ۱−	$\sqrt[5]{-1} = -1$

۲ ریشهٔ nام عدد a در دو حالت $a \geq 0$ و $a < 0$:

علامت a	ریشهٔ nام (فرد)	ریشهٔ nام (زوج)
$a \geq 0$	$\sqrt[n]{a}$	$\pm\sqrt[n]{a}$
$a < 0$	$\sqrt[n]{a}$	ندارد

۳ حاصل $\sqrt[n]{a^n}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$$

۴ قواعد رادیکال‌ها:

		توضیح	مثال
۱	جمع و تفریق رادیکال‌ها	باید «عبارت زیر رادیکال‌ها» و «فرجه‌هایشان» برابر باشد.	$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
۲	ضرب و تقسیم رادیکال‌ها	باید «فرجه‌ها» برابر باشد.	$\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{6}$
۳	عدد بیرون کشیدن	$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a\sqrt[n]{b} & \text{فرد } n \\ \lvert a \rvert \sqrt[n]{b} & \text{زوج } n, b > 0 \end{cases}$	$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \times 3^3} = 3\sqrt[3]{2}$
۴	رادیکال تو رادیکال	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[(m \times n)]{a}$	$\sqrt{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[8]{32} = \sqrt[8]{2^5} = 2^{\frac{5}{8}}$
۵	ساده‌کردن توان و فرجه	$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ (اگر k زوج بود، a قدرمطلق می‌گیرد.)	$\sqrt[18]{5^{12}} = \sqrt[3 \times 6]{5^{2 \times 6}} = \sqrt[3]{5^2}$

۵ **توان گویا:** اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$m \rightarrow$ توان، $n \rightarrow$ فرجه

۶ قواعد توان:

ضرب با پایه‌های مساوی	ضرب با توان‌های مساوی	تقسیم با پایه‌های مساوی	تقسیم با توان‌های مساوی	توان منفی	توان به توان
$a^n . a^m = a^{n+m}$	$a^n . b^n = (ab)^n$	$a^n \div a^m = a^{n-m}$	$a^n \div b^n = (\frac{a}{b})^n$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(a^n)^m = a^{(n \times m)}$

عبارت‌های جبری

۱ **اتحاد**: هر تساوی جبری که به ازای تمام مقادیر متغیرها برقرار باشد. مثلاً $x(x+2)=x^2+2x$ یک اتحاد است.

۲ اتحادهای معروف:

	اسم اتحاد	فرم کلی اتحاد	مثال
۱	مربع دوجمله‌ای	$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$	$(2x+5)^2=4x^2+20x+25$
۲	مربع سه‌جمله‌ای	$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$	$(x-2y+3z)^2=x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz$
۳	مزدوج	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(5x-3)(5x+3)=25x^2-9$
۴	جمله‌مشترک	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$	$(3x+2)(3x+5)=9x^2+21x+10$
۵	مکعب	$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$	$(2x-5)^3=8x^3-60x^2+150x-125$
۶	چاق و لاغر	$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$	$(3x+2)(9x^2-6x+4)=27x^3+8$

۳ دو فرم پراستفاده از اتحاد مربع و مکعب:

	فرم اتحادی	شبیه‌سازی با S و P
۱	$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$	$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$
۲	$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$	$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

۴ برای سؤالاتی که «$a+b$ و ab» را می‌دهند و a^2+b^2 یا a^3+b^3 را می‌خواهند (یا سؤالاتی که $x+\frac{1}{x}$ را می‌دهند و $x^2+\frac{1}{x^2}$ یا $x^3+\frac{1}{x^3}$ را می‌خواهند) از دو اتحاد بالا استفاده کنید.

۵ ساده‌کردن رادیکال‌های به فرم $\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}$

اگر رادیکال به شکل $\sqrt{A\pm 2\sqrt{B}}$ دیدید، باید زیر رادیکال یعنی $A\pm 2\sqrt{B}$ را به شکل $(\sqrt{C}\pm\sqrt{D})^2$ بنویسید:

$$(\sqrt{C}\pm\sqrt{D})^2=A\pm 2\sqrt{B}\Rightarrow C+D\pm 2\sqrt{CD}=A\pm 2\sqrt{B}\Rightarrow\begin{cases}A=C+D\\B=C\times D\end{cases}$$

یعنی باید دنبال دوتا عدد باشیم که جمعشان A و ضربشان B باشد. مثلاً برای ساده‌کردن $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$، باید دوتا عدد پیدا کنیم که جمعشان ۵ و ضربشان ۶ باشد. این دوتا عدد ۲ و ۳ هستند، پس جای $5+2\sqrt{6}$ می‌نویسیم $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ و داریم:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

۶ **تجزیه**: نوشتن یک عبارت جبری به صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عبارت جبری دیگر

۷ روش‌های معروف تجزیه:

اسم روش	توضیح	مثال
فاکتورگیری	از بزرگ‌ترین عامل مشترک بین جملات فاکتور می‌گیریم.	$12x^5-18x^4=6x^4(2x-3)$
استفاده از اتحادها	● در تجزیهٔ a^n-b^n، اگر n زوج باشد، از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم. ● در تجزیهٔ $a^n\pm b^n$، اگر n مضرب ۳ باشد، از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم. ● در سه‌جمله‌ای‌ها دنبال اتحاد جمله‌مشترک (یا مربع) باشید.	$x^6-7x^3-8 \xlongequal{\text{جمله‌مشترک}} (x^3-8)(x^3+1)$ $\xlongequal{\text{چاق و لاغر}} (x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)$
دسته‌بندی	چند جمله را با هم می‌گیریم و چند جملهٔ دیگر را نیز با هم، بعد با تجزیهٔ هر دسته به عبارتی می‌رسیم که به کمک اتحادها یا فاکتورگیری تجزیهٔ نهایی می‌شود.	$x^3+3x^2-4x-12=x^2(x+3)-4(x+3)$ $\xrightarrow[x+3]{\text{فاکتور از}} (x+3)\underbrace{(x^2-4)}_{\text{مزدوج}}=(x+3)(x-2)(x+2)$
شکستن جملات	برای تجزیهٔ عبارت‌های به فرم x^4+bx^2+c که در نگاه اول قابل تجزیه نیستند مناسب است. باید bx^2 را به شکل dx^2+ex^2 بنویسید که dx^2 با دو جملهٔ دیگر تشکیل اتحاد مربع بدهد و بعد از آن از اتحاد مزدوج استفاده کنید.	$x^4+5x^2+9 \xrightarrow[6x^2-x^2]{\text{جای } 5x^2 \text{ می‌نویسیم}} x^4+6x^2+9-x^2$ $=(x^2+3)^2-x^2=(x^2+3+x)(x^2+3-x)$

