

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

رشته انسانی

مرحله ششم

پایه دوازدهم

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از مهر

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضی	ریاضی و آمار دهم فصل ۱، صفحه ۹ تا ۳۸ ریاضی و آمار ۳ فصل ۱ - درس ۱: صفحه ۱ تا ۸ (ابتدای ترکیب)	۲	۱۰	علی شهبازی	محسن فراهانی بردیا نصیری



معادله درجه اول و مسائل توصیفی

- ۱) معادله به فرم $ax+b=0$ با شرط $a \neq 0$ را یک معادله درجه اول می‌نامیم و جوابش $x = \frac{-b}{a}$ است.
- ۲) برای حل معادله‌های درجه اول کسری، بهتر است ابتدا دو طرف را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب کنیم تا از شرّ مخرج‌ها خلاص شویم.
- مثال: $\frac{2x-1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{x+2}{6} \xrightarrow{\times 12} 3(2x-1) + 4(1) = 2(x+2) \rightarrow 6x-3+4=2x+2 \rightarrow 6x-3+1=2x+2 \rightarrow 4x=3 \rightarrow x=\frac{3}{4}$
- ۳) بعضی وقت‌ها سؤال، معادله را مستقیم به ما نمی‌دهد و با یک جمله در مورد یک مجهول با ما صحبت می‌کند. ما باید آن مجهول را x بگیریم و با اطلاعاتی که سؤال به ما می‌دهد، یک معادله برحسب x بنویسیم و آن را حل می‌کنیم.
- ۴) در تبدیل جملات فارسی به زبان ریاضی، چند اصطلاح پرکاربرد داریم که در جدول زیر آورده‌ایم:

اسم اصطلاح	معنی	مثال با x
قرینه	پشت عدد، منفی می‌گذاریم.	$-x$
معکوس (وارون)	جای صورت و مخرج را عوض می‌کنیم.	$\frac{1}{x}$
مربع (مجذور)	عدد را به توان ۲ می‌رسانیم.	x^2
مکعب	عدد را به توان ۳ می‌رسانیم.	x^3
جذر	رادیکال عدد را می‌نویسیم.	\sqrt{x}
نصف، ثلث، ربع و خمس	به ترتیب $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ عددی	$\frac{x}{5}$ و $\frac{x}{4}$ ، $\frac{x}{3}$ ، $\frac{x}{2}$

۵) وقتی می‌خواهیم عبارات فارسی را به ریاضی تبدیل کنیم، از سمت چپ به راست عمل می‌کنیم.

مثال «نصف مجذور یک واحد کم‌تر از عددی»
مرحله ۱: $\frac{1}{2}$ ، مرحله ۲: $\frac{1}{2}$ ، مرحله ۳: $\frac{1}{2}$

$$x: \text{عدد اولیه} \xrightarrow{\text{مرحله ۱}} x-1 \xrightarrow{\text{مرحله ۲}} (x-1)^2 \xrightarrow{\text{مرحله ۳}} \frac{(x-1)^2}{2}$$

۶) روابط هندسی لازم برای حل مسائل توصیفی هندسی:

شکل	محیط	مساحت	سایر روابط
 مربع	ضلع $4 \times a$	$\frac{(قطر)^2}{2}$ یا $\frac{1}{2}(\text{ضلع})^2$	ضلع $\sqrt{2} \times \text{قطر}$
	$4a$	a^2 یا $\frac{d^2}{2}$	قطر $d = \sqrt{2}a$
 مستطیل	$2 \times (\text{طول} + \text{عرض})$	عرض \times طول	$\text{قطر} = \sqrt{(\text{طول})^2 + (\text{عرض})^2}$
	$2(a+b)$	ab	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$
 مثلث	مجموع سه ضلع	$\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$	☺
	$a+b+c$	$\frac{a \times h}{2}$	
 متوازی‌الاضلاع	(مجموع دو ضلع مجاور) $2 \times$	ارتفاع \times قاعده	☺
	$2(a+b)$	$a \times h$ یا $b \times h'$	



