

آزمون حضوری  
شماره چهار

رشته ریاضی



تجربہ | ریاضی | انسانی

ویژه کنکور  
۱۴۰۳

## مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
هندسه	هندسه دوازدهم صفحه ۹ تا ۲۱ هندسه دهم صفحه ۹ تا ۲۸	۲	۸	علیرضا نصراللهی	محسن فراهانی بردیا نصیری

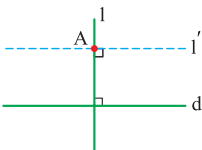
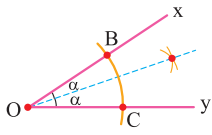


## مکان هندسی‌های معروف

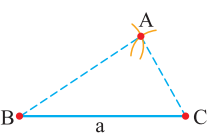
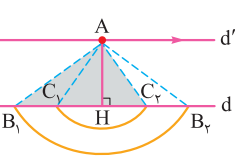
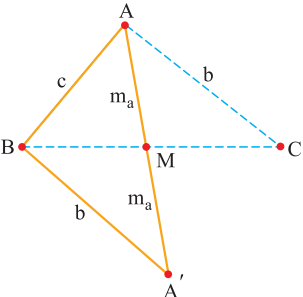
	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت مانند O به فاصله معلوم R باشند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R.
	مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصله ثابت a از خط d قرار دارند، دو خط به موازات d و به فاصله a از آن می‌باشد.
	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط مانند AB به یک فاصله باشند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.
	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از اضلاع یک زاویه مانند xOy به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.

## رسم‌های پایه و معروف

	دهانه پرگار را به اندازه بیش از نصف طول پاره‌خط AB ( $r \geq \frac{AB}{2}$ ) باز کرده و به مراکز A و B کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخورد آنها را به هم وصل می‌کنیم تا عمودمنصف حاصل شود.	عمودمنصف یک پاره‌خط
	ابتدا به مرکز A کمانی می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه B و C قطع کند. سپس به کمک رسم عمودمنصف یک پاره‌خط، عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم تا خط عمود مطلوب حاصل شود.	خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن
	ابتدا به مرکز A کمانی می‌زنیم تا پاره‌خط BC را از آن جدا کند. سپس به کمک رسم عمودمنصف، یک پاره‌خط عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم تا خط عمود مطلوب حاصل شود.	خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن

	<p>خط موازی از یک نقطه</p> <p>ابتدا خط عمود <math>l</math> را به کمک مطالب قبلی بر <math>d</math> وارد می‌کنیم. سپس از نقطه <math>A</math> روی <math>l</math> عمود <math>l'</math> را خارج می‌کنیم. دو خط عمود بر یک خط <math>(d, l')</math> با هم موازی‌اند. (اگر نقطه <math>A</math> روی خط بود، چه؟)</p>	
	<p>نیمساز یک زاویه</p> <p>به مرکز <math>O</math> کمانی دلخواه رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در <math>B</math> و <math>C</math> قطع کند. سپس به مراکز <math>B</math> و <math>C</math> و شعاع بیش از نصف <math>BC</math> کمان‌هایی رسم می‌کنیم. از <math>O</math> به محل برخورد کمان‌ها وصل کنیم و نیمساز حاصل می‌شود.</p>	