۸ گویاکردن مخرج کسرها:

فرم کسر	روش گویاکردن مخرج	مثال
$\frac{\bigcirc}{\sqrt{a}}$	صورت و مخرج را در $\sqrt{a}$ ضرب می‌کنیم.	$\frac{6}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$
$\frac{\bigcirc}{\sqrt[m]{a^n}}$	صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{a^k}$ ضرب می‌کنیم (k کوچک‌ترین عددی است که به ازای آن $n+k$ مضرب m است).	$\frac{12}{\sqrt[3]{2^4}}\times\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{12\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^6}}=\frac{12\sqrt[3]{4}}{4}=3\sqrt[3]{4}$
$\frac{\bigcirc}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ یا $\frac{\bigcirc}{\sqrt{a}\pm b}$	صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.	$\frac{6}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}=\frac{6(\sqrt{7}+2)}{7-4}=2(\sqrt{7}+2)$
$\frac{\bigcirc}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$ یا $\frac{\bigcirc}{\sqrt[3]{a}\pm b}$	صورت و مخرج را در چاق مخرج ضرب می‌کنیم.	$\frac{3}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{3(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{5}$
$\frac{\bigcirc}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$	صورت و مخرج را در لاغر مخرج ضرب می‌کنیم.	$\frac{10}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}\times\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}=\frac{10(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{5}=2(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$

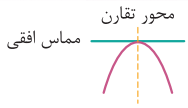
معادلهٔ درجه‌دو و روش‌های مختلف حل آن

تعداد جواب معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۲	دو ریشهٔ مثبت	$\Delta>0, S>0, P>0$
۱	حالت ۱: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P<0$
	حالت۲: یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta=0, \frac{-b}{a}>0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta>0, S<0, P>0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta=0, \frac{-b}{a}<0$
	حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta<0$

۱ برای حل معادلهٔ درجه‌سوم، اول یک ریشه را از بین اعداد ±1 و ±2 حدس می‌زنیم (مثلاً $x=a$ شد). بعد عبارت درجه‌سوم را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم و معادلهٔ درجه‌سوم اولیهٔ را به شکل $(x-a)(\text{درجه}2)=0$ درمی‌آوریم که حلش را بلدیم.

تابع درجه دو (سهمی)

۱ با توجه به علامت a، سهمی دوتا شکل می‌تواند داشته باشد:

	قیافه	طول رأس	عرض رأس	محور تقارن	مماس افقی	مقدار min یا max	بُرد
$a>0$		$\frac{-b}{2a}$	$\frac{-\Delta}{4a}$ یا $f(\frac{-b}{2a})$	$x=\frac{-b}{2a}$	$y=\frac{-\Delta}{4a}$	$\min=\frac{-\Delta}{4a}$	$[\frac{-\Delta}{4a},+\infty)$
$a<0$						$\max=\frac{-\Delta}{4a}$	$(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$

۲ تنها نقطه‌ای از سهمی که با حذف آن، برد تغییر می‌کند، رأس سهمی است.

۳ اگر دو نقطه با yهای یکسان روی سهمی داشته باشیم، میانگین xهایشان، x رأس را می‌دهد.

از جملهٔ بالا می‌توانیم نتیجه بگیریم میانگین ریشه‌های سهمی، x رأس است.

۴ اگر $ax+by=c$ باشد $(a,b>0)$، زمانی xy ماکزیمم است که ax و by هر دو برابر با $\frac{c}{2}$ باشند.

مثلاً اگر $3x+2y=12$ باشد و ماکزیمم xy را بخواهیم، باید $3x=6$ و $2y=6$ باشد (که $x=2$ و $y=3$ و در نتیجه $xy=6$ را نتیجه می‌دهد).

۵ منظور از صفرهای تابع $f(x)$، «طول نقاط برخورد تابع f با محور xها» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$» است.

۶ نوشتن سریع معادلهٔ سهمی:

	چیزهایی که داریم.	ضابطهٔ سهمی	نکتهٔ تکمیلی
۱	x_1 و x_2 صفرهای سهمی‌اند.	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲	نقطهٔ (x_S,y_S) رأس سهمی است.	$y=a(x-x_S)^2+y_S$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳	سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله ـ سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.	اگر نقطه‌ای به مختصات $(0,c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.

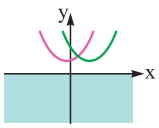
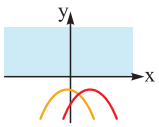
۷ اگر سهمی در نقطهٔ $(\alpha,0)$ بر محور xها مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید: $y=a(x-\alpha)^2$

۸ علامت ضرایب a، b و c

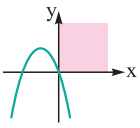
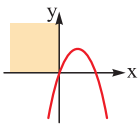
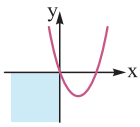
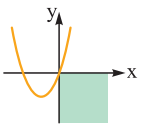
علامت a	علامت b	علامت c
با دهانهٔ سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور yها	عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها

۹ سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات:

حالت ۱: سهمی فقط از ۲ ناحیه عبور کند.

		شکل	شرایط	
			a	Δ
۱	سهمی فقط از ناحیهٔ ۱ و ۲ عبور کند.		+	−
۲	سهمی فقط از ناحیهٔ ۳ و ۴ عبور کند.		−	−

حالت ۲: سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند).

