آزمون حضوری

شماره یک

خیلی سبز! آزمون

تجربی | ریاضی | انسانی

رشتهٔ ریاضی

پایهٔ یازدهم

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
حسابان (۱)	فصل اول صفحهٔ ۱ تا ۲۲	۲	۷	علی شهرابی	مهدی خوشنویس

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی و هندسی

۱ مجموع n جملهٔ اول جملات دنبالهٔ حسابی و هندسی:

دنباله	مجموع n جملهٔ اول	مثال
حسابی	$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ یا $S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]$	$۲,۵,۸,۱۱,\dots$ $\xrightarrow{\text{مجموع ۲۰ جملهٔ اول}} S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}[۲(۲)+(۲۰-۱)۳]$ $=۱۰[۴+۵۷]=۶۱۰$
هندسی	$S_n=\frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}$	$۴,۱۲,۳۶,\dots$ $\xrightarrow{\text{مجموع ۵ جملهٔ اول}} S_۵=\frac{۴(۳^۵-۱)}{۳-۱}=۲\times ۲۴۲=۴۸۴$

۲ مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n: $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

۳ مجموع مربع اعداد طبیعی از ۱ تا n: $۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

۴ محاسبهٔ a_n از روی S_n: $a_n=S_n-S_{n-۱}\xrightarrow{\text{مثال}} a_۸=S_۸-S_۷$

۵ نسبت مجموع ۲n جملهٔ اول به n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی: $\frac{S_{۲n}}{S_n}=q^n+۱\xrightarrow{\text{مثال}}\frac{S_{۱۲}}{S_۶}=q^۶+۱$

معادلهٔ درجه‌دو

۱) ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$: $\Delta=b^2-4ac$, $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

۲) تعداد ریشه‌ها:

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
ریشهٔ حقیقی ندارد.	یک ریشهٔ مضاعف ↓ $x_{\text{مضاعف}}=\frac{-b}{2a}$	۲ ریشهٔ متمایز

۳) اگر عبارت درجه‌دومی، مربع کامل باشد، دلتایش صفر است.

۴) دو حالت خاص پرکاربرد:

رابطهٔ بین ضرایب	ریشه‌ها	مثال
$a+b+c=0$	$1,\frac{c}{a}$	$3x^2-8x+5=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{5}{3} \end{cases}$
$a+c=b$	$-1,\frac{-c}{a}$	$5x^2-7x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{12}{5} \end{cases}$

۵) با شرط $\Delta>0$ داریم:

جمع ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	اختلاف ریشه‌ها	مجموع مربع ریشه‌ها	مجموع مکعب ریشه‌ها
$S=\frac{-b}{a}$	$P=\frac{c}{a}$	$M=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$x_1^2+x_2^2=S^2-2P$	$x_1^3+x_2^3=S^3-3SP$

۶) اگر حاصل عباراتی مثل $\sqrt{x_1}\pm\sqrt{x_2}$ را خواستید حساب کنید، آن را مساوی A قرار دهید و طرفین را به توان ۲ برسانید.

۷) معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل‌ضرب آن‌ها P باشد، به صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

۸) بحث روی علامت ریشه‌ها: مثلاً وقتی قرار است معادله دو ریشهٔ منفی متمایز داشته باشد، باید سه نامعادلهٔ $\Delta>0$، $S<0$ و $P>0$ را حل کنیم و بین جواب‌هایشان اشتراک بگیریم.

		Δ	S	P
۱	دو ریشهٔ مثبت متمایز	+	+	+
۲	دو ریشهٔ منفی متمایز	+	−	+
۳	دو ریشهٔ ناهم‌علامت	+	+	$P\le 0$
۴	دو ریشهٔ قرینه	+	۰	−
۵	دو ریشهٔ معکوس	+	+	۱

۹) اگر $P<0$ باشد (یا a و c هم‌علامت نباشند)، حتماً $\Delta>0$ است و نیازی به چک‌کردن شرط $\Delta>0$ نیست.

۱۰) منظور از صفرهای تابع $f(x)$، «طول نقاط برخورد تابع f با محور xها» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$» است.

۱۱) نوشتن سریع معادلهٔ سهمی:

	چیزهایی که داریم.	ضابطهٔ سهمی	نکتهٔ تکمیلی
۱	x_1 و x_2 صفرهای سهمی‌اند.	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲	نقطهٔ (x_S,y_S) رأس سهمی است.	$y=a(x-x_S)^2+y_S$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳	سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله ـ سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.	اگر نقطه‌ای به مختصات $(0,c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.

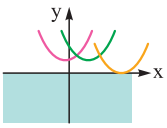
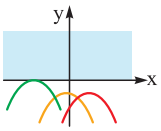
۱۲ اگر سهمی در نقطهٔ $(\alpha,0)$ بر محور xها مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید: $y=a(x-\alpha)^2$

۱۳ علامت ضرایب a، b و c:

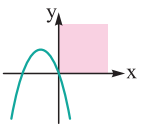
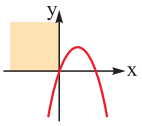
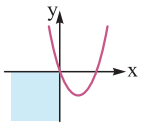
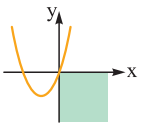
علامت a	علامت b	علامت c
با دهانهٔ سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور yها	عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها

۱۴ سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات:

حالت ۱: سهمی فقط از ۲ ناحیه عبور کند.

		شکل	شرایط	
			a	Δ
۱	سهمی فقط از ناحیهٔ ۱ و ۲ عبور کند.		+	$\Delta \le 0$
۲	سهمی فقط از ناحیهٔ ۳ و ۴ عبور کند.		−	$\Delta \le 0$

حالت ۲: سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند).

		شکل	شرایط			
			a	b	c	Δ
۱	فقط از ناحیهٔ ۱ نگذرد.		−	−	−	+
۲	فقط از ناحیه ۲ نگذرد.		−	+	−	+
۳	فقط از ناحیهٔ ۳ نگذرد.		+	−	+	+
۴	فقط از ناحیهٔ ۴ نگذرد.		+	+	+	+

c می‌تواند صفر هم باشد.

حالت ۳: سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند. $\xleftarrow{\text{فقط کافیه که}}$ $P<0$

۱۵ شرط آن‌که سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند، آن است که سهمی دو ریشهٔ هم‌علامت داشته باشد: $\Delta>0$ و $P\ge 0$.

۱۶ حل معادلات درجه۳ که عامل $x-a$ دارند: $\overbrace{f(x)}^{\text{درجه۳}}=0$

مرحلهٔ ۱	جای x، اعداد ۱، ۱−، ۲ و ۲− را قرار می‌دهیم تا ببینیم به ازای کدامشان تساوی برقرار است.
مرحلهٔ ۲	اگر به ازای $x=a$، تساوی برقرار شد، عبارت را به $x-a$ تقسیم می‌کنیم: $\begin{array}{l\|l} x-a & \text{عبارت درجه۳} \\ \hline \vdots & \text{عبارت درجه۲} \\ 0 & \end{array}$
مرحلهٔ ۳	معادلهٔ درجه‌سوم اولیه را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم: $(x-a)(\text{عبارت درجه۲})=0$
مرحلهٔ ۴	از حل دو معادلهٔ روبه‌رو، جواب‌های معادله به دست می‌آیند: $\begin{cases} x-a=0 \\ \text{عبارت درجه۲}=0 \end{cases}$

۱۷ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ (با شرط $a\neq 0$) با تغییر متغیر $x^2=t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۴	دو ریشهٔ مثبت	$\Delta>0, S>0, P>0$
۳	یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر	$c=0, \frac{-b}{a}>0$
۲	حالت ۱: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P<0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta=0, \frac{-b}{a}>0$
۱	یک ریشهٔ صفر	$b=c=0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta>0, S<0, P>0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta=0, \frac{-b}{a}<0$
	حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta<0$

۱۸ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$ یا هر معادله‌ای که همهٔ توان‌های x در آن زوج باشد، صفر است. (اگر $x=a$ جواب باشد، $x=-a$ هم جواب است؛ درواقع توان‌های زوج اعداد قرینه باهم برابر و مجموع آن‌ها صفر است.)

مثلاً در معادله‌های $2x^4-7x^2+1=0$ و $x^8-4x^6+2x^2=0$، مجموع ریشه‌ها صفر است.

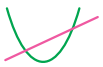
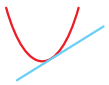
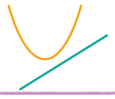
روش هندسی (نموداری)

۱ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط برخورد نمودارهای این دو تابع، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است و برعکس، یعنی هر جواب معادلهٔ $f(x)=g(x)$، یکی از نقاط برخورد دو تابع است.

۲ **یادآوری انتقال نمودار:**

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.

۳ وضعیت خط و سهمی نسبت به هم: معادلهٔ $\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{سهمی}}=\underbrace{mx+h}_{\text{خط}}$ را تشکیل می‌دهیم. بعد آن را به صورت $ax^2+b'x+c'=0$ درمی‌آوریم. دلتای این معادله، وضعیت خط و سهمی را مشخص می‌کند.

علامت Δ	وضعیت خط و سهمی	شکل
$\Delta>0$	سهمی و خط در ۲ نقطه متقاطع‌اند.	
$\Delta=0$	خط در یک نقطه بر سهمی مماس است.	
$\Delta<0$	سهمی و خط، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.	

۴ روش هندسی، **تعداد** و **محدودهٔ تقریبی** جواب‌ها را به ما می‌دهد، ولی جواب دقیق را معمولاً به ما نمی‌دهد.

۵ در معادلاتی که جنس عبارت‌های دو طرف تساوی، مثل هم نیست، معمولاً سراغ روش هندسی می‌رویم.

مثلاً در معادله‌های $\underbrace{x^2-1}_{\text{سهمی}}=\underbrace{2^x}_{\text{نمایی}}$ یا $\underbrace{\log x}_{\text{لگاریتمی}}=\underbrace{\sin x}_{\text{مثلثاتی}}$

معادلات گویا و گنگ

۱ بعد از حل معادلهٔ گویا، حتماً چک کنید که جواب‌های به دست آمده، ریشه‌های مخرج نباشند.

۲ اگر شخص اول کاری را به تنهایی در A ساعت، شخص دوم همان کار را در B ساعت و هر دو با هم در C ساعت انجام دهند، رابطهٔ روبه‌رو بین A، B و C برقرار است:

$$\underbrace{\frac{1}{A}}_{\text{زمان نفر اول}}+\underbrace{\frac{1}{B}}_{\text{زمان نفر دوم}}=\underbrace{\frac{1}{C}}_{\text{زمان هر دو نفر با هم}}$$

۳ اگر وسیله‌ای مسیری به طول x را با سرعت v_1 برود و با سرعت v_2 برگردد، با توجه به رابطهٔ $t=\frac{x}{v}$، داریم:

$$t_{\text{رفت}}\pm t_{\text{برگشت}}=\underbrace{\text{یه عدد}}_{\text{سؤال می‌ده}}\Rightarrow\frac{x_{\text{ر}}}{v_{\text{ر}}}\pm\frac{x_{\text{ب}}}{v_{\text{ب}}}=\text{یه عدد}$$

۴ در نسبت طلایی با طول L و عرض W داریم:

$$\frac{L}{W}=\frac{L+W}{L}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

۵ اگر محلولی به جرم m کیلوگرم و حل‌شونده‌ای به جرم M کیلوگرم داشته باشیم، طبق رابطهٔ $\frac{M}{m}=$ غلظت، داریم:

۱) اضافه‌کردن X کیلوگرم از حل‌شونده:

$$\text{غلظت جدید}=\frac{M+X}{m+X}$$

۲) اضافه‌کردن X کیلوگرم از حلّال:

$$\text{غلظت جدید}=\frac{M}{m+X}$$

۶ اگر قیمت کالایی بعد از تخفیف X تومان کم شود و خریدار بتواند Y عدد بیشتر از آن بخرد، طبق رابطهٔ $\frac{\text{پول خریدار}}{\text{قیمت کالا}}=$ تعداد، داریم:

$$\text{تعداد جدید}=\frac{\text{پول خریدار}}{\text{قیمت جدید}}=\text{تعداد اولیه}+Y \Rightarrow \frac{\text{پول خریدار}}{\text{قیمت جدید}-X}=\frac{\text{پول خریدار}}{\text{تعداد جدید}}+Y$$

۷ برای حل معادلات گنگ، دو طرف معادله را به توان می‌رسانیم و در بعضی از موارد، این کار را تکرار می‌کنیم و در نهایت به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

۸ بعد از حل معادلهٔ گنگ، جواب‌های به دست آمده را در معادلهٔ اولیه چک کنید.

۹ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$ (با شرط $a\neq 0$) با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۲	حالت (۱) دو ریشهٔ مثبت	$\Delta>0, S>0, P>0$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر	$c=0, \frac{-b}{a}>0$
۱	حالت (۱) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P<0$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta=0, \frac{-b}{a}>0$
	حالت (۳) یک ریشهٔ صفر	$b=c=0$
بدون جواب	حالت (۱) هر دو ریشه منفی	$\Delta>0, S<0, P>0$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta=0, \frac{-b}{a}<0$
	حالت (۳) فاقد ریشه	$\Delta<0$

۱۰ اگر جمع چند رادیکال صفر شده، عبارت داخل تک‌تک آن‌ها صفر است:

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=0 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ , \\ B=0 \end{cases}$$

۱۱ بعضی از معادلات گنگ نیاز به حل ندارند.

مثلاً $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}=x$، چون دامنه‌ها به ترتیب $x\geq 3$ و $x\leq 1$ است که اشتراکشان تهی می‌شود.