### رسم مثلث

شکل	شرط وجود مثلث	روش رسم	داده‌ها
	$ a - c  < b < a + c$ یا ۱) $a + b > c$ ۲) $a + c > b$ ۳) $b + c > a$	<p>ابتدا پاره‌خطی به طول <math>a</math> رسم می‌کنیم، سپس به مرکز <math>B</math> و شعاع <math>c</math> و به مرکز <math>C</math> و شعاع <math>b</math> کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در <math>A</math> قطع کنند. از وصل کردن <math>A</math> به <math>B</math> و <math>C</math> مثلث مطلوب حاصل می‌شود.</p>	<p>داشتن طول سه ضلع <math>(a, b, c)</math></p>
	<p>اگر <math>b</math> و <math>c</math> هر کدام از حالات زیر را داشته باشند؛ مثلث حاصل شده به فرم زیر است:</p> <p>دو مثلث <math>\Rightarrow b &gt; h_a</math> و <math>c &gt; h_a</math></p> <p>یک مثلث متساوی‌الساقین <math>\Rightarrow b = c &gt; h_a</math></p> <p>یک مثلث قائم‌الزاویه <math>\Rightarrow b = h_a, c &gt; h_a</math></p> <p>صفر مثلث <math>\Rightarrow b &lt; h_a</math> یا <math>c &lt; h_a</math> (ممکن نیست، زیرا <math>h_a</math> کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط موازی <math>d</math> و <math>d'</math> است).</p>	<p>ابتدا خط <math>d</math> و <math>d'</math> را به موازات هم و به فاصله <math>h_a</math> از هم رسم می‌کنیم. نقطه دلخواه <math>A</math> و عمود <math>AH</math> را می‌کشیم. به مرکز <math>A</math> و شعاع <math>b</math> و <math>c</math> کمان‌هایی می‌زنیم تا خط <math>d</math> را در <math>B_1, B_2, C_1, C_2</math> قطع کند. مثلث‌های <math>AB_1C_1</math> و <math>AB_2C_2</math> جواب مسئله‌اند.</p>	<p>داشتن طول دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم <math>(h_a, b, c)</math></p>
	<p>۱) <math>b + c &gt; 2m_a</math></p> <p>۲) <math>2m_a + b &gt; c</math></p> <p>۳) <math>2m_a + c &gt; b</math></p>	<p>ابتدا مثلثی به اضلاع <math>b, c</math> و <math>2m_a</math> رسم می‌کنیم <math>(ABA')</math>، وسط <math>AA'</math> را <math>M</math> می‌نامیم. از <math>B</math> به <math>M</math> وصل کرده و به اندازه خود امتداد می‌دهیم تا رأس <math>C</math> حاصل شود.</p>	<p>داشتن طول دو ضلع و میانه وارد بر ضلع سوم <math>(h_a, b, c)</math></p>



### رسم چهارضلعی های معروف

شکل	شرط	روش رسم	داده ها
	بی شمار متوازی الاضلاع با این داده ها می توان رسم کرد.	ابتدا دو خط متقاطع دلخواه رسم می کنیم و محل برخورد را O می نامیم. به مرکز O شعاع $\frac{a}{2}$ و $\frac{b}{2}$ کمان هایی رسم می کنیم تا l و l' را به ترتیب در (B و D) و (A و C) قطع کند. ABCD چهارضلعی مطلوب است.	متوازی الاضلاع با داشتن طول دو قطر (a و b)
	$1) a + b > c$ $2) a + c > b$ $3) b + c > a$	ابتدا مثلث ABD به اضلاع a, b, c را رسم می کنیم. از B خطی به موازات AD و از D خطی به موازات AB می کشیم تا محل برخورد را C بنامیم و متوازی الاضلاع مطلوب حاصل شود.	متوازی الاضلاع با داشتن طول دو ضلع a و b و اندازه یک قطر c
	$1) \frac{b}{2} + \frac{c}{2} > a$ $2) a + \frac{b}{2} > \frac{c}{2}$ $3) a + \frac{c}{2} > \frac{b}{2}$	ابتدا مثلث AOB را به اضلاع $\frac{a}{2}$ , $\frac{b}{2}$ , $\frac{c}{2}$ رسم می کنیم. AO و BO را به اندازه خودشان امتداد می دهیم تا رأس های C و D مشخص شوند. ABCD متوازی الاضلاع مطلوب می باشد.	متوازی الاضلاع با داشتن طول دو قطر a و b و یک ضلع c
	در این حالت با هر داده ای، می توان یک مستطیل رسم کرد.	دو خط عمود بر هم رسم می کنیم تا یکدیگر را در نقطه A قطع کنند. به مرکز A شعاع a و b کمان هایی می زنیم تا این دو خط را در B و D قطع کند. از B و D عمودهایی خارج می کنیم تا محل برخورد آن ها، رأس C را مشخص کند. ABCD چهارضلعی مطلوب است.	مستطیل با داشتن طول دو ضلع a و b
	در این حالت با هر داده ای، فقط یک لوزی می توان رسم کرد.	ابتدا دو خط عمود بر هم l و l' را رسم می کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند. به مرکز O شعاع $\frac{a}{2}$ و $\frac{a}{2}$ کمان هایی می زنیم تا این دو خط را به ترتیب در (C و A) و (B و D) قطع کند. ABCD لوزی چهارضلعی مطلوب است.	لوزی با داشتن طول دو قطر a و b
	در این حالت با هر دایره ای فقط یک مربع می توان رسم کرد.	دو خط عمود بر هم l و l' را رسم می کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند. به مرکز O شعاع $\frac{a}{2}$ دایره ای رسم می کنیم تا خطوط را در چهار نقطه قطع کند. ABCD مربع مطلوب است.	مربعی با داشتن طول قطر آن (a)