		شکل	شرایط			
			a	b	c	Δ
۱	فقط از ناحیهٔ ۱ نگذرد.		−	−	−	+
۲	فقط از ناحیه ۲ نگذرد.		−	+	−	+
۳	فقط از ناحیهٔ ۳ نگذرد.		+	−	+	+
۴	فقط از ناحیهٔ ۴ نگذرد.		+	+	+	+

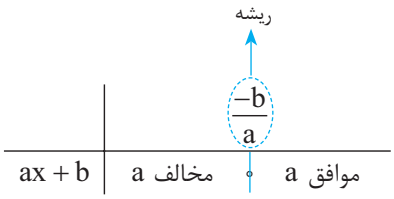
c می‌تواند صفر هم باشد.

حالت ۳: سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند. $\xleftarrow{\text{فقط کافیه که}}$ $P<0$

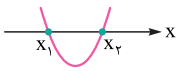
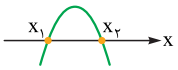
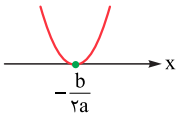
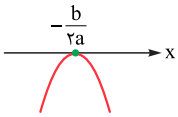
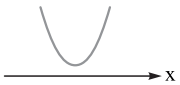
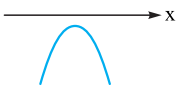
۱۰ شرط آن‌که سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند، آن است که سهمی دو ریشهٔ هم‌علامت داشته باشد.

تعیین علامت

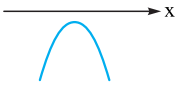
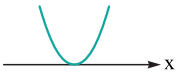
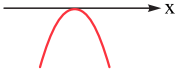
۱ تعیین علامت عبارت درجه‌یک



۲ تعیین علامت عبارت درجه‌دو

علامت دلتا	جدول تعیین علامت	وضعیت نموداری	
		$a>0$	$a<0$
$\Delta>0$	x_1 x_2 ax^2+bx+c | a موافق | a مخالف | a موافق		
$\Delta=0$	$x_1=\frac{-b}{2a}$ ax^2+bx+c | a موافق | a موافق		
$\Delta<0$	ax^2+bx+c | a موافق		

۳ چهار حالت خاص و پرتکرار

	سؤال	شروط	وضعیت نموداری
۱	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره مثبت باشد.	۱) $a>0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xها باشد.	۲) $\Delta<0$	
۲	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره منفی باشد.	۱) $a<0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها باشد.	۲) $\Delta<0$	
۳	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره نامنفی باشد.	۱) $a>0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ زیر محور xها نباشد.	۲) $\Delta\le 0$	
۴	می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c همواره نامثبت باشد.	۱) $a<0$	
	بیان دیگر: می‌خواهیم سهمی $y=ax^2+bx+c$ بالای محور xها نباشد.	۲) $\Delta\le 0$	

۴ جواب نامعادلهٔ درجه‌دوم (در حالت $\Delta > 0$)

علامت a	فرم نامعادله	جواب	توضیح فارسی	مثال با جواب
$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$\mathbb{R} - [x_1, x_2]$	نابین ریشه‌ها	$x^2 - 2x - 15 > 0 \Rightarrow x > 5$ یا $x < -3$
	$ax^2 + bx + c < 0$	(x_1, x_2)	بین ریشه‌ها	$x^2 - 2x - 15 < 0 \Rightarrow -3 < x < 5$
$a < 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$[x_1, x_2]$	بین ریشه‌ها	$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$
	$ax^2 + bx + c < 0$	$\mathbb{R} - (x_1, x_2)$	نابین ریشه‌ها	$2x - x^2 \leq 0 \Rightarrow x \geq 2$ یا $x \leq 0$

۵ جواب‌های نامعادله‌های درجه‌یک و درجه‌دو به فرم‌های زیر می‌تواند باشد:

	فرم نامعادله	مدل‌های ممکن برای جواب
نامعادلهٔ درجه‌یک	$ax + b > 0$ یا $ax + b < 0$	$(\frac{-b}{a}, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{-b}{a})$
	$ax + b \geq 0$ یا $ax + b \leq 0$	$[\frac{-b}{a}, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{-b}{a}]$
نامعادلهٔ درجه‌دو	$ax^2 + bx + c > 0$ یا $ax^2 + bx + c < 0$	$\underbrace{(x_1, x_2)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R}}_{\Delta<0}$ یا $\underbrace{\varnothing}_{\Delta\leq 0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R} - \{x_1\}}_{\Delta=0}$
	$ax^2 + bx + c \geq 0$ یا $ax^2 + bx + c \leq 0$	$\underbrace{[x_1, x_2]}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{(-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)}_{\Delta>0}$ یا $\underbrace{\mathbb{R}}_{\Delta\leq 0}$ یا $\underbrace{\varnothing}_{\Delta<0}$ یا $\underbrace{\{x_1\}}_{\Delta=0}$

پس اگر جواب نامعادلهٔ $ax^2 + bx + c > 0$ یا $ax^2 + bx + c < 0$ به صورت $(-\infty, k)$ یا به صورت $(k, +\infty)$ شد، عبارت $ax^2 + bx + c$ باید درجه‌یک باشد؛ یعنی ضریب x^2 صفر است $(a = 0)$.

۶ مراحل تعیین علامت سریع با یک مثال

فرض کنید می‌خواهیم عبارت $P(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 4)}{x^3 - 9x}$ را تعیین علامت کنیم.

مرحلهٔ ۱	تمام عبارات را تجزیه می‌کنیم.	$P(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)^2}{x(x-3)(x+3)}$
مرحلهٔ ۲	ریشه‌ها و زوج و فردبودن توانشان را معلوم می‌کنیم.	$P(x) = \frac{(x\underset{\uparrow 1}{-1})(x\underset{\uparrow -1}{+1})(x\underset{\uparrow -2}{+2})^2}{x(x\underset{\downarrow 3}{-3})(x\underset{\downarrow -3}{+3})}$ زوج
مرحلهٔ ۳	جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم.	$\begin{array}{c\|cccccc} & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline P(x) & \text{ت ن} & 0 & 0 & \text{ت ن} & 0 & \text{ت ن} \end{array}$

مرحلهٔ ۴	از خانهٔ سمت راست جدول شروع می‌کنیم. علامت P به ازای $x=۴$ را پیدا می‌کنیم.	$P(x)=\dfrac{\overbrace{(x-۱)}^{+}\overbrace{(x+۱)}^{+}\overbrace{(x+۲)^{۲}}^{+}}{\underbrace{x}_{+}\underbrace{(x-۳)}_{+}\underbrace{(x+۳)}_{+}} \Rightarrow P(۴)>۰$
مرحلهٔ ۵	پس خانهٔ سمت راست، + است. از آن‌جا به سمت چپ حرکت می‌کنیم و یکی‌درمیان علامت‌ها را عوض می‌کنیم. فقط وقتی از $\underbrace{x=-۲}_{\text{(توان زوج)}}$ رد می‌شویم، علامت عوض نمی‌شود.	$\begin{array}{c\|ccccccccccccc} & & -۳ & & -۲ & & -۱ & & ۰ & & ۱ & & ۳ & \\ \hline P(x) & \ominus & \text{ت ن} & \oplus & \circ & \oplus & \circ & \ominus & \text{ت ن} & \oplus & \circ & \ominus & \text{ت ن} & + \end{array}$ عوض نشد!

