آزمون حضوری
شماره چهار

رشته ریاضی

خیلی سبز! آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

ویژه کنکور
۱۴۰۳

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	آمار و گسستهٔ دوازدهم گسسته: صفحه‌های ۱ تا ۸ آمار: صفحه‌های ۱ تا ۱۸	۲	۴	سروش موئینی	محسن فراهانی بردیا نصیری

گزاره: هر جملهٔ خبری که در زمان حاضر درست یا نادرست باشد (حدس‌های ریاضی هم گزاره‌اند).

گزاره‌نما: هر گزاره‌ای که دارای یک یا چند متغیر باشد و با انتخاب مقدار متغیرها درست یا نادرست شود.

دامنه: مجموعهٔ مقادیر مجاز برای متغیر یک گزاره‌نما.

جواب: مجموعهٔ مقادیری از دامنه که با قراردادن آن‌ها به جای متغیر، گزاره‌نما تبدیل به گزارهٔ درست می‌شود.

ارزش: در یک گزاره، ارزش می‌تواند درست (T) یا نادرست (F) باشد.

- در n گزاره، 2^n حالت برای ارزش داریم.

۱ ترکیب گزاره‌ها:

p	q	عطفی $p \wedge q$	فصلی $p \vee q$	شرطی $p \Rightarrow q$	دوشرطی $p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	د

- **عطفی:** وقتی درست است که **هر دو** درست باشند.
- **فصلی:** وقتی درست است که **حداقل** یکی درست باشد.
- **شرطی:** اگر p نادرست باشد درست است (انتفای مقدم). هم‌چنین وقتی p و q هر دو درست باشند هم درست است.
- **دوشرطی:** وقتی درست است که q و p **هم‌ارزش** باشند.

۲ سورها:

عمومی	وجودی	صفر
$\forall x; P(x)$ یعنی به ازای هر x درست است.	$\exists x; P(x)$ یعنی برای مقادیر خاصی از x درست است (xی وجود دارد).	$\nexists x; P(x)$ یعنی هرگز درست نیست.

۳ نقیض یک گزاره:

گزاره	$\sim p \vee q$ یا $p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\exists x; P(x)$	$\forall x; P(x)$
نقیض	$p \wedge \sim q$	$\sim p \Leftrightarrow q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\forall x; \sim P(x)$	$\exists x; \sim P(x)$

۴ خاصیت فاکتورگیری / پخش‌کردن: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$

۵ خاصیت جذب:
۱) $p \vee (p \wedge r) \equiv p$
۲) $p \wedge (p \vee r) \equiv p$

۶ عکس نقیض گزاره: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

استدلال ریاضی

مثال نقض

روش استفاده: با یک مثال نشان دهیم حکم کلی نادرست است.

حکم نادرست	مثال نقض
$2^{2^n}+1$ اول است.	$n=5$ (عدد $2^{32}+1$ به ۶۴۱ می‌خورد.)
هر عدد طبیعی $n>2$ جمع اعداد متوالی است.	اعداد 2^k (مثل $4,8,\dots$)
$A\cup B=A\cup C \Rightarrow B=C$	$\mathbb{Z}\cup W=\mathbb{Z}\cup\mathbb{N} \not\Rightarrow W=\mathbb{N}$
$\forall x\in\mathbb{R}; x^2\geq x$	$x=\frac{1}{2}$
ارتفاع مثلث درون آن است.	مثلث با یک زاویهٔ باز
جمع دو عدد گنگ، گنگ است.	$\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{گنگ}}+\underbrace{(1-\sqrt{2})}_{\text{گنگ}}=1$
ضرب عدد گویا در گنگ، گنگ است.	$0\times\sqrt{3}=0$
عدد 4^n+1 اول است.	$n=3 \Rightarrow 4^3+1=65$
اگر مربع عددی به ۱۲ بخش‌پذیر باشد، خود عدد هم به ۱۲ بخش‌پذیر است.	$12\mid 6^2 \not\Rightarrow 12\mid 6$
اگر $a\mid bc$، آن‌گاه $a\mid b$ یا $a\mid c$.	$10\mid 4\times 5 \not\Rightarrow 10\mid 4$ یا $10\mid 5$

اثبات مستقیم

روش کار: با مدل‌سازی ریاضی، از فرض شروع می‌کنیم و با طی مراحل ریاضی به حکم می‌رسیم.

بیان صورت حکم	عدد طبیعی	عدد زوج	عدد فرد	دو عدد متوالی	دو عدد فرد متوالی	دو عدد زوج متوالی
بیان ریاضی	n	$2k$	$2k+1$	$n, n+1$	$2k+1$ و $2k-1$	$2k$ و $2k+2$

حکم‌های مهم که با استنتاج (اثبات مستقیم) ثابت می‌شوند:

۱) مربع هر عدد فرد از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

۲) جمع سه عدد متوالی مضرب ۳ است.

۳) جمع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ است.

۴) اگر k ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد $4k+1$ مربع کامل است.

بررسی تمام حالات

روش کار: در مسائلی که حالت‌های محدودی داریم، مثلاً زوج یا فرد یا مثلاً باقی‌مانده بر ۳ که می‌تواند ۰ یا ۱ یا ۲ باشد، تمامی حالت‌ها را بررسی می‌کنیم.

حکم‌های مهمی که با این روش اثبات می‌شوند:

۱) اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر ۴، یا صفر یا ۳ است.

۲) مربع هر عدد یا مضرب ۹ است یا به صورت $3q+1$ (هیچ مربع کاملی $3q+2$ نیست).

۳) هر عدد اول $p>5$ به صورت $6k\pm1$ است.

۴) اگر ab فرد باشد، $a+b$ زوج است.

برهان خلف

شیوهٔ اثبات، استفاده از هم‌ارزی $(p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p)$

مراحل استدلال: فرض می‌کنیم حکم درست نیست و نشان می‌دهیم که با این فرض به تناقض می‌رسیم، پس خود حکم باید درست باشد. این روش اثبات غیرمستقیم است.

احکامی که با برهان خلف ثابت می‌شوند:

۱) $\sqrt{۲}$ گنگ است.

۲) اگر β و α گنگ و $\alpha + ۲\beta$ گویا باشد، $\alpha - \beta$ گنگ است.

۳) اگر x گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ هم گنگ است.

۴) اگر $n^۲$ مضرب ۳ باشد n هم مضرب ۳ است.

۵) اگر اعداد $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ عددهای صحیحی باشند و $y_۱$ و $y_۲$ همان اعداد، ولی به ترتیب دیگری باشند، آن‌گاه $(x_۱ - y_۱)(x_۲ - y_۲)(x_۳ - y_۳)$ حتماً زوج است.

۶) جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، گنگ است.

۷) اگر عدد مثبت x گنگ باشد، $\sqrt{x}$ هم گنگ است.

اثبات بازگشتی

روش اثبات: از خود حکم شروع می‌کنیم و با طی مراحل ریاضی برگشت‌پذیر، به رابطه‌ای می‌رسیم. اگر این رابطه همواره درست باشد، خود حکم هم درست است. اگر این رابطه درست نباشد، خود حکم هم درست نیست.

احکامی که بازگشتی اثبات می‌شوند:

۱) $a, b > ۰ \Rightarrow \frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$

۲) $ab > ۰ \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$

۳) $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz$

۴) $\frac{x}{۱+x^۲} \leq \frac{۱}{۲}$

۵) رابطهٔ $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ برای دو عدد مثبت y و x همواره درست نیست.