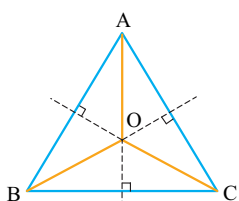
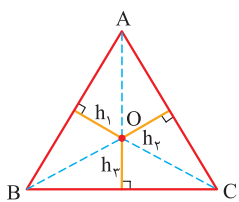
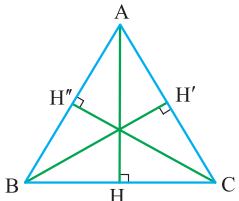
### استدلال

انواع استدلال	تعریف
استقرایی	روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.
استنتاجی	روش نتیجه‌گیری منطقی بر پایه حقایق که درستی آنها را از قبل پذیرفته‌ایم.
مثال نقض	به مثالی که درست بودن یک حکم و ادعای کلی را رد کند، گفته می‌شود.
برهان خلف	استدلالی که به جای این که به طور مستقیم از فرض به حکم برسیم، ابتدا درست بودن حکم را زیر سؤال می‌بریم، (یعنی فرض می‌کنیم که حکم غلط است). سپس به کمک اطلاعات مسئله به تناقض رسیده و به این نتیجه می‌رسیم که حکم درست می‌باشد.

### استدلال استنتاجی

گزاره	هر جمله خبری که دارای ارزش درست یا ارزش نادرست باشد را گزاره می‌نامند.
قضیه	گزاره‌ای که بتوان با منطق و استدلال استنتاجی آن را ثابت کرد، قضیه می‌نامند.
عکس قضیه	اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن چه حاصل می‌شود، عکس قضیه گویند.
قضیه دوشروطی	اگر یک قضیه، خودش و عکس آن برقرار باشد، آن را قضیه دوشروطی می‌نامیم.

### همرسی‌های مثلث

 <p><math>OA = OB = OC</math></p>	<p>در هر مثلث، عمودمنصف‌ها هم‌رس هستند و نقطه هم‌رسی آنها از سه رأس مثلث به یک فاصله است. نقطه هم‌رسی بسته به نوع مثلث می‌تواند داخل، روی محیط و یا خارج مثلث باشد.</p>
 <p><math>h_1 = h_2 = h_3</math></p>	<p>در هر مثلث، نیمسازهای داخلی هم‌رس هستند و نقطه هم‌رسی آنها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. نقطه هم‌رسی همواره داخل مثلث قرار دارد.</p>
	<p>در هر مثلث ارتفاع‌ها هم‌رس هستند. محل هم‌رسی ارتفاع‌ها در مثلث حادالزاویه داخل مثلث، در مثلث قائم‌الزاویه روی رأس قائم و در مثلث منفرجه‌الزاویه بیرون مثلث قرار دارد.</p>



## نامساوی‌های مثلث

شکل	قضیه
	$\hat{C}' > \hat{A}$ $\hat{C}' > \hat{B}$ هر زاویه خارجی مثلث همواره از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.
	$b > c \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$ زاویه رو به ضلع بزرگ‌تر همواره، از زاویه رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. عکس این قضیه نیز برقرار است.
	۱) $a + b > c$ ۲) $a + c > b$ ۳) $b + c > a$ مجموع طول دو ضلع مثلث همواره از ضلع سوم بزرگ‌تر است. (قضیه وجود مثلث)
	در هر مثلث دلخواه، همواره رابطه زیر برقرار است: $\frac{1}{3}P < \text{بزرگ‌ترین ضلع} \leq (\text{محیط}) \leq \frac{1}{2}P < \text{کوچک‌ترین ضلع}$ $c \leq \frac{1}{3}P \leq a < \frac{1}{2}P$ (P محیط مثلث است.)
	اگر M نقطه‌ای دلخواه درون مثلث باشد، مجموع فواصل M از سه رأس مثلث، همواره بین محیط و نصف محیط مثلث می‌باشد. $\frac{P}{2} < MA + MB + MC < P$ (P محیط مثلث است.)



### ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

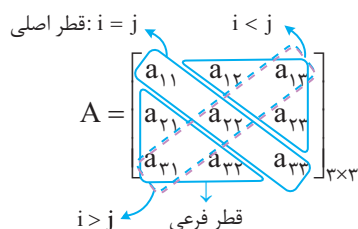
#### تعریف ماتریس

به چیدمان  $m \times n$  درایه، یک ماتریس از مرتبه  $m \times n$  می‌گوییم؛ مثلاً:

ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون	ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون	ماتریس $3 \times 2$ بر حسب $ij$
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ <p>ستون اول سطر دوم</p>	$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ <p>ستون سوم درایه سطر دوم و ستون دوم <math>b_{22} = 7</math></p>	$cij = \begin{cases} i+j & i \geq j \\ i-j & i < j \end{cases}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

#### ماتریس مربعی

اگر در ماتریسی تعداد سطرها و تعداد ستونها برابر باشد، آن را ماتریس مربعی می‌نامیم.