۷ نامعادلات سادهٔ قدرمطلقی

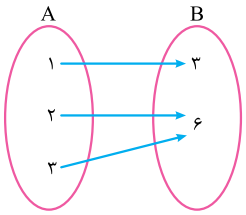
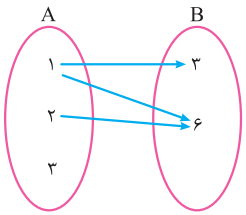
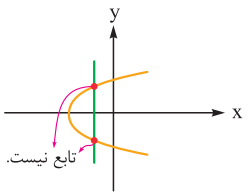
	$a>۰$	$a=۰$	$a<۰$
$\|u\|\geq a$	$u\geq a$ یا $u\leq -a$	$u\in\mathbb{R}$	$u\in\mathbb{R}$
$\|u\|\leq a$	$-a\leq u\leq a$	$u=۰$	$\varnothing$
$\|u\|>a$	$u>a$ یا $u<-a$	$\mathbb{R}-\{u=۰\}$	$u\in\mathbb{R}$
$\|u\|<a$	$-a<u<a$	$\varnothing$	$\varnothing$

تابع

مقدمات (تعریف تابع، دامنه و برد)

۱ تابع دستگاهی است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد.

۲ **روش‌های نمایش تابع:**

	روش نمایش	شرط تابع‌بودن	مثال
۱	پیکانی (نمودار وِن)	از هر عضو مجموعهٔ مبدأ، باید دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.	 تابع است.  تابع نیست.
۲	زوج مرتبی	مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها نباید برابر باشد. اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد.	تابع است. $\rightarrow \{(۱,۲),(۲,۳),(-۱,۳)\}$ تابع نیست. $\rightarrow \{(۱,۲),(۳,۵),(۱,۶)\}$
۳	جدولی	مؤلفه‌های سطر مربوط به xها نباید یکسان باشد. اگر مؤلفه‌های x یکسان داشتیم، مؤلفه‌های y شان هم باید یکسان باشد.	$\begin{array}{c\|cccc} x & ۲ & ۳ & ۵ & ۳ \\ \hline y & -۱ & ۷ & ۴ & ۲ \end{array}$ تابع نیست.
۴	نموداری	اگر خطی موازی محور yها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار مربوط به یک تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، تابع است.	
۵	توصیفی	با توجه به جملهٔ توصیفی، اگر به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی داشته باشیم، آن رابطه تابع است.	رابطه‌ای که به هر فرد، کد ملی‌اش را نسبت می‌دهد. { ورودی: انسان‌ها، خروجی: کد ملی } چون هر شخص نمی‌تواند بیش از یک کد ملی داشته باشد، پس تابع است.
۶	ضابطه‌ای	اگر به ازای هر x، فقط یک خروجی داشته باشیم، تابع است. روابطی که در آن‌ها y تنها می‌شود، حتماً تابع هستند؛ مثل $\underset{\text{تنها}}{y} = \log_۲ x + \cos\frac{۱}{x}$	در رابطهٔ $y^۲ = x + ۱$، اگر $x = ۱$ را بدهیم، ۲تا خروجی می‌دهد: $y^۲ = ۲ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲} \rightarrow$ تابع نیست.

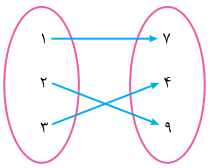
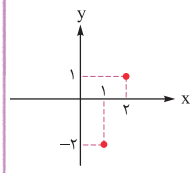
۳ سؤالات تابع‌نویسی: از ما می‌خواهد عبارتی (مثل محیط، مساحت و ...) را برحسب یک متغیر (مثل ضلع، شعاع و ...) بنویسیم.

مثال تابع مساحت مربع برحسب محیط آن؟

پاسخ می‌دانیم $P=۴a$ و $S=a^۲$ است. از $P=۴a$ نتیجه می‌گیریم $a=\frac{P}{۴}$. حالا این تساوی را در رابطهٔ مساحت قرار می‌دهیم:

$$S=a^۲ \xrightarrow{a=\frac{P}{۴}} S=(\frac{P}{۴})^۲ \Rightarrow S=\frac{P^۲}{۱۶} \xrightarrow{\text{به شکل تابع}} S(P)=\frac{P^۲}{۱۶}$$

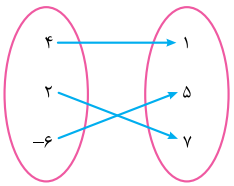
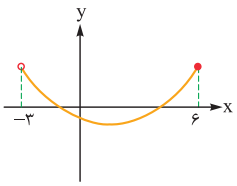
۴ مقدار تابع در یک نقطه:

روش نمایش تابع	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی	ضابطه‌ای
مثال		$f=\{(۱,۲),(۲,۶)\}$	x: ۱ ۲ ۳ y: −۳ ۶ ۲		f تابعی است که به هر عددی، مکعبش را نسبت می‌دهد.	$f(x)=\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۲x+۵}}$
مقدار تابع در $x=۲$	$f(۲)=۹$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۱$	$f(۲)=۲^۳=۸$	$f(۲)=\frac{۵}{۳}$

۵ نقاط برخورد مهم:

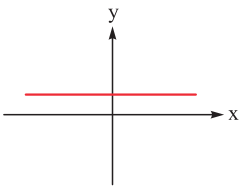
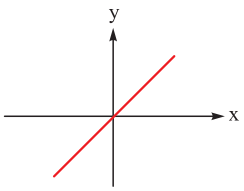
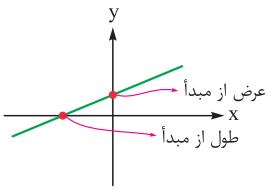
نقطهٔ برخورد تابع f با ...	راه حل	مختصات نقطه (نقاط)
محور xها	«y را صفر می‌دهیم» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$»	$(\ ,۰)$ ← جواب‌های $f(x)=۰$
محور yها	«x را صفر می‌دهیم» یا «مقدار $f(۰)$»	$(۰,f(۰))$
تابع g	حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ ← جواب‌ها ← $x_۱,\ldots$	$(x_۱,f(x_۱)),\ldots$
نیمساز ربع اول و سوم	حل معادلهٔ $f(x)=x$ ← جواب‌ها ← $x_۱,\ldots$	$(x_۱,x_۱),\ldots$

۶ محاسبهٔ دامنه در نمایش مختلف یک تابع (به‌جز نمایش ضابطه‌ای):

روش محاسبهٔ دامنه	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی
	همهٔ اعدادی که از آن‌ها فلش خارج شده	همهٔ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها	همهٔ اعداد سطر مربوط به x	تصویر نمودار روی محور xها	ورودی‌ها!
مثال		$f=\{(۵,۲),(۱,۳)\}$	x: ۱ −۴ ۶ y: ۶ ۵ ۹		تابعی که به هر عدد مربع کامل دورقمی، جذرش را نسبت می‌دهد.
دامنه	$D=\{۴,۲,-۶\}$	$D_f=\{۵,۱\}$	$D=\{۱,-۴,۶\}$	$D=(-۳,۶]$	دامنه $=\{۱۶,۲۵,\ldots,۸۱\}$

انواع تابع

۱ چند تابع خاص

تابع	ضابطه	نکته		نمودار	دامنه	برد
ثابت	$f(x) = c$ (c: عدد)	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج مرتب‌ها با هم برابر است. در نمایش ضابطه‌ای، ضرایب جملات شامل x باید صفر باشد.		یک خط افقی 	$\mathbb{R}$	C
همانی	$f(x) = x$	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. در نمایش ضابطه‌ای، ضریب x، یک و ضریب سایر جملات صفر است.		نیمساز ربع اول و سوم 	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
خطی	$f(x) = mx + h$	محل برخورد با محور yها	$h \rightarrow$ (عرض از مبدأ)	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (m: شیب) 	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

انتقال نمودار توابع

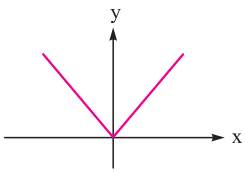
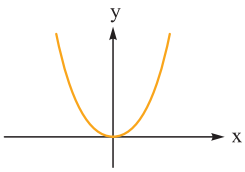
۱ انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض:

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.

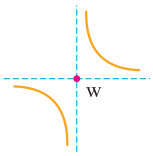
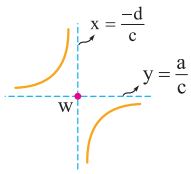
تابع قدرمطلق به صورت $f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ نمایش داده می‌شود.

به توابعی که به ازای محدوده‌های مختلفی از دامنه، معادله‌های متفاوتی داشته باشند (مثل تابع قدرمطلق)، تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای) می‌گوییم.

۲ چند تابع معروف با نمودارشان:

ضابطه	$y=\|x\|$	$y=x^2$
نمودار		
دامنه	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
برد	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$

۳ نکات مهم تابع هموگرافیک با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$:

شرط هموگرافیک‌بودن	$ad-bc\neq 0, c\neq 0$	
دامنه	$\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$	
برد	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$	
معادلهٔ خط‌چین عمودی	$x=\frac{-d}{c}$	
معادلهٔ خط‌چین افقی	$y=\frac{a}{c}$	
ضابطهٔ وارون	$\frac{-dx+b}{cx-a}$	
شرط برابری f و f^{-1}	$a+d=0$	
مرکز تقارن	$w=(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$	
محورهای تقارن	دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از نقطهٔ w	
شکل تابع	 $ad-bc<0$	 $ad-bc>0$

تابع

مقدمات

۱

یکی از فرم‌های نمایش تابع	جزئیات
$\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = \cdots \end{cases}$	A : دامنه
	B : هم‌دامنه (هم‌دامنه $\supseteq$ برد)

۲ شروط تساوی دو تابع f و g:

۱	$D_f = D_g$ (دامنه‌ها قبل از ساده‌کردن باید محاسبه شوند).
۲	ضابطه‌های دو تابع را بتوانیم با کارهای جبری و ... مثل هم کنیم.

۳ نکات مهم در تساوی توابع:

۱	دامنهٔ تابع به فرم $y = \sqrt{A \times B}$ از حل نامعادلهٔ $A \times B \geq 0$ و دامنهٔ تابع به فرم $y = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$ از اشتراک جواب نامعادله‌های $A \geq 0$ و $B \geq 0$ به دست می‌آید.	
۲	توابع $y = A$ و $y = \frac{A \times B}{B}$ به شرطی با هم برابرند که B ریشه‌ای نداشته باشد (B چندجمله‌ای است.)	
۳	توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{A \times B}{B} & B \neq 0 \\ C & B = 0 \end{cases}$ و $g(x) = \cdots$ به شرطی برابرند که	اولاً: $g(x) = A$
		ثانیاً: مقدار $g(x)$ به ازای ریشهٔ $B = 0$، برابر با C شود.
۴	$\log x^3 = 3\log x \,,\, \log x^2 = 2\log\lvert x\rvert$	

۴

تعداد کل توابع از مجموعهٔ nعضوی به مجموعهٔ mعضوی	m^n
تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ nعضوی به مجموعهٔ mعضوی $(m \geq n)$	$P(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}$

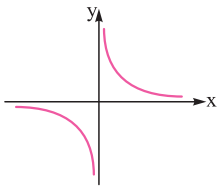
۵ شرط تابع‌بودن یک رابطه: اگر در رابطه‌ای برحسب x و y، xی پیدا کنیم که به ازای آن بیش از یک مقدار برای y پیدا شود، آن رابطه تابع نیست؛ مثلاً در رابطهٔ $|y| + x = 4$ به ازای $x = 1$، دو خروجی $y = 3$ و $y = -3$ داریم؛ پس تابع نیست.

۶ دامنهٔ توابع مهم را در جدول زیر می‌بینید:

اسم تابع	ضابطه	دامنه
چندجمله‌ای	$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$	$\mathbb{R}$
کسری	$f(x) = \frac{A}{B}$	$\mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$
رادیکال با فرجهٔ زوج	$f(x) = \sqrt[2n]{A}$	جواب نامعادلهٔ $A \geq 0$
رادیکال با فرجهٔ فرد	$f(x) = \sqrt[2n+1]{A}$	همان دامنهٔ A
لگاریتم	$f(x) = \log_B A$	$(A > 0) \cap (B > 0) \cap (B \neq 1)$

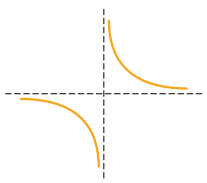
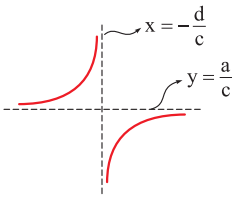
توابع گویا

۱ مطالب اولیهٔ تابع گویا:

ضابطه	دامنه	نمودار $y=\frac{1}{x}$
$f(x)=\frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$	$\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$	

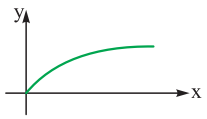
۲ اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\text{چندجمله‌ای}}{ax^2+bx+c}$ به صورت $\mathbb{R}-\{k\}$ باشد، باید «$\Delta_{\text{مخرج}}=0$» و «$k=\frac{-b}{2a}$» باشد.

۳ نکات مهم تابع هموگرافیک با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$:

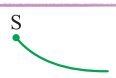
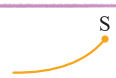
شرط هموگرافیک‌بودن	$ad-bc\neq 0\,,\,c\neq 0$	
دامنه	$\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$	
برد	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$	
معادلهٔ خط‌چین عمودی	$x=\frac{-d}{c}$	
معادلهٔ خط‌چین افقی	$y=\frac{a}{c}$	
ضابطهٔ وارون	$\frac{-dx+b}{cx-a}$	
شرط برابری f و f^{-1}	$a+d=0$	
مرکز تقارن	$w=(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$	
محورهای تقارن	دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از w	
شکل تابع	 $ad-bc<0$	 $ad-bc>0$

توابع رادیکالی

۱ مطالب اولیهٔ تابع رادیکالی:

دامنه	نمودار $y=\sqrt{x}$
زیر رادیکال ≥ 0	

۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=a\sqrt{bx+c}+d$ به یکی از چهار شکل زیر است:

	علامت a	علامت b	شکل نمودار	مختصات نقطهٔ شروع (S)
۱	+	+		ریشهٔ داخل رادیکال، عدد بیرونی: $(-\frac{c}{b}, d)$
۲	+	−		
۳	−	+		
۴	−	−		

جزء صحیح

۱ تابع پله‌ای:

تعریف	تابع چندضابطه‌ای که هر کدام از ضابطه‌هایش یک تابع ثابت است.
نمودار	از تعدادی پاره‌خط افقی تشکیل شده است.
مثال	$f(x)=\begin{cases} 1 & -1\leq x<1 \\ -2 & 1\leq x<4 \end{cases}$

تابع وارون

۱ نکات اولیهٔ تابع وارون:

۱	اگر نقطهٔ (a,b) روی f باشد، نقطهٔ (b,a) روی f^{-1} است و برعکس.
۲	$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$
۳	$R_{f^{-1}}=D_f\,,\,D_{f^{-1}}=R_f$
۴	نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است.
۵	شرط وارون‌پذیری، یک‌به‌یک‌بودن است.

۲ برای محاسبهٔ $f^{-1}(k)$، بهترین راه این است که معادلهٔ $f(x)=k$ را حل کنیم. جواب این معادله، همان $f^{-1}(k)$ می‌شود.
مثلاً اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد و ما $f^{-1}(12)$ را بخواهیم، معادلهٔ $x+\sqrt{x}=12$ را حل می‌کنیم که جوابش می‌شود ۹.

۳

ناحیه‌ای که نمودار f در آن است.	۱	۲	۳	۴
ناحیه‌ای که نمودار f^{-1} در آن قرار می‌گیرد.	۱	۴	۳	۲

۴ مراحل به دست آوردن ضابطهٔ وارون:

۱) x را برحسب y می‌نویسیم (باید x تنها شود).

۲) جای x و y را عوض می‌کنیم.

۵ ضابطهٔ وارون توابع مهم:

اسم تابع	ضابطه	ضابطهٔ وارون (یا طریقهٔ محاسبه)	نکات
خطی	$ax+b$	$\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$	توابع خطی $y=x$ و $y=-x+b$، با وارونشان برابرند.
سهمی	$a(x-x_s)^2+y_s$	باید ابتدا مربع کامل کنید.	در دامنه‌های $x\ge x_s$ یا $x\le x_s$ وارون‌پذیر است.
درجه۳	$k(x+a)^3+b$	باید از اتحادهای مکعب ستون بعدی کمک بگیرید.	$(x\pm1)^3=x^3\pm3x^2+3x\pm1$
			$(x\pm2)^3=x^3\pm6x^2+12x\pm8$
هموگرافیک	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{-dx+b}{cx-a}$	$a+d=0\Leftrightarrow f=f^{-1}$

حواستان باشد که دامنهٔ f^{-1}، برد f می‌شود و معمولاً بهترین راه برای محاسبهٔ $D_{f^{-1}}$ (یا همان R_f)، استفاده از نمودار f است.

۶ راه‌های به دست آوردن نقطه (یا نقاط) برخورد f و f^{-1}:

	روش	توضیح روش
۱	ضابطه‌ای	ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم و بعد معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم.
۲	نموداری	نمودار f را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار f^{-1} به دست آید. تعداد نقاط برخوردشان معلوم می‌شود.
۳	برخورد با نیمساز ربع اول و سوم	اگر f صعودی اکید باشد، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=x$، طول نقاط برخورد f و f^{-1} است.

