آزمون حضوری
شماره چهار

رشته تجربی

خیلی سبز!
آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

ویژه کنکور
۱۴۰۳

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضی	ریاضی (۳) صفحهٔ ۱ تا ۱۰ ریاضی (۲) صفحهٔ ۱۱ تا ۱۸، ۴۷ تا ۵۶ و ۶۵ تا ۷۰ ریاضی (۱) صفحهٔ ۶۹ تا ۸۲ و ۹۴ تا ۱۱۷	۲	۲۴	علی شهرابی	مهدی خوشنویس

معادله و تابع درجه‌دو

معادلهٔ درجه‌دو

۱ محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲ تعداد ریشه‌ها:

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
ریشهٔ حقیقی ندارد.	یک ریشهٔ مضاعف	۲ ریشهٔ حقیقی متمایز

$$x_{\text{مضاعف}}=\frac{-b}{2a}$$

۳ اگر عبارت درجه‌دومی مربع کامل باشد، دلتایش صفر است.

۴ دو حالت خاص و پرکاربرد:

رابطهٔ بین ضرایب	ریشه‌ها	مثال
$a+b+c=0$	$1,\frac{c}{a}$	$3x^2-8x+5=0 \Rightarrow \begin{cases}x_1=1\\x_2=\frac{5}{3}\end{cases}$
$a+c=b$	$-1,\frac{-c}{a}$	$5x^2-7x-12=0 \Rightarrow \begin{cases}x_1=-1\\x_2=\frac{12}{5}\end{cases}$

۵ با شرط $\Delta>0$، داریم:

جمع ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	اختلاف ریشه‌ها	مجموع مربع ریشه‌ها	مجموع مکعب ریشه‌ها
$S=\frac{-b}{a}$	$P=\frac{c}{a}$	$M=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$x_1^2+x_2^2=S^2-2P$	$x_1^3+x_2^3=S^3-3SP$

۶ اگر حاصل عباراتی مثل $\sqrt{x_1}\pm\sqrt{x_2}$ را خواستید حساب کنید، آن را مساوی A قرار دهید و طرفین را به توان ۲ برسانید.

۷ معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل‌ضرب آن‌ها P باشد، به صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

۸ بحث روی علامت ریشه‌ها: مثلاً وقتی قرار است معادله، دو ریشهٔ منفی داشته باشد، باید سه نامعادلهٔ $\Delta>0$، $S<0$ و $P>0$ را حل کنیم و بین جواب‌هایشان اشتراک بگیریم.

		Δ	S	P
۱	دو ریشهٔ مثبت	+	+	+
۲	دو ریشهٔ منفی	+	−	+
۳	دو ریشهٔ ناهم‌علامت	+		$P\le 0$
۴	دو ریشهٔ قرینه	+	صفر	−
۵	دو ریشهٔ معکوس	+		۱

۹ اگر $P<0$ باشد (یا a و c هم‌علامت نباشند)، حتماً $\Delta>0$ است و نیازی به چک‌کردن شرط $\Delta>0$ نیست.

۱۰ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ (با شرط $a\neq 0$) با تغییر متغیر $x^2=t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۴	دو ریشهٔ مثبت	$\Delta>0, S>0, P>0$
۳	یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر	$c=0, \frac{-b}{a}>0$
۲	حالت ۱: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P<0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta=0, \frac{-b}{a}>0$
۱	یک ریشهٔ صفر	$b=c=0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta>0, S<0, P>0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta=0, \frac{-b}{a}<0$
	حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta<0$

۱۱ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ یا هر معادله‌ای که همهٔ توان‌های x در آن زوج باشد، صفر است؛ مثلاً در معادله‌های $2x^4-7x^2+1=0$ و $x^8-4x^6+2x^2=0$، مجموع ریشه‌ها صفر است. زیرا اگر $x=a$ جواب معادله باشد، $x=(-a)$ هم جواب است؛ چون توان‌های زوج اعداد قرینه با هم برابر و جمع این اعداد با هم صفر است.

تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۲	حالت ۱: دو ریشهٔ مثبت	$\Delta>0, S>0, P>0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر	$c=0, \frac{-b}{a}>0$
۱	حالت ۱: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P<0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta=0, \frac{-b}{a}>0$
	حالت ۳: یک ریشهٔ صفر	$b=c=0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta>0, S<0, P>0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta=0, \frac{-b}{a}<0$
	حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta<0$

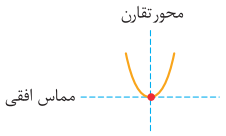
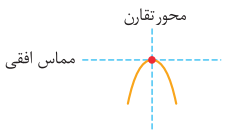
۱۲ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$ (با شرط $a\neq 0$) با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۲	دو ریشهٔ مثبت	$\Delta>0, S>0, P>0$
۱	حالت ۱: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P<0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta=0, \frac{-b}{a}>0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta>0, S<0, P>0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta=0, \frac{-b}{a}<0$

۱۳ برای حل معادلهٔ درجه‌سوم، اول یک ریشه را از بین اعداد ± 1 و ± 2 حدس می‌زنیم (مثلاً $x=a$ شد)، بعد عبارت درجه‌سوم را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم و معادلهٔ درجه‌سوم اولیه را به شکل $(x-a)(\text{درجه } 2)=0$ درمی‌آوریم که حلش را بلدیم.

– تابع درجه‌دو (سهمی) –

۱ با توجه به علامت a، سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ دوتا شکل می‌تواند داشته باشد:

	قیافه	طول رأس	عرض رأس	محور تقارن	مماس افقی	مقدار min یا max	برد
$a>0$		$\frac{-b}{2a}$	$\frac{-\Delta}{4a}$ یا $f(\frac{-b}{2a})$	$x=\frac{-b}{2a}$	$y=\frac{-\Delta}{4a}$	$\min=\frac{-\Delta}{4a}$	$[\frac{-\Delta}{4a},+\infty)$
$a<0$						$\max=\frac{-\Delta}{4a}$	$(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$

۲ تنها نقطه‌ای از سهمی که با حذف آن برد تغییر می‌کند، رأس سهمی است.

۳ اگر دو نقطه با yهای یکسان در سهمی داشته باشیم، میانگین xهایشان، x رأس را می‌دهد. از این جمله می‌توانیم نتیجه بگیریم میانگین ریشه‌های سهمی، x رأس است.

۴ اگر $ax+by=c$ باشد $(ab>0)$، زمانی xy ماکزیمم است که ax و by هر دو برابر با $\frac{c}{2}$ باشند؛ مثلاً اگر $3x+2y=12$ باشد و ماکزیمم xy را بخواهیم، باید $3x=6$ و $2y=6$ باشد (که $x=2$ و $y=3$ و در نتیجه $xy=6$ را نتیجه می‌دهد).

۵ منظور از صفرهای تابع $f(x)$، «طول نقاط برخورد تابع f با محور xها» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$» است.

۶ نوشتن سریع معادلهٔ سهمی:

	چیزهایی که داریم	ضابطهٔ سهمی	نکتهٔ تکمیلی
۱	x_1 و x_2 صفرهای سهمی‌اند.	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲	نقطهٔ (x_S, y_S) رأس سهمی است.	$y=a(x-x_S)^2+y_S$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳	سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله ـ سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.	اگر نقطه‌ای به مختصات $(0,c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.

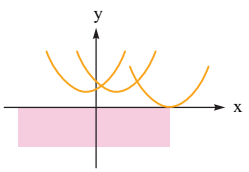
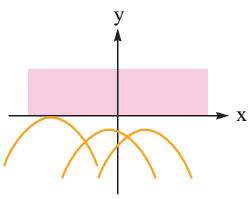
۷ اگر سهمی در نقطهٔ $(\alpha,0)$ بر محور xها مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید: $y=a(x-\alpha)^2$

۸ علامت ضرایب a، b و c:

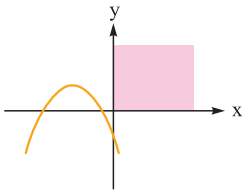
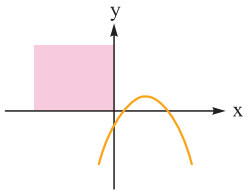
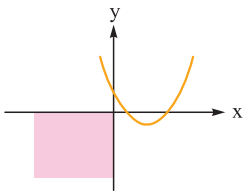
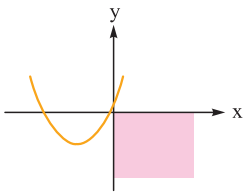
علامت a	علامت b	علامت c
دهانهٔ سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور yها	عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها

۹ سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات:

حالت ۱: سهمی فقط از ۲ ناحیه عبور کند:

		شکل	شرایط	
			a	Δ
۱	سهمی فقط از ناحیهٔ ۱ و ۲ عبور کند.		+	$\Delta \le 0$
۲	سهمی فقط از ناحیهٔ ۳ و ۴ عبور کند.		−	$\Delta \le 0$

حالت ۲: سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند):

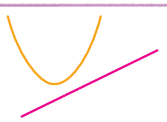
		شکل	شرایط			
			a	b	c	Δ
۱	فقط از ناحیهٔ ۱ نگذرد.		−	−	−	+
۲	فقط از ناحیهٔ ۲ نگذرد.		−	+	−	+
۳	فقط از ناحیهٔ ۳ نگذرد.		+	−	+	+
۴	فقط از ناحیهٔ ۴ نگذرد.		+	+	+	+

c می‌تواند صفر هم باشد.

حالت ۳: سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند $\xleftarrow{\text{فقط کافیه که}}$ $P<0$

شرط آن‌که سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند آن است که سهمی دو ریشهٔ هم‌علامت داشته باشد: $\Delta>0$ و $P\geq 0$

وضعیت خط و سهمی نسبت به هم: معادلهٔ $\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{سهمی}}=\underbrace{mx+h}_{\text{خط}}$ را تشکیل می‌دهیم. بعد آن را به صورت $ax^2+b'x+c'=0$ درمی‌آوریم. دلتای این معادله، وضعیت خط و سهمی را مشخص می‌کند.

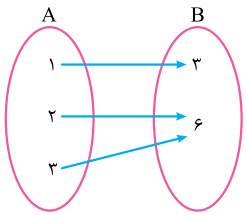
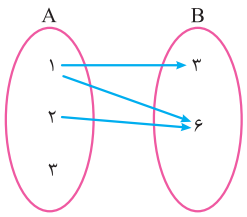
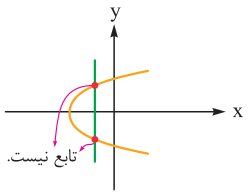
علامت Δ	وضعیت خط و سهمی	شکل
$\Delta>0$	سهمی و خط در ۲ نقطه متقاطع‌اند.	
$\Delta=0$	خط در یک نقطه بر سهمی مماس است.	
$\Delta<0$	سهمی و خط، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.	

تابع

مقدمات (تعریف تابع، دامنه و تساوی توابع)

۱ تابع دستگاهی است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد.

۲ روش‌های نمایش تابع:

	روش نمایش	شرط تابع‌بودن	مثال
۱	پیکانی	از هر عضو مجموعهٔ مبدأ، باید دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.	 تابع است.  تابع نیست.
۲	زوج مرتبی	مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها نباید برابر باشد. اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد.	تابع است. $\rightarrow \{(۱,۲),(۲,۳),(-۱,۳)\}$ تابع نیست. $\rightarrow \{(۱,۲),(۳,۵),(۱,۶)\}$
۳	جدولی	مؤلفه‌های سطر مربوط به xها نباید یکسان باشد. اگر مؤلفه‌های x یکسان داشتیم، مؤلفه‌های y شان هم باید یکسان باشد.	$\begin{array}{c\|cccc} x & ۲ & ۳ & ۵ & ۳ \\ \hline y & -۱ & ۷ & ۴ & ۲ \end{array}$ تابع نیست.
۴	نموداری	اگر خطی موازی محور yها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار مربوط به یک تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، تابع است.	
۵	توصیفی	با توجه به جملهٔ توصیفی، اگر به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی داشته باشیم، آن رابطه تابع است.	رابطه‌ای که به هر فرد، کد ملی‌اش را نسبت می‌دهد. { ورودی: انسان‌ها، خروجی: کد ملی } چون هر شخص نمی‌تواند بیش از یک کد ملی داشته باشد، پس تابع است.
۶	ضابطه‌ای	اگر به ازای هر x، فقط یک خروجی داشته باشیم، تابع است. روابطی که در آن‌ها y تنها می‌شود، حتماً تابع هستند؛ مثل $\underset{\text{تنها}}{y} = \log_۲ x + \cos\frac{۱}{x}$	در رابطهٔ $y^۲ = x + ۱$، اگر $x = ۱$ را بدهیم، ۲تا خروجی می‌دهد: $y^۲ = ۲ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲} \rightarrow$ تابع نیست.

۳ تعداد توابع:

تعداد کل توابع از مجموعهٔ nعضوی به مجموعهٔ mعضوی	m^n
تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ nعضوی به مجموعهٔ mعضوی $(m \geq n)$	$P(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}$

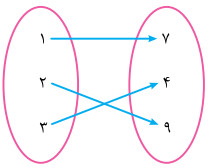
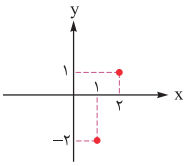
۴ **سؤالات تابع‌نویسی:** از ما می‌خواهد عبارتی (مثل محیط، مساحت و ...) را برحسب یک متغیر (مثل ضلع، شعاع و ...) بنویسیم.

مثال **تابع مساحت مربع برحسب محیط آن؟**

پاسخ می‌دانیم $P=۴a$ و $S=a^۲$ است. از $P=۴a$ نتیجه می‌گیریم $a=\frac{P}{۴}$. حالا این تساوی را در رابطهٔ مساحت قرار می‌دهیم:

$$S=a^۲ \xrightarrow{a=\frac{P}{۴}} S=(\frac{P}{۴})^۲ \Rightarrow S=\frac{P^۲}{۱۶} \xrightarrow{\text{به شکل تابع}} S(P)=\frac{P^۲}{۱۶}$$

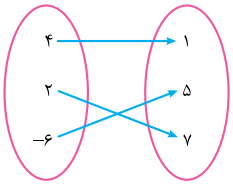
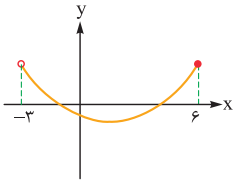
۵ **مقدار تابع در یک نقطه:**

روش نمایش تابع	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی	ضابطه‌ای
مثال		$f=\{(۱,۲),(۲,۶)\}$	x: ۱ ۲ ۳ y: −۳ ۶ ۲		f تابعی است که به هر عددی، مکعبش را نسبت می‌دهد.	$f(x)=\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۲x+۵}}$
مقدار تابع در $x=۲$	$f(۲)=۹$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۱$	$f(۲)=۲^۳=۸$	$f(۲)=\frac{۵}{۳}$

۶ نقاط برخورد مهم:

نقطهٔ برخورد تابع f با ...	راه حل	مختصات نقطه (نقاط)
محور xها	«y را صفر می‌دهیم» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$»	$(\ ,۰)$ ← جواب‌های $f(x)=۰$
محور yها	«x را صفر می‌دهیم» یا «مقدار $f(۰)$»	$(۰,f(۰))$
تابع g	حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ ← جواب‌ها ← $x_۱,\ldots$	$(x_۱,f(x_۱)),\ldots$
نیمساز ربع اول و سوم	حل معادلهٔ $f(x)=x$ ← جواب‌ها ← $x_۱,\ldots$	$(x_۱,x_۱),\ldots$
نیمساز ربع دوم و چهارم	حل معادلهٔ $f(x)=-x$ ← جواب‌ها ← $x_۱,\ldots$	$(x_۱,-x_۱),\ldots$

۷ محاسبهٔ دامنه در نمایش مختلف یک تابع (به‌جز نمایش ضابطه‌ای):

	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی
روش محاسبهٔ دامنه	همهٔ اعدادی که از آن‌ها فلش خارج شده	همهٔ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها	همهٔ اعداد سطر مربوط به x	تصویر نمودار روی محور xها	ورودی‌ها!
مثال		$f=\{(۵,۲),(۱,۳)\}$	$\begin{array}{c\|ccc} x & ۱ & -۴ & ۶ \\ \hline y & ۶ & ۵ & ۹ \end{array}$		تابعی که به هر عدد مربع کامل دورقمی، جذرش را نسبت می‌دهد.
دامنه	$D=\{۴,۲,-۶\}$	$D_f=\{۵,۱\}$	$D=\{۱,-۴,۶\}$	$D=(-۳,۶]$	دامنه $=\{۱۶,۲۵,\ldots,۸۱\}$

۸ محاسبهٔ دامنه در نمایش ضابطه‌ای:

اسم تابع	ضابطه	دامنه
چندجمله‌ای	$f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\cdots$	$\mathbb{R}$
کسری	$f(x)=\frac{A}{B}$	$\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$
رادیکال با فرجهٔ زوج	$f(x)=\sqrt[۲n]{A}$	جواب نامعادلهٔ $A\geq ۰$
رادیکال با فرجهٔ فرد	$f(x)=\sqrt[۲x+۱]{A}$	همان دامنهٔ A
لگاریتم	$f(x)=\log_B A$	$(A>۰)\cap(B>۰)\cap(B\neq ۱)$
سینوس و کسینوس	$\sin A$ یا $\cos A$	همان دامنهٔ A
تانژانت	$\tan A$	$A\neq(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$
کتانژانت	$\cot A$	$A\neq k\pi$

۹ دو نکته در مورد دامنهٔ توابع کسری و رادیکالی:

الف) اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\text{چندجمله‌ای}}{ax^۲+bx+c}$ به صورت $\mathbb{R}-\{k\}$ باشد، «$\Delta_{\text{مخرج}}=۰$» و «$k=\frac{-b}{۲a}$» است.

ب) برای دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$، چند حالت می‌توانیم داشته باشیم:

	شرط	دامنه
عبارت زیر رادیکال درجه ۲ است.	$a>0,\Delta\le 0$	$\mathbb{R}$
	$a>0,\Delta>0$	$\mathbb{R}-(x_1,x_2)$
	$a<0,\Delta<0$	$\varnothing$
	$a<0,\Delta=0$	$\{k\}$
	$a<0,\Delta>0$	$[x_1,x_2]$
عبارت زیر رادیکال درجه‌یک است.	$x_1=\frac{-c}{b},b>0,a=0$	$[x_1,+\infty)$
	$x_1=\frac{-c}{b},b<0,a=0$	$(-\infty,x_1]$

۱۰ شروط تساوی دو تابع f و g:

۱	$D_f=D_g$ (دامنه‌ها قبل از ساده‌کردن تابع باید محاسبه شوند.)
۲	ضابطه‌های دو تابع را بتوانیم با کارهای جبری و ... مثل هم کنیم.

۱۱ نکات مهم در تساوی توابع:

۱	دامنهٔ تابع به فرم $y=\sqrt{AB}$ از حل نامعادلهٔ $AB\ge 0$ و دامنهٔ تابع به فرم $y=\sqrt{A}\times\sqrt{B}$ از اشتراک جواب نامعادله‌های $A\ge 0$ و $B\ge 0$ به دست می‌آید.
۲	توابع $y=A$ و $y=\frac{AB}{B}$ به شرطی با هم برابرند که B ریشه‌ای نداشته باشد.
۳	توابع $f(x)=\begin{cases}\frac{AB}{B} & B\neq 0\\ C & B=0\end{cases}$ و $g(x)=\cdots$ به شرطی برابرند که $\left\{\begin{array}{l}\text{اولاً: } g(x)=A\\ \text{ثانیاً: مقدار } g(x) \text{ به ازای ریشهٔ } B=0\text{، برابر با } C \text{ شود.}\end{array}\right.$
۴	$\log x^2=2\log\lvert x\rvert$ و $\log x^3=3\log x$

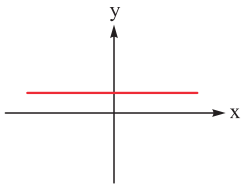
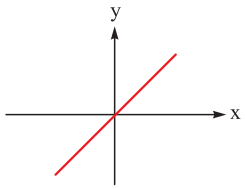
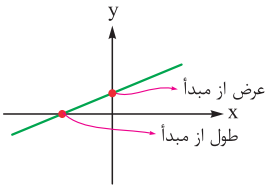
۱۲ نمایش ضابطه‌ای یک تابع:

نمایش ضابطه‌ای (به شکل کامل)	جزئیات
$\begin{cases}f:A\to B\\ f(x)=\cdots\end{cases}$	A: دامنه
	B: هم‌دامنه (هم‌دامنه $\supseteq$ برد)

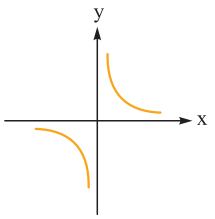
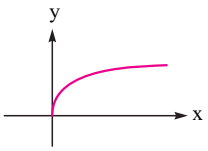
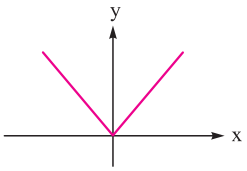
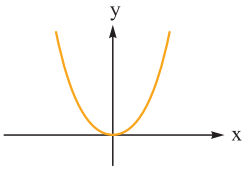
۱۳ **معادلات و توابع**: اگر در رابطه‌ای برحسب x و y، xای پیدا کنیم که به ازای آن بیش از یک مقدار برای y پیدا شود، آن رابطه تابع نیست؛ مثلاً در رابطهٔ $y^3-y=x$ به ازای $x=0$، سه خروجی $y=0$، $y=1$ و $y=-1$ داریم، پس تابع نیست.

انواع تابع

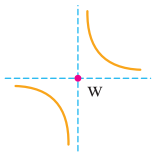
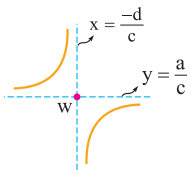
۱ چند تابع خاص

تابع	ضابطه	نکته	نمودار
ثابت	$f(x) = \underset{\text{عدد}}{c}$	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج مرتب‌ها با هم برابر است. در نمایش ضابطه‌ای، ضرایب جملات شامل x باید صفر باشد.	یک خط افقی 
همانی	$f(x) = x$	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. در نمایش ضابطه‌ای، ضریب x، یک و ضریب سایر جملات صفر است.	نیمساز ربع اول و سوم 
خطی	$f(x) = mx + h$	محل برخورد با محور yها $\underset{\text{عرض از مبدأ}}{h} \rightarrow$ $\underset{\text{شیب}}{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	

۲ چند تابع معروف با نمودارشان:

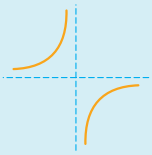
ضابطه	$y = \frac{1}{x}$	$y = \sqrt{x}$	$y = \lvert x \rvert$	$y = x^2$
نمودار				
دامنه	$\mathbb{R} - \{0\}$	$[0, +\infty)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
برد	$\mathbb{R} - \{0\}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$

۳ نکات مهم تابع هموگرافیک با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$:

شرط هموگرافیک‌بودن	$ad-bc\neq 0, c\neq 0$
دامنه	$\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$
برد	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$
معادلهٔ خط‌چین عمودی	$x=\frac{-d}{c}$
معادلهٔ خط‌چین افقی	$y=\frac{a}{c}$
ضابطهٔ وارون	$\frac{-dx+b}{cx-a}$
شرط برابری f و f^{-1}	$a+d=0$
مرکز تقارن	$w=(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$
محورهای تقارن	دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از نقطهٔ w
شکل تابع	 $ad-bc<0$  $ad-bc>0$

نکته

برای رسم تابع هموگرافیک، می‌توان بعد از رسم خط‌چین‌های افقی و عمودی با مشخص‌کردن مختصات یک نقطه شکل آن را رسم کرد.

یا است یا  .

۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=a\sqrt{bx+c}+d$ به یکی از چهار شکل زیر است:

	علامت a	علامت b	شکل نمودار	مختصات نقطهٔ شروع (S)
۱	+	+		$(\frac{-c}{b}, d)$ ریشهٔ داخل رادیکال، عدد بیرونی
۲	+	−		
۳	−	+		
۴	−	−		

تبدیل نمودار توابع

۵ انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض:

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.
قرینه‌یابی	نسبت به محور xها	$-f(x)$	کل ضابطه را قرینه می‌کنیم.
	نسبت به محور yها	$f(-x)$	جای xها، $-x$ می‌گذاریم.
	نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
	نسبت به خط $x=k$	$f(2k-x)$	جای xها، $2k-x$ می‌گذاریم.
	نسبت به خط $y=k$	$2k-f(x)$	
انبساط و انقباض افقی	انبساط با ضریب ۲	$f(\frac{x}{2})$	جای xها، $\frac{x}{2}$ می‌گذاریم.
	انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$	$f(2x)$	جای xها، $2x$ می‌گذاریم.
انبساط و انقباض عمودی	انبساط با ضریب ۲	$2f(x)$	کل ضابطه ضربدر ۲ می‌شود.
	انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}f(x)$	کل ضابطه ضربدر $\frac{1}{2}$ می‌شود.

۶ برای تبدیل $y=f(x)$ به $y=\underset{\text{سوم}}{a}f(\underset{\text{دوم}}{b}x+\underset{\text{اول}}{c})+\underset{\text{چهارم}}{d}$، ترتیب مراحل این‌گونه است:

$c \to b \to a \to d$

۷ محاسبهٔ دامنه و برد تابع $y = af(bx+c)+d$ از روی دامنه و برد تابع $y = f(x)$:

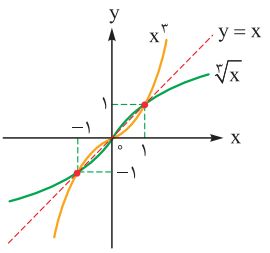
	بی‌اثرها	مراحل محاسبهٔ دامنه یا برد جدید
دامنهٔ جدید	a, d	۱) دو سر بازهٔ دامنه را c واحد به چپ (یا راست) می‌بریم. ۲) دو سر بازه را در $\frac{1}{b}$ ضرب می‌کنیم.
برد جدید	b, c	۱) دو سر بازهٔ برد را در a ضرب می‌کنیم. ۲) پس دو سر بازه را به علاوهٔ d می‌کنیم.

– تابع چندجمله‌ای و تابع درجه۳ –

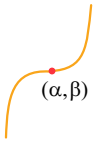
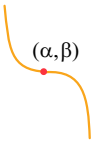
۱ توابع چندجمله‌ای:

				مثال
ضابطه	$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-1} + \cdots$			$f(x) = 2x^5 - 8x^4 + x - 7$
درجه	بزرگ‌ترین توان x، درجهٔ تابع چندجمله‌ای است.			درجهٔ تابع بالایی، ۵ است.
توابع معروف	$y = \overset{c\neq 0}{c}$ درجه‌صفر (ثابت)	$y = ax + b$ درجه‌یک (خطی)	$y = ax^2 + bx + c$ درجه‌دو (سهمی)	
نکات	۱) دامنه‌شان $\mathbb{R}$ است.			$f(x) = x^8 - 2x^3 + 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
	۲) اگر درجه فرد باشد، بردش هم $\mathbb{R}$ است.			$f(x) = x^7 - 3x^6 + 2x^2 - 1 \Rightarrow R_f = \mathbb{R}$
	۳) اگر درجه زوج باشد، بردش به صورت $[k, +\infty)$ یا $(-\infty, k]$ است.			$f(x) = x^2 - 6x + 1$
	۴) برای تابع $y = 0$، درجه تعریف نمی‌شود.			

۲ مقایسهٔ تابع لر و سهمی:

ضابطه	نمودار	دامنه و برد
$f(x) = x^3$		$D_f = R_f = \mathbb{R}$
$g(x) = x^2$		$D_g = \mathbb{R}$ $R_g = [0, +\infty)$

۳ نمودار تابع درجه‌سوم $y = a(x-\alpha)^3 + \beta$:

علامت a	$a > 0$	$a < 0$
یکنوایی	اکیداً صعودی	اکیداً نزولی
مرکز تقارن	(α,β)	(α,β)
نمودار		

۴ برای ساده‌کردن ضابطهٔ توابع درجه۳، باید اتحاد مکعب را بلد باشیم:

صورت کلی اتحاد مکعب	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
مثال‌هایی که در این قسمت زیاد به کار می‌آیند.	$(x \pm 1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1$
	$(x \pm 2)^3 = x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8$
	$(2x \pm 1)^3 = 8x^3 \pm 12x^2 + 6x \pm 1$

اعمال جبری روی توابع

۱ چهار عمل اصلی روی توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

اسم عمل	نماد	تعریف ریاضی	دامنه
جمع دو تابع	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_f \cap D_g$
تفریق دو تابع	$f-g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_f \cap D_g$
ضرب دو تابع	fg	$(fg)(x) = f(x).g(x)$	$D_f \cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

۲ اعمال جبری در نمایش زوج مرتبی با یک مثال:

مثال فرض کنید $f=\{(۱,۴),(۲,۷),(۳,۱۰)\}$ و $g=\{(۲,-۱),(۳,۶),(۴,۱)\}$ باشد و ما $f+۲g$ را بخواهیم.