مرورنامه آزمون آزمایشی خیالی سبز

ریاضی

شکل	محیط	مساحت	سایر روابط
	ضلع $\times 4$	$\frac{\text{قطر بزرگ} \times \text{قطر کوچک}}{2}$	لوزی
	$4a$	$\frac{d \cdot d'}{2}$	
	مجموع چهارضلع	$\frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع قاعده‌ها}}{2}$	دوزنقه
	$a + b + c + d$	$\frac{(a + c) \times h}{2}$	
	عدد پی \times قطر	عدد پی \times (شعاع) ²	دایره
	$2\pi r$	πr^2	

معادله درجه دوم

۱ یادآوری اتحادهای مهم:

اسم اتحاد	فرم کلی	مثال
مربع دوجمله‌ای	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(2x + 5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$
مزدوج	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(3x - 7)(3x + 7) = 9x^2 - 49$
جمله مشترک	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	$(2x + 5)(2x - 1) = \underbrace{(2x)^2}_{4x^2} + \underbrace{(5-1)2x}_{8x} + \underbrace{5(-1)}_{-5}$

۲ معادله به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $a \neq 0$ را یک معادله درجه دوم می‌نامیم که حداکثر ۲ جواب حقیقی دارد.

۳ روش‌های حل معادله درجه دوم:

اسم روش	مراحل حل	مثال (با حل مرحله به مرحله)
تجزیه	۱) به کمک اتحادها یا با فاکتورگیری، عبارت درجه دوم را تجزیه می‌کنیم.	$x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0$
	۲) وقتی حاصل ضرب دو پرانتز صفر باشد، هر کدام می‌توانند صفر باشند.	$\begin{cases} x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \\ x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$
مربع کامل	۱) در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، c را به سمت راست می‌بریم و طرفین را بر a تقسیم می‌کنیم.	$2x^2 - 12x + 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 6x = -2$
	۲) نصف ضریب x را به توان ۲ می‌رسانیم و به دو طرف اضافه می‌کنیم.	$-6 \xrightarrow{\div 2} -3 \xrightarrow{\text{به توان 2}} 9 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = -2 + 9$
	۳) عبارت سمت چپ مربع کامل است.	$(x - 3)^2 = 7$
	۴) وقتی $u^2 = a$ ، آن‌گاه $u = \pm\sqrt{a}$ است.	$x - 3 = \pm\sqrt{7} \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$



اسم روش	مراحل حل	مثال (با حل مرحله به مرحله)
کلی (دلتا)	(۱) دلتا را به دست می آوریم: $\Delta = b^2 - 4ac$	$2x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(2)(-6) = 49$
	(۲) جواب ها: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{1 \pm 7}{4} \xrightarrow{3-7+4=0} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$
دو حالت خاص	اگر $a + b + c = 0$ باشد، ریشه ها ۱ و $\frac{c}{a}$ هستند.	$3x^2 - 7x + 4 = 0 \xrightarrow{3-7+4=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$
	اگر $a + c = b$ باشد، ریشه ها -۱ و $\frac{-c}{a}$ هستند.	$5x^2 - 8x - 13 = 0 \xrightarrow{5-13=-8} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{13}{5} \end{cases}$
معادلات ناقص!	اگر $c = 0$ باشد، از x فاکتور می گیریم:	$x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(x+6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -6 \end{cases}$
	اگر $b = 0$ باشد، x^2 را تنها می کنیم:	$4x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$
تغییر متغیر	(۱) عبارتی که تکرار می شود را t می گیریم.	$x^4 + 3x^2 - 10 = 0 \rightarrow x^2 = t$
	(۲) معادله جدید را حل می کنیم.	$t^2 + 3t - 10 = 0 \rightarrow (t+5)(t-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = 2 \end{cases}$
	(۳) عبارت اولیه را برابر با مقادیر t قرار می دهیم.	$x^2 = -5 \rightarrow$ غیر ممکن $x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

۴ معادله درجه دومی که ریشه هایش x_1 و x_2 باشند به شکل $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ است.

↓
یک عدد حقیقی

۵ معادله درجه دومی که ریشه مضاعف x_1 داشته باشد به صورت $a(x - x_1)^2 = 0$ است.

۶ بررسی معادله $(x - a)^2 = k$:

علامت k	$k < 0$	$k = 0$	$k > 0$
تعداد جواب ها	جواب حقیقی ندارد.	یک ریشه مضاعف ($x = a$)	۲ جواب حقیقی متمایز
مثال	$(x - 2)^2 = -4 \rightarrow$ جواب حقیقی ندارد.	$(x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$	$(x - 2)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 \rightarrow x = -1 \end{cases}$



مرورنامه آزمون آزمایشی خیالی سبز

ریاضی

۷ علامت دلتا و تعداد جواب‌ها:

علامت Δ	+	°	-
تعداد ریشه‌ها	۲	یک ریشه مضاعف	صفر
ریشه‌ها	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{-b}{2a}$	ریشه حقیقی ندارد.

۸ جمع، ضرب و اختلاف ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ (با شرط $\Delta > 0$):

فرمول کلی	مجموع $(x_1 + x_2)$	ضرب $(x_1 x_2)$	اختلاف $(x_1 - x_2)$
	$S = \frac{-b}{a}$	$P = \frac{c}{a}$	$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$
مثال برای $2x^2 - 7x + 1 = 0$	$S = \frac{7}{2}$	$P = \frac{1}{2}$	$M = \frac{\sqrt{49 - 8}}{ 2 } = \frac{\sqrt{41}}{2}$

۹ دو مورد خاص که با S و P به دست می‌آیند:

راه حل	رابطه ریاضی	
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}$	مجموع معکوس ریشه‌ها
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$	$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$	مجموع مربع ریشه‌ها

۱۰ مسائل بازاریابی:

۱	رابطه بین درآمد، هزینه و سود:	هزینه - درآمد = سود
۲	محاسبه درآمد:	تعداد \times قیمت هر واحد = درآمد
۳	محاسبه هزینه:	(تعداد \times هزینه هر واحد) + (هزینه ثابت) = هزینه کل
۴	به تعداد کالایی که به ازای فروش آن مقدار، سودمان صفر می‌شود، نقطه سربه‌سر می‌گوییم. برای به دست آوردن نقطه سربه‌سر یکی از معادله‌های روبه‌رو را حل می‌کنیم:	درآمد = هزینه یا = سود

معادله گویا

$$\frac{x-7}{x-3} + \frac{10}{x^2-9} = \frac{15}{x+3}$$

۱ مراحل حل معادله گویا را با یک مثال ببینیم:

۱	مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم.	$\frac{x-7}{x-3} + \frac{10}{(x-3)(x+3)} = \frac{15}{x+3}$
۲	دو طرف را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.	$(x-3)(x+3) \frac{x-7}{x-3} + (x-3)(x+3) \frac{10}{(x-3)(x+3)} = (x-3)(x+3) \frac{15}{x+3}$
۳	معادله را ساده می‌کنیم.	$(x+3)(x-7) + 10 = 15(x-3) \rightarrow x^2 - 19x + 34 = 0$ $x^2 - 4x - 21$ $15x - 45$



۴	معادله جدید را حل می کنیم.	$x^2 - 19x + 34 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x-2)(x-17) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 17 \end{cases}$
۵	اگر جواب های به دست آمده، مخرج کسره های اولیه را صفر نکردند، قبول اند.	هر دو جواب قبول اند.

۲ برای حل معادله های گویا به شکل $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ، ابتدا طرفین وسطین می کنیم تا معادله از شکل کسری درآید، بعد آن را حل می کنیم:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} AD = BC$$

۳ تیپ های مهم مسائل معادله گویا:

تیپ	ایده حل
۱	تفاضل یا مجموع معکوس دو عدد زوج (یا فرد) متوالی مثال: تفاضل معکوس دو عدد زوج متوالی $\frac{1}{24}$ است. این دو عدد؟ دو عدد زوج (یا فرد) متوالی را x و $x+2$ و معکوسشان را $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x+2}$ می گیریم.
۲	سهم (مثل مسئله تقسیم یک کتاب درسی) اختلاف سهم هر نفر = $\frac{\text{مقدار کل}}{\text{تعداد ثانویه}} - \frac{\text{مقدار کل}}{\text{تعداد اولیه}} \Rightarrow$ اختلاف سهم هر نفر = سهم ثانویه هر نفر - سهم اولیه هر نفر یکی را بین چند نفر تقسیم می کنیم. ۳ نفر به جمع اضافه می شوند و یک را مجدد تقسیم می کنیم. در این حالت به هر نفر $\frac{1}{18}$ کم تر از حالت قبلی رسید. تعداد نفرات اولیه؟ شروع حل: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{18} \rightarrow \dots$
۳	انجام کار توسط دو نفر (پرکردن استخر با ۲ شیر آب) دو کارگر کاری را با هم در ۶ روز انجام می دهند. اگر هر کدام تنها کار کنند، کارگر اول کار را ۵ زودتر از کارگر دوم انجام می دهد. کارگر اول در چند روز کار را تمام می کند؟ شروع حل: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \rightarrow \dots$

شمارش

۱ اصل جمع و اصل ضرب:

اصل	تعریف	حرف ربط
جمع	اگر بتوان کار ۱ را به m_1 روش، کار ۲ را به m_2 روش، کار ۳ را به m_3 روش و ... انجام داد و این کارها را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ روش می توان کار ۱ یا کار ۲ یا کار ۳ یا ... را انجام داد.	یا
ضرب	اگر کاری در چند مرحله انجام شود به طوری که مرحله اول به m_1 روش و مرحله دوم به m_2 روش و ... انجام پذیر باشد، کل آن کار به $m_1 \times m_2 \times \dots$ روش می توان انجام داد.	و



۲ در حل سؤالات مربوط به اصل ضرب، با خانه‌ای شروع می‌کنیم که محدودیت بیشتری دارد. مثلاً وقتی بخواهیم «تعداد اعداد ۳ رقمی بدون تکرار که با ارقام صفر تا ۶ می‌توان نوشت» را حساب کنیم، با خانه «صدگان» شروع می‌کنیم که محدودیت دارد (صفر نباید باشد).

۳ بعضی وقت‌ها باید مسئله را به چند قسمت تفکیک کنیم. حالت‌های هر قسمت را به کمک اصل ضرب یا ... حساب کنیم. سپس تعداد حالت‌های تمام قسمت‌ها را با هم جمع کنیم:



$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالات} = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$$

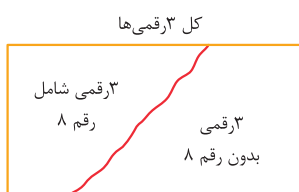
چند تیپ مهم سؤالات این مدلی را ببینید:

سؤال	مثال	حالت‌ها	جواب
تعداد حالات رفتن از A به D		مسیر A به B به D مسیر A به C به D	$3 \times 2 = 6$ $2 \times 4 = 8$ مجموع = $6 + 8 = 14$
تعداد اعداد ۳ رقمی زوج (بدون تکرار)	با ارقام ۰، ۱، ۲، ۴، ۵ و ۶	یکان صفر باشد. یکان ۲ یا ۴ یا ۶ باشد.	$\frac{5}{ص} \times \frac{4}{ص} \times \frac{1}{ی} = 20$ $\frac{4}{ص} \times \frac{4}{ص} \times \frac{3}{ی} = 48$ مجموع = $20 + 48 = 68$
تعداد اعداد ۳ رقمی مضرب ۵ (بدون تکرار)	با ارقام ۰، ۱، ۲، ۴، ۵ و ۶	یکان صفر باشد. یکان ۵ باشد.	$\frac{5}{ص} \times \frac{4}{ص} \times \frac{1}{ی} = 20$ $\frac{4}{ص} \times \frac{4}{ص} \times \frac{1}{ی} = 16$ مجموع = $20 + 16 = 36$

۴ اصل متمم: جملات «عدد ۳ رقمی شامل رقم ۸ باشد» و «عدد ۳ رقمی شامل رقم ۸ نباشد» را در نظر بگیرید.

جمله ۲

جمله ۱



حساب کردن مستقیم تعداد حالات جمله ۱، کار دشواری است ولی شمردن مستقیم تعداد حالات جمله ۲ آسان است. از طرفی مجموع این دو حالت برابر با کل اعداد ۳ رقمی می‌شود: این جور مواقع اگر تعداد حالات جمله ۱ را خواستند، تعداد کل ۳ رقمی‌ها و تعداد ۳ رقمی‌های بدون رقم ۸ را حساب کرده و از هم کم می‌کنیم:

$$(\text{تعداد ۳ رقمی‌های بدون رقم ۸}) - (\text{تعداد کل ۳ رقمی‌ها}) = \text{تعداد ۳ رقمی‌های شامل رقم ۸}$$

تذکر هر وقت در سؤال، واژه «حداقل» یا «حداکثر» دیدید به احتمال زیاد سؤال با اصل متمم حل می‌شود.

۵ فاکتوریل:

تعریف	حاصل ضرب اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n را با n! نشان می‌دهیم: $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$
مقادیر ۰! تا ۶!	$0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$
بازکردن n!	$n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)! = \dots$



چند تیپ سؤال مهم در جایگشت با مثال:

تیپ سؤال	مثال	جواب
فلان جا باشد یا فلان جا نباشد.	در چند جایگشت از حروف کلمه alish، حرف اول s است و حرف آخر i نیست؟	$3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 18$ ترتیب پرکردن
چند چیز کنار هم باشند.	۶ نفر می‌خواهند کنار هم قرار بگیرند. در چند حالت علی، راستین و ایمان کنار هم هستند؟	A, B, C ایمان، راستین، علی $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$ داخل بسته C, B, A و بسته
چند چیز با ترتیب خاصی کنار هم باشند.	در چند جایگشت از حروف کلمه shomal، عبارت mos وجود دارد؟	l و a و h و mos $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$ داخل بسته l, a, h و بسته
n جنس نوع A و n جنس نوع B یکی در میان باشند.	به چند طریق می‌توان ۳ مهندس و ۳ دکتر را کنار هم قرار داد به طوری که همکارها کنار هم نباشند؟	$\frac{3!}{3} \times \frac{3!}{3} \times \frac{2!}{2} \times \frac{2!}{2} \times \frac{1!}{1} \times \frac{1!}{1}$ شروع با دکتر یا مهندس جواب = $3! \times 3! \times 2! \times 2! \times 1! \times 1!$
n + 1 جنس نوع A و n جنس نوع B یکی در میان باشند.	به چند طریق می‌توان ۴ مهندس و ۳ دکتر را کنار هم قرار داد به طوری که همکارها کنار هم نباشند؟	$\frac{4!}{4} \times \frac{3!}{3} \times \frac{3!}{3} \times \frac{2!}{2} \times \frac{2!}{2} \times \frac{1!}{1} \times \frac{1!}{1}$ جواب = $4! \times 3!$

فرق جایگشت و تبدیل:

تعریف	رابطه
جایگشت	n شیء داریم و می‌خواهیم با آن‌ها صف n نفره تشکیل دهیم.
تبدیل	n شیء داریم و می‌خواهیم با آن‌ها صف r نفره تشکیل دهیم.
	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

جایگشت با تکرار و جایگشت دوری (خارج کتاب درسی):

توضیح	مثال
فرض کنید در کل n شیء داریم که n _۱ تای آن‌ها از یک نوع، n _۲ تای آن‌ها از نوع دیگر و ... باشند. در این صورت تعداد حالات قرارگرفتن آن‌ها کنار هم برابر است با: $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots}$	تعداد حالات قرارگرفتن حروف کلمه BABAJAN کنار هم برابر است با: $\frac{7!}{3! \times 2! \times 2!}$ تعداد A ← تعداد B →
تعداد حالات قرارگرفتن n شیء دور یک میز گرد برابر با (n-1)! است.	تعداد حالات قرارگرفتن ۵ نفر دور یک میز گرد برابر با ۴! یعنی ۲۴ است.