تابع یک‌به‌یک

۱ به تابعی که در خروجی‌هایش، عدد تکراری نداریم، یک‌به‌یک می‌گوییم.

نمایش	شرط یک‌به‌یک بودن
زوج مرتبی	مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها باید متفاوت باشند.
جدولی	اعداد سطر دوم جدول باید متفاوت باشند.
پیکانی	به هیچ عددی نباید بیشتر از یک پیکان وارد شود.
نموداری	خطی موازی محور xها نباید نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.
ضابطه‌ای	$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

۲ توابع یک‌به‌یک و غیریک‌به‌یک معروف:

اسم تابع	یک‌به‌یک	غیر یک‌به‌یک	
چندجمله‌ای	خطی با شیب غیرصفر	ثابت	چندجمله‌ای درجهٔ زوج
$\frac{ax+b}{cx+d}$	با شرط $ad-bc\neq 0$ (هموگرافیک می‌شه.)	با شرط $ad-bc=0$ (ثابت می‌شه.)	
براکتی‌ها	$ax+b[x]$ (a و b هم‌علامت)	$a[x]+b$	$ax-[ax]$
رادیکالی و قدرمطلقی	$\sqrt{ax+b}$	$\lvert ax+b\rvert$	$\lvert x-a\rvert\pm\lvert x-b\rvert$ (گلدانی و سرسره‌ای)

اعمال جبری روی توابع

۱ چهار عمل اصلی روی توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

اسم عمل	نماد	تعریف ریاضی	دامنه
جمع دو تابع	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f\cap D_g$
تفریق دو تابع	$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_f\cap D_g$
ضرب دو تابع	fg	$(fg)(x)=f(x).g(x)$	$D_f\cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$

۲ اعمال جبری در نمایش زوج مرتبی با یک مثال:

مثال: فرض کنید $f=\{(1,4),(2,7),(3,10)\}$ و $g=\{(2,-1),(3,6),(4,1)\}$ باشد و ما $f+2g$ را بخواهیم.

مرحلهٔ ۱	اشتراک دامنه‌های f و g را حساب می‌کنیم: $D_{f+2g}=\{2,3\}$
مرحلهٔ ۲	مقدار $f+2g$ را به ازای xهای دامنه به دست می‌آوریم: $x=2: f(2)+2g(2)=7+2(-1)=5 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (2,5)$ $x=3: f(3)+2g(3)=10+2(6)=22 \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (3,22)$
مرحلهٔ ۳	$f+2g=\{(2,5),(3,22)\}$

۳ محاسبهٔ برد توابع $f\overset{+}{\underset{\div}{\times}}g$:

مرحلهٔ ۱	ابتدا دامنهٔ تابع $f\overset{+}{\underset{\div}{\times}}g$ را حساب می‌کنیم.
مرحلهٔ ۲	ضابطهٔ $f\overset{+}{\underset{\div}{\times}}g$ را تشکیل می‌دهیم.
مرحلهٔ ۳	برد تابع $f\overset{+}{\underset{\div}{\times}}g$ را در دامنه‌اش به دست می‌آوریم.

ترکیب توابع

۱ نکات اولیهٔ fog:

معادلِ $fog(x)$	$f(g(x))$
ضابطهٔ $fog(x)$	جای xهای تابع f، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.
مقدار $fog(a)$	دو مرحله دارد: اول $g(a)$ (مثلاً می‌شود k)، بعد $f(k)$
دامنهٔ fog	راه اول: $D_{fog}=\{\underbrace{x\in D_g}_{\text{شرط ۱}}\cap\underbrace{g(x)\in D_f}_{\text{شرط ۲}}\}$
	راه دوم: ضابطهٔ fog را بدون هیچ ساده‌کردنی تشکیل می‌دهیم و سپس دامنهٔ آن را حساب می‌کنیم.
برد fog	مرحلهٔ ۱: برد تابع g را حساب می‌کنیم (مثلاً می‌شود بازهٔ I).
	مرحلهٔ ۲: برد تابع f با دامنهٔ I را حساب می‌کنیم.

۲ نکات تکمیلی fog:

دامنهٔ fog زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع داخلی یعنی g است.	$D_{fog}\subseteq D_g$
برد fog زیرمجموعهٔ برد تابع بیرونی یعنی f است.	$R_{fog}\subseteq R_f$

۳ وقتی از بین f، g و fog، دوتا را داریم و سومی را می‌خواهیم.

f	g	fog	راه حل
✓	✓	؟	باید $f(g(x))$ را تشکیل دهیم.
✓	؟	✓	$g(x)$ را مساوی t قرار می‌دهیم. x را برحسب t حساب می کنیم و ... .
؟	✓	✓	در ضابطه f، جای xهایش $g(x)$ قرار می‌دهیم. عبارت به دست آمده را با fog داده‌شده برابر قرار می‌دهیم.

۴ ترکیب f و f^{-1}، همواره تابعی همانی است.

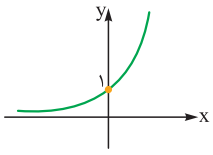
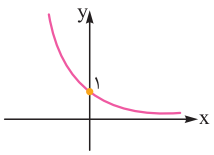
	ضابطه	دامنه	نمودار
حالت ۱	$(fof^{-1})(x)=x$	$D_{f^{-1}}=R_f$	نیمساز ناحیهٔ اول و سوم با دامنهٔ R_f
حالت ۲	$(f^{-1}of)(x)=x$	D_f	نیمساز ناحیهٔ اول و سوم با دامنهٔ D_f

۵ شرط لازم و کافی برای برابربودن fof^{-1} و $f^{-1}of$ آن است که $D_f=R_f$.

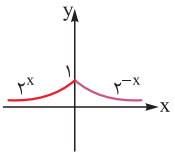
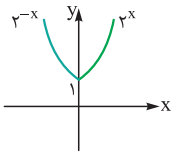
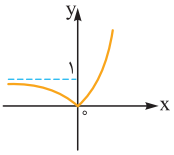
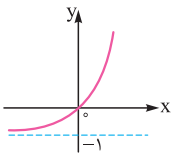
نمایی و لگاریتم

– تابع نمایی –

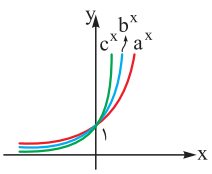
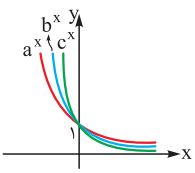
۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ با شرط $a>0$ و $a\neq 1$ تابع نمایی است و براساس مقدار a، دو حالت دارد:

	$a>1$	$0<a<1$
نمودار		
یکنوایی	صعودی اکید	نزولی اکید
دامنه	$\mathbb{R}$	
برد	$\mathbb{R}^+$	
ضابطهٔ وارون	$y=\log_a x$	
مجانب	$y=0$	
حد در بی‌نهایت	$a^{+\infty}\to +\infty$ $a^{-\infty}\to 0^+$	$a^{+\infty}\to 0^+$ $a^{-\infty}\to +\infty$

۲ نمودار چند تابع نمایی:

$y=2^{-\lvert x\rvert}$	$y=2^{\lvert x\rvert}$	$y=\lvert 2^x-1\rvert$	$y=2^x-1$
			

۳ مقایسهٔ توابع نمایی $y=a^x$ با تغییر a:

	
$c>b>a>1$	$1>a>b>c>0$

۴ دو نکته در مورد نمودار تابع نمایی:

۱	اگر نمودار توابع $y=a^x$ و $y=b^x$ نسبت به محور yها قرینه باشند، آن‌گاه: $ab=1$
۲	در تابع نمایی $y=a(b^{cx+d})+e$، خط $y=e$ مجانب افقی تابع است.

۵ اگر معادلهٔ نمایی، ساده حل نشد، باید «با تغییر متغیر» یا «با روش هندسی» آن را حل کنید.

۶ نامعادلهٔ نمایی:

$a > 1$	$0 < a < 1$
با حذف پایه‌ها، جهت عوض نمی‌شود.	با حذف پایه‌ها، جهت عوض می‌شود.
$a^B > a^C \Rightarrow B > C$	$a^B > a^C \Rightarrow B < C$

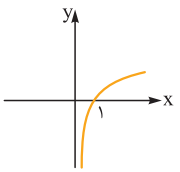
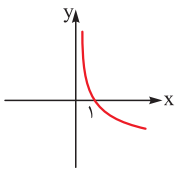
۷ کاربرد توابع نمایی:

مسائل نیمه‌عمر	$\text{جرم باقی‌مانده} = \text{جرم اولیه} \times (\frac{1}{2})^n$ ، $\text{تعداد نیمه‌عمر}: n = \frac{\text{کل زمان}}{\text{طول یک نیمه‌عمر}}$
مسائل درصد افزایش یا کاهش متوالی	اگر به ماده‌ای به طور متوالی در هر مرحله، k درصد اضافه کنیم، آن‌گاه: $A_n = A_0(1+\frac{k}{100})^n$
	اگر از ماده‌ای به طور متوالی در هر مرحله، k درصد کم کنیم آن‌گاه: $A_n = A_0(1-\frac{k}{100})^n$

لگاریتم

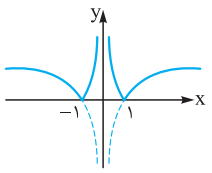
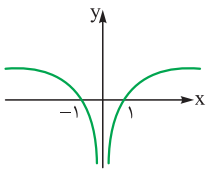
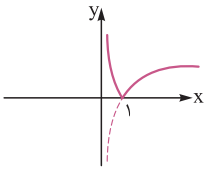
۱ تبدیل نمایی به لگاریتم و بالعکس: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$

۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ با توجه به مقدار a، دو حالت دارد:

	$a > 1$	$0 < a < 1$
نمودار		
یکنوایی	صعودی اکید	نزولی اکید
دامنه	$\mathbb{R}^+$	
برد	$\mathbb{R}$	
ضابطه وارون	$y = a^x$	
مجانب	$x = 0$	

۳ دامنهٔ عبارت لگاریتمی، سه شرط دارد: $\log_B A$ ، $A > 0$ ، $B > 0, B \neq 1$

۴ نمودار چند تابع لگاریتمی:

$y = \lvert \log_2 \lvert x \rvert \rvert$	$y = \log_2 \lvert x \rvert$	$y = \lvert \log_2 x \rvert$
		

۵ ویژگی‌های لگاریتم:

۱	$\log_a a = ۱$
۲	$\log_a ۱ = ۰$
۳	$\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a$
۴	$\log_c a + \log_c b = \log_c (ab)$
۵	$\log_c a - \log_c b = \log_c (\frac{a}{b})$
۶	$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
۷	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

۶ پنج‌تا نکته:

۱	رابطهٔ $\log ۲$ و $\log ۵$	$\log ۲ + \log ۵ = ۱$
۲	دو عدد وارون هم	$\log_b a$ و $\frac{۱}{\log_a b}$
۳	بیرون‌کشیدن توان زوج	$\log x^۲ = ۲\log\|x\|$
۴	بیرون‌کشیدن توان فرد	$\log x^۳ = ۳\log x$
۵	تقریب‌ها	$\log ۲ \simeq ۰/۳ , \log ۵ \simeq ۰/۷$

۷ در توابع $y = \log_d (ax+b) + c$، ریشهٔ عبارت جلوی لگاریتم (یعنی $x = \frac{-b}{a}$)، مجانب قائم (همان خط‌چین عمودی) تابع است.

۸ نامعادلهٔ لگاریتمی:

$a > ۱$	$۰ < a < ۱$
با حذف پایه‌ها، جهت عوض نمی‌شود.	با حذف پایه‌ها، جهت عوض می‌شود.
$\log_a B > \log_a C \Rightarrow B > C$	$\log_a B > \log_a C \Rightarrow B < C$

۹ کاربردهای لگاریتم:

مسئلهٔ زلزله	$\log E = ۱۱/۸ + \frac{۳}{۲}M$ (E: انرژی آزادشده (برحسب ارگ)، M: قدرت زلزله (برحسب ریشتر))
تعداد ارقام	تعداد ارقام عدد A $= [\log A] + ۱$