مرحلهٔ ۱	اشتراک دامنه‌های f و g را می‌نویسیم: $D_{f+۲g}=\{۲,۳\}$
مرحلهٔ ۲	مقدار $f+۲g$ را به ازای xهای دامنه به دست می‌آوریم: $x=۲: f(۲)+۲g(۲)=۷+۲(-۱)=۵ \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (۲,۵)$ $x=۳: f(۳)+۲g(۳)=۱۰+۲(۶)=۲۲ \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (۳,۲۲)$
مرحلهٔ ۳	$f+۲g=\{(۲,۵),(۳,۲۲)\}$

۳ محاسبهٔ برد توابع $f\begin{smallmatrix}+\\ \times\\ \div\end{smallmatrix}g$:

مرحلهٔ ۱	ابتدا دامنهٔ تابع $f\begin{smallmatrix}+\\ \times\\ \div\end{smallmatrix}g$ را حساب می‌کنیم.
مرحلهٔ ۲	ضابطهٔ $f\begin{smallmatrix}+\\ \times\\ \div\end{smallmatrix}g$ را تشکیل می‌دهیم.
مرحلهٔ ۳	برد تابع $f\begin{smallmatrix}+\\ \times\\ \div\end{smallmatrix}g$ را در دامنه‌اش به دست می‌آوریم.

یکنوایی

۱ انواع یکنوایی:

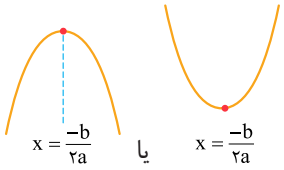
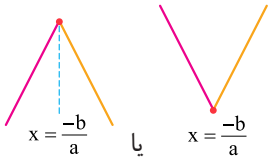
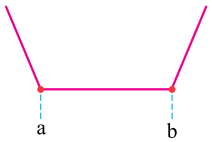
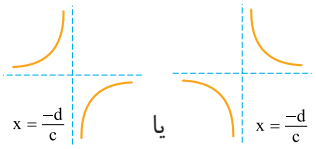
	نوع یکنوایی	وضعیت نمودار	مثال نموداری	تعریف ریاضی
یکنوا اکید	صعودی اکید	فقط رو به بالا می‌رود.		$a>b \Leftrightarrow f(a)>f(b)$
	نزولی اکید	فقط رو به پایین می‌رود.		$a>b \Leftrightarrow f(a)<f(b)$
یکنوا	صعودی	یا رو به بالا می‌رود یا ثابت است.		$a>b \Rightarrow f(a)\geq f(b)$
	نزولی	یا رو به پایین می‌رود یا ثابت است.		$a>b \Rightarrow f(a)\leq f(b)$
ثابت	هم صعودی هم نزولی	روی یک خط افقی است.		$\forall a,b\in D_f \Rightarrow f(a)=f(b)$
غیریکنوا	قسمتی رو به بالا و قسمتی رو به پایین			

۲ تابعی که هم صعودی باشد هم نزولی، تابع ثابت است.

۳ معروف‌ترین توابع یکنوا:

اسم تابع	ضابطه	شرط اکیداً صعودی‌بودن	شرط اکیداً نزولی‌بودن
خطی	$y=mx+h$	$m>0$	$m<0$
درجه۳	$y=a(x+\alpha)^3+\beta$	$a>0$	$a<0$
رادیکالی	$y=\sqrt{ax+b}+c$	$a>0$	$a<0$
نمایی	$y=a^x$	$a>1$	$0<a<1$
لگاریتمی	$y=\log_a x$	$a>1$	$0<a<1$
آبشاری	$y=\lvert x-a\rvert-\lvert x-b\rvert$	$b\geq a$ (صعودی)	$a\geq b$ (نزولی)

۴ بازه‌های یکنوای توابع غیریکنوایی معروف:

تابع	ضابطه	نمودار	نقطهٔ مرزی بازه‌های یکنوایی	بازه‌های یکنوایی
سهمی	$y = ax^2 + bx + c$		رأس	$(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ یا $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$
قدرمطلقی‌خطی	$y = \pm\lvert ax + b\rvert$		ریشهٔ داخل قدرمطلق	$(-\infty, \frac{-b}{a}]$ یا $[\frac{-b}{a}, +\infty)$
گلدانی	$y = \lvert x - a\rvert + \lvert x - b\rvert$		ریشه‌های داخل قدرمطلق	اکید: $(-\infty, a]$ یا $[b, +\infty)$ غیراکید: $(-\infty, b]$ یا $[a, +\infty)$
هموگرافیک	$y = \frac{ax + b}{cx + d}$		ریشهٔ مخرج	$(-\infty, \frac{-d}{c})$ یا $(\frac{-d}{c}, +\infty)$

۵ برای بررسی یکنوایی تابع $f(x)=ax+b+|a'x+b'|$، اول آن را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} mx+h & x\le \frac{-b'}{a'} \\ m'x+h' & x\ge \frac{-b'}{a} \end{cases}$$

حالا داریم:

علامت شیب ضابطه‌ها		نمودار	وضعیت یکنوایی	نتیجه
$m'>0$	$m>0$		اکیداً صعودی	شرط اکیداً یکنوایی: $mm'>0$
$m'<0$	$m<0$		اکیداً نزولی	
$m'<0$	$m>0$		غیریکنوا	شرط غیریکنوایی: $mm'<0$
$m'>0$	$m<0$		غیریکنوا	
$m'>0$	$m=0$		صعودی	شرط یکنوایی: $mm'\ge 0$
$m'=0$	$m>0$		صعودی	
$m'<0$	$m=0$		نزولی	
$m'=0$	$m<0$		نزولی	

۶ اگر f تابعی اکیداً یکنوا باشد، برای حل نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$ دو حالت پیش می‌آید:

f اکیداً صعودی	در نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$، با حذف fها، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند: $a>b$
f اکیداً نزولی	در نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$، با حذف fها، جهت نامساوی تغییر می‌کند: $a<b$

۷ **یکنوایی و اعمال جبری:**

f	g	f + g	f − g	fg
ص	ص	ص		
ص	ن		ص	
ن	ص		ن	
ن	ن	ن		

تذکر خانه‌هایی که خالی هستند، هر سه حالت (صعودی، نزولی و غیریکنوا) می‌تواند برایشان رخ دهد.

۸ **تعیین وضعیت یکنوایی fog**: اگر صعودی‌بودن را + و نزولی‌بودن را − در نظر بگیریم، برای تعیین وضعیت یکنوایی fog، علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم؛ مثلاً اگر f صعودی و g نزولی باشد، آن‌گاه:

$\underset{+}{f}\,\underset{-}{g} \Rightarrow$ مثبت در منفی می‌شود منفی $\xrightarrow{\text{پس}}$ fog نزولی است.

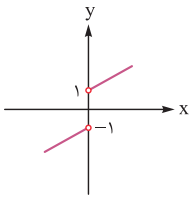
f	g	fog
صعودی	صعودی	صعودی
صعودی	نزولی	نزولی
نزولی	صعودی	نزولی
نزولی	نزولی	صعودی

۹ اگر $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی (نزولی) باشد، آن‌گاه:

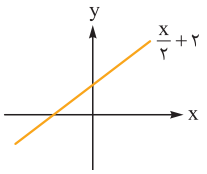
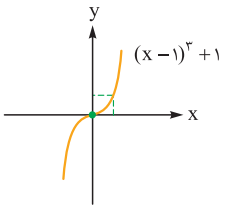
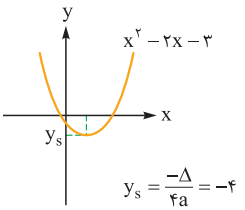
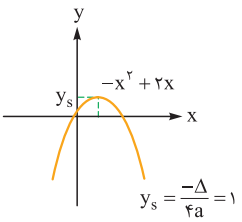
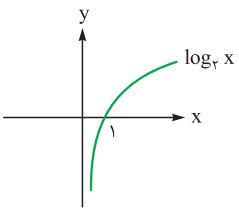
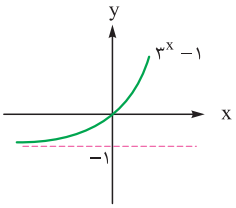
- $f(-x)$ و $-f(x)$، اکیداً نزولی‌اند (صعودی‌اند).
- تابع $\frac{1}{f(x)}$ به شرطی که برد f تغییر علامت ندهد، اکیداً نزولی (صعودی) است، ولی اگر f تغییر علامت بدهد، تابع $\frac{1}{f}$ غیریکنوا می‌شود.

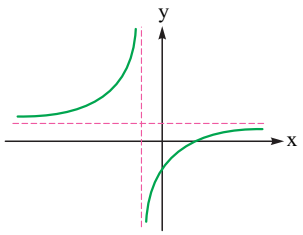
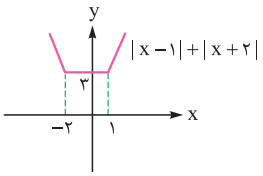
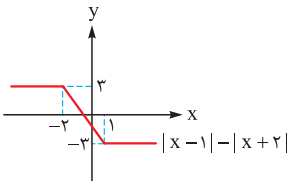
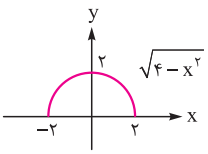
برد

۱ روش‌های محاسبهٔ برد:

روش	توضیح	مثال
رسم نمودار	اگر نمودار تابع را بلد باشیم، بهترین روش است.	$f(x)=x+\frac{\lvert x\rvert}{x}=\begin{cases}x+1 & x>0\\ x-1 & x<0\end{cases} \xrightarrow{\text{نمودار}}$  $\xrightarrow{\text{برد}} \mathbb{R}-[-1,1]$
ساختن y به کمک نامساوی‌ها	$(ax+b)^2\ge 0$ ، $\lvert ax+b\rvert\ge 0$ ، $\sqrt{ax+b}\ge 0$	$y=-\lvert 2x+3\rvert+4 \xrightarrow{\text{محاسبهٔ برد}} \lvert 2x+3\rvert\ge 0$ $\xrightarrow{\text{قرینه}} -\lvert 2x+3\rvert\le 0 \xrightarrow{+4} -\lvert 2x+3\rvert+4\le 4$ $\xrightarrow{\text{برد}} (-\infty,4]$
	$-1\le \sin x\le 1$ ، $-1\le \cos x\le 1$	$y=2\sin x+3 \xrightarrow{\text{محاسبهٔ برد}} -1\le \sin x\le 1$ $\xrightarrow{\times 2} -2\le 2\sin x\le 2 \xrightarrow{+3} 1\le y\le 5 \xrightarrow{\text{برد}} [1,5]$
	$0\le u-[u]<1$ ، $[u]+[-u]=\begin{cases}0 & u\in\mathbb{Z}\\ -1 & u\notin\mathbb{Z}\end{cases}$	$y=2x-2[x+1] \xrightarrow{\text{محاسبهٔ برد}} y=2x-2[x]-2$ $=2(\underbrace{x-[x]}_{\substack{0\le\ <1\\ 0\le\ <2\\ -2\le\ <0}})-2 \xrightarrow{\text{برد}} [-2,0)$
طرفین‌وسطین	باید x^2 ، $\sqrt{x}$ ، $\lvert x\rvert$ ، $\sin x$ ، $\cos x$ یا ... را تنها کنیم و بعد عبارت سمت راست تساوی را در بازه‌ای محدود کنیم.	$y=\frac{x^2+1}{x^2+4} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} x^2y+4y-x^2-1=0$ $\Rightarrow x^2(y-1)=-4y+1 \Rightarrow x^2=\frac{-4y+1}{y-1}$ $\xrightarrow{x^2\ge 0} \frac{-4y+1}{y-1}\ge 0 \xrightarrow[\text{(برد)}]{\text{تعیین علامت}} \frac{1}{4}\le y<1$
استفاده از یکنوایی	$D_f=[a,b] \xrightarrow[\text{و پیوسته}]{f\ \text{صعودی}} R_f=[f(a),f(b)]$ $D_f=[a,b] \xrightarrow[\text{و پیوسته}]{f\ \text{نزولی}} R_f=[f(b),f(a)]$	$f(x)=\underbrace{x^3+2x}_{\text{اکیداً صعودی}} \xrightarrow{D_f=[1,3]} R_f=[\underbrace{f(1)}_{3},\underbrace{f(3)}_{33}]$

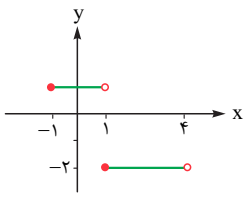
۲ توابعی که بردشان را باید بلد باشیم:

تابع	ضابطه	برد	مثال	جواب برد مثال
خطی $(a \neq 0)$	$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$
چندجمله‌ای درجهٔ فرد		$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$
سهمی $(a > 0)$	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$[y_S, +\infty)$		$[-4, +\infty)$
سهمی $(a < 0)$	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$(-\infty, y_S]$		$(-\infty, 1]$
لگاریتمی	$f(x) = \log_a x$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$
نمایی	$f(x) = a^x + b$	$(b, +\infty)$		$(-1, +\infty)$

تابع	ضابطه	برد	مثال	جواب برد مثال
هموگرافیک	$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$	 $y=\frac{۲x-۱}{۳x+۱}$	$\mathbb{R}-\{\frac{۲}{۳}\}$
گلدانی	$f(x)=\|x-a\|+\|x-b\|$	$[\|b-a\|,+\infty)$	 $\|x-۱\|+\|x+۲\|$	$[۳,+\infty)$
آبشاری	$f(x)=\|x-a\|-\|x-b\|$	$[-\|b-a\|,\|b-a\|]$	 $\|x-۱\|-\|x+۲\|$	$[-۳,۳]$
نیم‌دایره به شعاع R و مرکز مبدأ	$f(x)=\sqrt{R^۲-x^۲}$	$[۰,R]$	 $\sqrt{۴-x^۲}$	$[۰,۲]$

جزء صحیح

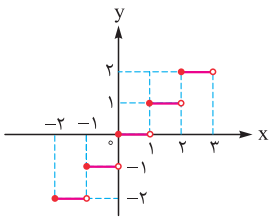
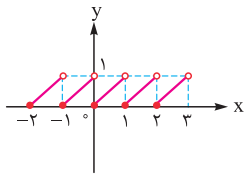
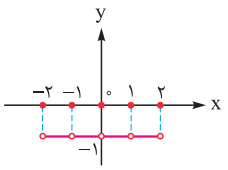
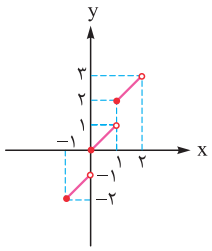
۱ تابع پله‌ای:

تعریف	توابع چندضابطه‌ای که همهٔ ضابطه‌هایش یک تابع ثابت است.
نمودار	از تعدادی پاره‌خط افقی تشکیل شده است.
مثال	$f(x)=\begin{cases}۱ & -۱\le x<۱\\ -۲ & ۱\le x<۴\end{cases}$
شکل	

۲ تعریف جزء صحیح یا براکت:

تعریف	جزء صحیح هر عدد صحیح، خودش می‌شود: $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x]=x$
	جزء صحیح هر عدد غیرصحیح، عدد صحیح ماقبل آن می‌شود: $k<x<k+1 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} [x]=k$

۳ نمودارهای مهم توابع براکتی:

ضابطه	$y=[x]$	$y=x-[x]$	$y=[x]+[-x]$	$y=x+[x]$
نمودار				
برد	$\mathbb{Z}$	$[0,1)$	$\{-1,0\}$	$\cdots\cup[0,1)\cup[2,3)\cup\cdots$

۴ ویژگی‌های مهم براکت:

۱	$[u]\in\mathbb{Z}$
۲	$[u]=k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le u<k+1$
۳	$0\le u-[u]<1$
۴	$[u]+[-u]=\begin{cases}0 & u\in\mathbb{Z}\\ -1 & u\notin\mathbb{Z}\end{cases}$
۵	$k\in\mathbb{Z} \Rightarrow [u\pm k]=[u]\pm k$
۶	$[2u]=[u]+[u+\frac{1}{2}]$

۵ برای پیداکردن برد عبارت‌هایی به فرم $u-a[\frac{u}{a}]$، ابتدا از a فاکتور می‌گیریم، بعد از ویژگی سوم جدول بالا استفاده می‌کنیم.

مثال برد تابع $f(x)=x-2[\frac{x}{2}]+3$ ؟

پاسخ

$$\underbrace{0\le \frac{x}{2}-[\frac{x}{2}]<1}_{\text{طبق نکتهٔ ۳ جدول بالا}} \xrightarrow{\times 2} 0\le x-2[\frac{x}{2}]<2 \xrightarrow{+3} 3\le f(x)<5$$

۶ برای رسم تابع $y=a[bx]$، طول بازه‌ها را $\frac{1}{|b|}$ انتخاب می‌کنیم. مثلاً برای رسم تابع $f(x)=3[2x]$، طول بازه‌ها را $\frac{1}{2}$ می‌گیریم و بازه‌ها به شکل $\ldots,[\frac{-1}{2},0),[0,\frac{1}{2}),[\frac{1}{2},1),\ldots$ می‌شوند.