#### ماتریس‌های مربعی خاص

ماتریس صفر	ماتریس قطری	ماتریس اسکالر	ماتریس همانی (واحد)	ماتریس بالا مثلثی	ماتریس پایین مثلثی
$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$	$I_2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$	$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$
همه درایه‌ها برابر صفر می‌باشد. البته ماتریس صفر می‌تواند مربعی نباشد.	همه درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر است.	درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر و تمام درایه‌های قطر اصلی با هم برابرند.	درایه‌های قطر اصلی همگی عدد ۱ و بقیه درایه‌ها صفر می‌باشد.	درایه‌های زیر قطر اصلی همگی صفر است.	درایه‌های بالای قطر اصلی همگی صفر است.

#### تساوی دو ماتریس

دو ماتریس **هم‌مرتبه** را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \quad A = B \Rightarrow \begin{cases} a = x, b = y \\ c = z, d = t \end{cases}$$

#### جمع و تفریق و ضرب ماتریس ها

جمع و تفریق دو ماتریس	ضرب دو ماتریس
$\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+1 & -1+2 \\ 3-1 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 4 \times 0 & 2 & 11 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$
برای جمع و تفریق دو ماتریس <b>هم‌مرتبه</b> ، درایه‌های نظیر به نظیر با هم جمع یا تفریق می‌شوند.	ماتریس اول را به صورت سطری و ماتریس دوم را به صورت ستونی دسته‌بندی می‌کنیم و هر یک از سطرهای ماتریس اول را در ستونهای ماتریس دوم ضرب می‌کنیم.



• شرط لازم برای این که دو ماتریس بتوانند در هم ضرب شوند، برابری تعداد ستون‌های ماتریس اول با سطرهای ماتریس دوم است:

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

### – خواص اعمال جبری روی ماتریس –

ماتریس صفر عضو بی‌اثر در جمع ماتریس‌ها	جمع ماتریس‌ها شرکت پذیر است.	عضو قرینه در جمع ماتریس‌ها	جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.
$A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$	$A + (B + C) = (A + B) + C$	$A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$	$A + B = B + A$
توزیع پذیری عدد در ضرب ماتریس‌ها	ماتریس I عضو بی‌اثر در ضرب ماتریس‌ها	توزیع پذیری عدد روی جمع ماتریس	قابلیت حذف عدد غیر صفر
$r(A \pm B) = rA \pm rB$	$AI = IA = A$	$A \times (B \pm C) = (A \times B) \pm (A \times C)$	$rA = rB \xrightarrow{r \neq 0} A = B$
ضرب ماتریس خاصیت جابه‌جایی ندارد.	عدم نتیجه‌گیری در مورد صفر بودن ماتریس	ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت پذیری دارد.	فاکتورگیری
$AB \neq BA$	$AB = \bar{O} \Leftrightarrow A \neq \bar{O}, B \neq \bar{O}$	$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$	$AB + AC = A(B + C)$ $BC + AC = (B + A)C$

### – توان در ماتریس –

$$A^r = A^r \times A = A \times A^r \text{ و } A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$$

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، داریم:

### چهار ماتریس خاص

ماتریس متناوب	ماتریس پوچ توان	ماتریس خودتوان	ماتریس خودضرب
$A^r = I \Rightarrow \begin{cases} A^{rn} = I \\ A^{rn+1} = A \end{cases}$	$A^r = \bar{O} \Rightarrow A^n = \bar{O}$	$A^r = A \Rightarrow A^n = A$	$A^r = kA \Rightarrow A^n = k^{n-1}A$

تعریف: وقتی می‌گوییم دو ماتریس A و B تعویض پذیرند یعنی:

• ماتریس‌های هم‌مانی با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اش تعویض پذیر است.

• ضرب دو ماتریس قطری تعویض پذیر است.

### – اتحادهای جبری در ماتریس –

اگر دو ماتریس تعویض پذیر باشند، تمام اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است:

$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$	اتحاد مربع دو جمله‌ای
$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$	اتحاد مزدوج
$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	اتحاد مکعب دو جمله‌ای
$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$	اتحاد چاق و لاغر

### – قضیه کیلی - همیلتون –

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I$$

اگر ماتریس A یک ماتریس  $2 \times 2$  باشد، داریم: