مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳

رشته تجربی

پایــه دوازدهم

مرحله ششم

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضی	**دهم**: فصل ۴ و فصل ۵ صفحهٔ ۶۹ تا ۱۱۷ **یازدهم**: فصل ۱ (درس ۲ و ۳) صفحهٔ ۱۱ تا ۲۴ **دوازدهم**: فصل ۱ (درس ۱ و ۲ تا ابتدای نمودار توابع) صفحهٔ ۱ تا ۱۴	۲	۱۶	علی شهرابی	محسن فراهانی مهدی خوشنویس

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

شروع دوازدهم از مهر

معادلهٔ درجه‌دو

۱ ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},\ \Delta=b^2-4ac$$

۲ تعداد ریشه‌ها:

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
۲ ریشهٔ متمایز	یک ریشهٔ مضاعف ↓ $x_{\text{مضاعف}}=\frac{-b}{2a}$	ریشهٔ حقیقی ندارد.

۳ اگر عبارت درجه‌دومی، مربع کامل باشد، دلتایش صفر است.

۴ دو حالت خاص پرکاربرد:

رابطهٔ بین ضرایب	ریشه‌ها	مثال
$a+b+c=0$	$1,\frac{c}{a}$	$3x^2-8x+5=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=\frac{5}{3}\end{cases}$
$a+c=b$	$-1,\frac{-c}{a}$	$5x^2-7x-12=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=\frac{12}{5}\end{cases}$

۵ با شرط $\Delta>0$، داریم:

اختلاف ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	جمع ریشه‌ها
$M=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$P=\frac{c}{a}$	$S=\frac{-b}{a}$

۶ مجموع مربع و مکعب ریشه‌ها:

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P,\ x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$$

۷ اگر حاصل عباراتی مثل $\sqrt{x_1}\pm\sqrt{x_2}$ را خواستید حساب کنید، آن را مساوی A قرار دهید و طرفین را به توان ۲ برسانید.

۸ معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل‌ضرب آن‌ها P باشد، به صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

۹ بحث روی علامت ریشه‌ها: مثلاً وقتی قرار است معادله دو ریشهٔ منفی داشته باشد، باید سه نامعادلهٔ $\Delta > 0$، $S < 0$ و $P > 0$ را حل کنیم و بین جواب‌هایشان اشتراک بگیریم.

		Δ	S	P
۱	دو ریشهٔ مثبت	+	+	+
۲	دو ریشهٔ منفی	+	−	+
۳	دو ریشهٔ ناهم‌علامت			−
۴	دو ریشهٔ قرینه		۰	−
۵	دو ریشهٔ معکوس	+		۱

۱۰ اگر $P < 0$ باشد (یا a و c هم‌علامت نباشند)، حتماً $\Delta > 0$ است و نیازی به چک‌کردن شرط $\Delta > 0$ نیست.

۱۱ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (با شرط $a \neq 0$) با تغییر متغیر $x^2 = t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax^4 + bx^2 + c = 0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2 + bt + c = 0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۴	دو ریشهٔ مثبت	$\Delta > 0, S > 0, P > 0$
۳	یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر	$c = 0, \frac{-b}{a} > 0$
۲	حالت ۱: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P < 0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta = 0, \frac{-b}{a} > 0$
۱	یک ریشهٔ صفر	$b = c = 0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta > 0, S < 0, P > 0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta = 0, \frac{-b}{a} < 0$
	حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta < 0$

۱۲ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ یا هر معادله‌ای که همهٔ توان‌های x در آن زوج باشد، صفر است. مثلاً در معادله‌های $2x^4 - 7x^2 + 1 = 0$ و $x^8 - 4x^6 + 2x^2 = 0$، مجموع ریشه‌ها صفر است.

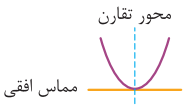
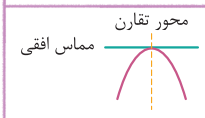
۱۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ (با شرط $a \neq 0$) با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax + b\sqrt{x} + c = 0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2 + bt + c = 0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۲	دو ریشهٔ مثبت	$\Delta > 0, S > 0, P > 0$
۱	حالت ۱: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P < 0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta = 0, \frac{-b}{a} > 0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta > 0, S < 0, P > 0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta = 0, \frac{-b}{a} < 0$
	حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta < 0$

۱۴ برای حل معادلهٔ درجه‌سوم، اول یک ریشه را از بین اعداد ۱± و ۲± حدس می‌زنیم (مثلاً $x = a$ شد). بعد عبارت درجه‌سوم را بر $x - a$ تقسیم می‌کنیم و معادلهٔ درجه‌سوم اولیه را به شکل $(x - a)(\text{درجه}۲) = 0$ درمی‌آوریم که حلش را بلدیم.

تابع درجه‌دو (سهمی)

۱ با توجه به علامت a، سهمی دوتا شکل می‌تواند داشته باشد:

	قیافه	طول رأس	عرض رأس	محور تقارن	مماس افقی	مقدار min یا max	بُرد
$a>0$		$\frac{-b}{2a}$	$\frac{-\Delta}{4a}$ یا $f(\frac{-b}{2a})$	$x=\frac{-b}{2a}$	$y=\frac{-\Delta}{4a}$	$\min=\frac{-\Delta}{4a}$	$[\frac{-\Delta}{4a},+\infty)$
$a<0$						$\max=\frac{-\Delta}{4a}$	$(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}]$

۲ تنها نقطه‌ای از سهمی که با حذف آن، برد تغییر می‌کند، رأس سهمی است.

۳ اگر دو نقطه با yهای یکسان روی سهمی داشته باشیم، میانگین xهایشان، x رأس را می‌دهد. از این جمله می‌توانیم نتیجه بگیریم، میانگین ریشه‌های سهمی، x رأس است.

۴ اگر $ax+by=c$ باشد $(a,b>0)$، زمانی xy ماکزیمم است که ax و by هر دو برابر با $\frac{c}{2}$ باشند. مثلاً اگر $3x+2y=12$ باشد و ماکزیمم xy را بخواهیم، باید $3x=6$ و $2y=6$ باشد (که $x=2$ و $y=3$ و در نتیجه $xy=6$ را نتیجه می‌دهد).

۵ منظور از صفرهای تابع $f(x)$، «طول نقاط برخورد تابع f با محور xها» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$» است.

۶ نوشتن سریع معادلهٔ سهمی:

	چیزهایی که داریم.	ضابطهٔ سهمی	نکتهٔ تکمیلی
۱	x_1 و x_2 صفرهای سهمی‌اند.	$y=a(x-x_1)(x-x_2)$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲	نقطهٔ (x_S,y_S) رأس سهمی است.	$y=a(x-x_S)^2+y_S$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳	سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله ـ سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.	اگر نقطه‌ای به مختصات $(0,c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.

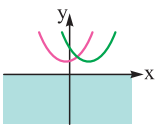
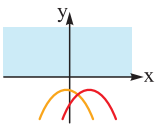
۷ اگر سهمی در نقطهٔ $(\alpha,0)$ بر محور xها مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید: $y=a(x-\alpha)^2$

۸ علامت ضرایب a، b و c

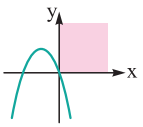
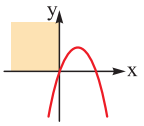
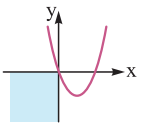
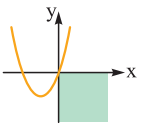
علامت a	علامت b	علامت c
با دهانهٔ سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور yها	عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها

۹ سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات:

حالت ۱: سهمی فقط از ۲ ناحیه عبور کند.

		شکل	شرایط	
			a	Δ
۱	سهمی فقط از ناحیهٔ ۱ و ۲ عبور کند.		+	−
۲	سهمی فقط از ناحیهٔ ۳ و ۴ عبور کند.		−	−

حالت ۲: سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند).

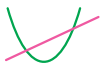
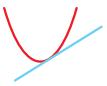
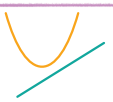
		شکل	شرایط			
			a	b	c	Δ
۱	فقط از ناحیهٔ ۱ نگذرد.		−	−	−	+
۲	فقط از ناحیهٔ ۲ نگذرد.		−	+	−	+
۳	فقط از ناحیهٔ ۳ نگذرد.		+	−	+	+
۴	فقط از ناحیهٔ ۴ نگذرد.		+	+	+	+

(c می‌تواند صفر هم باشد.)

حالت ۳: سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند. $\xrightarrow{\text{فقط کافیه که}}$ $P < 0$

۱۰ شرط آن‌که سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند، آن است که سهمی دو ریشهٔ هم‌علامت داشته باشد: $\Delta > 0$ و $P \geq 0$.

۱۱ وضعیت خط و سهمی نسبت به هم: معادلهٔ $\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{سهمی}} = \underbrace{mx+h}_{\text{خط}}$ را تشکیل می‌دهیم. بعد آن را به صورت $ax^2+b'x+c'=0$ درمی‌آوریم. دلتای این معادله، وضعیت خط و سهمی را مشخص می‌کند.

علامت Δ	وضعیت خط و سهمی	شکل
$\Delta > 0$	سهمی و خط در ۲ نقطه متقاطع‌اند.	
$\Delta = 0$	خط در یک نقطه بر سهمی مماس است.	
$\Delta < 0$	سهمی و خط، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.	

معادلات گویا و گنگ

۱ بعد از حل معادلهٔ گویا، حتماً چک کنید که جواب‌های به دست آمده، ریشه‌های مخرج نباشند.

۲ اگر شخص اول کاری را به تنهایی در A ساعت، شخص دوم همان کار را در B ساعت و هر دو با هم در C ساعت انجام دهند، رابطهٔ روبه‌رو بین A، B و C برقرار است:

$$\underset{\text{زمان نفر اول}}{\frac{1}{A}} + \underset{\text{زمان نفر دوم}}{\frac{1}{B}} = \underset{\text{زمان هر دو نفر با هم}}{\frac{1}{C}}$$

۳ اگر وسیله‌ای مسیری به طول x را با سرعت v_1 برود و با سرعت v_2 برگردد، با توجه به رابطهٔ $t=\frac{x}{v}$، داریم:

$$t_{\text{رفت}} \pm t_{\text{برگشت}} = \underset{\text{سؤال می‌ده}}{\text{یه عدد}} \Rightarrow \frac{x_{\text{ر}}}{v_{\text{ر}}} \pm \frac{x_{\text{ب}}}{v_{\text{ب}}} = \text{یه عدد}$$

۴ بعد از حل معادلهٔ گنگ، جواب‌های به دست آمده را در معادلهٔ اولیه چک کنید.

۵ اگر جمع چند رادیکال صفر شد، عبارت داخل تک‌تک آن‌ها صفر است:

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=0 \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$$

۶ بعضی از معادلات گنگ نیاز به حل ندارند. مثلاً $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}=x$، چون دامنه‌ها به ترتیب $x \geq 3$ و $x \leq 1$ است که اشتراکشان تهی می‌شود.

۷ در معادلاتی که جنس عبارت‌های دو طرف تساوی، مثل هم نیست، معمولاً سراغ روش هندسی می‌رویم. مثلاً در معادله‌های $\underbrace{2^x}_{\text{نمایی}}=\underbrace{x^2-1}_{\text{سهمی}}$ یا $\underbrace{\sin x}_{\text{مثلثاتی}}=\underbrace{\log x}_{\text{لگاریتمی}}$.

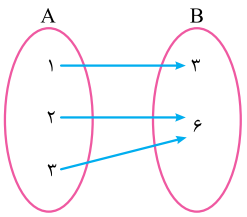
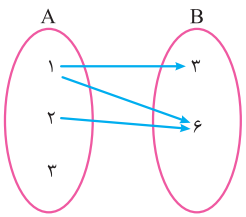
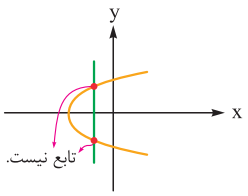
۸ روش هندسی، **تعداد** و **محدودهٔ تقریبی** جواب‌ها را به ما می‌دهد، ولی جواب دقیق را معمولاً به ما نمی‌دهد.

تابع

مقدمات (تعریف تابع، دامنه و برد)

۱ تابع دستگاهی است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد.

۲ روش‌های نمایش تابع:

	روش نمایش	شرط تابع‌بودن	مثال
۱	پیکانی (نمودار وِن)	از هر عضو مجموعهٔ مبدأ، باید دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.	 تابع است.  تابع نیست.
۲	زوج مرتبی	مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها نباید برابر باشد. اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد.	$\{(۱,۲),(۲,۳),(-۱,۳)\} \rightarrow$ تابع است. $\{(۱,۲),(۳,۵),(۱,۶)\} \rightarrow$ تابع نیست.
۳	جدولی	مؤلفه‌های سطر مربوط به xها نباید یکسان باشد. اگر مؤلفه‌های x یکسان داشتیم، مؤلفه‌های y شان هم باید یکسان باشد.	x: ۲ ۳ ۵ ۳ y: −۱ ۷ ۴ ۲ تابع نیست.
۴	نموداری	اگر خطی موازی محور yها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار مربوط به یک تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، تابع است.	
۵	توصیفی	با توجه به جملهٔ توصیفی، اگر به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی داشته باشیم، آن رابطه تابع است.	رابطه‌ای که به هر فرد، کد ملی‌اش را نسبت می‌دهد. { ورودی: انسان‌ها، خروجی: کد ملی } چون هر شخص نمی‌تواند بیش از یک کد ملی داشته باشد، پس تابع است.
۶	ضابطه‌ای	اگر به ازای هر x، فقط یک خروجی داشته باشیم، تابع است. روابطی که در آن‌ها y تنها می‌شود، حتماً تابع هستند؛ مثل $\underset{\text{تنها}}{y} = \log_۲ x + \cos\frac{۱}{x}$	در رابطهٔ $y^۲ = x + ۱$، اگر $x = ۱$ را بدهیم، ۲تا خروجی می‌دهد: $y^۲ = ۲ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲} \rightarrow$ تابع نیست.

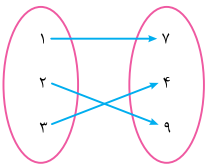
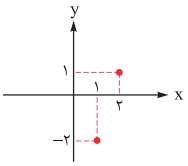
۳ **سؤالات تابع‌نویسی:** از ما می‌خواهد عبارتی (مثل محیط، مساحت و ...) را برحسب یک متغیر (مثل ضلع، شعاع و ...) بنویسیم.

مثال تابع مساحت مربع برحسب محیط آن؟

پاسخ می‌دانیم $P=۴a$ و $S=a^۲$ است. از $P=۴a$ نتیجه می‌گیریم $a=\frac{P}{۴}$. حالا این تساوی را در رابطهٔ مساحت قرار می‌دهیم:

$$S=a^۲ \xrightarrow{a=\frac{P}{۴}} S=(\frac{P}{۴})^۲ \Rightarrow S=\frac{P^۲}{۱۶} \xrightarrow{\text{به شکل تابع}} S(P)=\frac{P^۲}{۱۶}$$

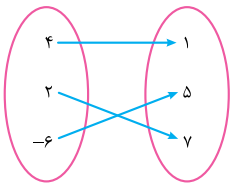
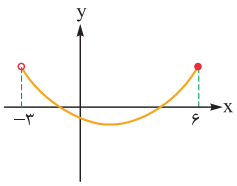
۴ **مقدار تابع در یک نقطه:**

روش نمایش تابع	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی	ضابطه‌ای
مثال		$f=\{(۱,۲),(۲,۶)\}$	x: ۱ ۲ ۳ y: −۳ ۶ ۲		f تابعی است که به هر عددی، مکعبش را نسبت می‌دهد.	$f(x)=\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۲x+۵}}$
مقدار تابع در $x=۲$	$f(۲)=۹$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۱$	$f(۲)=۲^۳=۸$	$f(۲)=\frac{۵}{۳}$

۵ نقاط برخورد مهم:

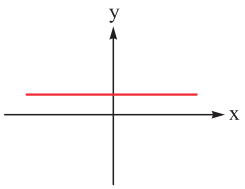
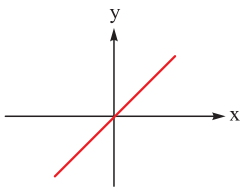
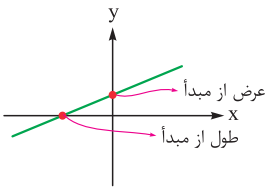
نقطهٔ برخورد تابع f با ...	راه حل	مختصات نقطه (نقاط)
محور xها	«y را صفر می‌دهیم» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$»	جواب‌های $f(x)=۰$ ↑ $(\ ,۰)$
محور yها	«x را صفر می‌دهیم» یا «مقدار $f(۰)$»	$(۰,f(۰))$
تابع g	حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ $\xleftarrow{\text{جواب‌ها}}$ $x_۱,\ldots$	$(x_۱,f(x_۱)),\ldots$
نیمساز ربع اول و سوم	حل معادلهٔ $f(x)=x$ $\xleftarrow{\text{جواب‌ها}}$ $x_۱,\ldots$	$(x_۱,x_۱),\ldots$

۶ محاسبهٔ دامنه در نمایش مختلف یک تابع (به‌جز نمایش ضابطه‌ای):

روش محاسبهٔ دامنه	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی
	همهٔ اعدادی که از آن‌ها فلش خارج شده	همهٔ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها	همهٔ اعداد سطر مربوط به x	تصویر نمودار روی محور xها	ورودی‌ها!
مثال		$f=\{(۵,۲),(۱,۳)\}$	x: ۱ −۴ ۶ y: ۶ ۵ ۹		تابعی که به هر عدد مربع کامل دورقمی، جذرش را نسبت می‌دهد.
دامنه	$D=\{۴,۲,-۶\}$	$D_f=\{۵,۱\}$	$D=\{۱,-۴,۶\}$	$D=(-۳,۶]$	دامنه $=\{۱۶,۲۵,\ldots,۸۱\}$

انواع تابع

۱ چند تابع خاص

تابع	ضابطه	نکته		نمودار	دامنه	برد
ثابت	$f(x) = c$ (c: عدد)	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج مرتب‌ها با هم برابر است. در نمایش ضابطه‌ای، ضرایب جملات شامل x باید صفر باشد.		یک خط افقی 	$\mathbb{R}$	C
همانی	$f(x) = x$	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. در نمایش ضابطه‌ای، ضریب x، یک و ضریب سایر جملات صفر است.		نیمساز ربع اول و سوم 	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
خطی	$f(x) = mx + h$	محل برخورد با محور yها $h \rightarrow$ (h: عرض از مبدأ)	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (m: شیب)		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

انتقال نمودار توابع

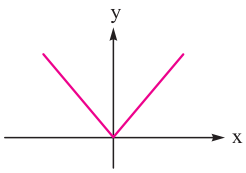
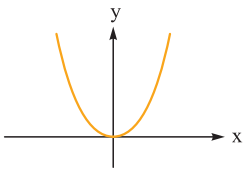
۱ انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض:

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.

تابع قدرمطلق به صورت $f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ نمایش داده می‌شود.

به توابعی که به ازای محدوده‌های مختلفی از دامنه، معادله‌های متفاوتی داشته باشند (مثل تابع قدرمطلق)، تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای) می‌گوییم.

۲ **چند تابع معروف با نمودارشان:**

ضابطه	$y=\|x\|$	$y=x^2$
نمودار		
دامنه	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
برد	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$

تساوی تابع

۱ شروط تساوی دو تابع f و g:
- الف) $D_f=D_g$ (دامنه‌ها قبل از ساده‌کردن باید محاسبه شوند.)
- ب) ضابطه‌های دو تابع را بتوانیم با کارهای جبری و ... مثل هم کنیم.

۲ در تساوی توابع حواستان به موارد زیر باشد:

الف) دامنهٔ تابع به فرم $y=\sqrt{AB}$ از حل نامعادلهٔ $AB\geq 0$ و دامنهٔ تابع به فرم $y=\sqrt{A}\times\sqrt{B}$ از اشتراک جواب نامعادله‌های $A\geq 0$ و $B\geq 0$ به دست می‌آید.

ب) توابع $y=A$ و $y=\frac{A\times B}{B}$ به شرطی با هم برابرند که B ریشه‌ای نداشته باشد. (B چندجمله‌ای است.)

پ) توابع $f(x)=\begin{cases} \frac{A\times B}{B} & B\neq 0 \\ C & B=0 \end{cases}$ و $g(x)=\cdots$ به شرطی برابرند که
اولاً: $g(x)=A$
ثانیاً: مقدار $g(x)$ به ازای ریشهٔ $B=0$، برابر با C شود.

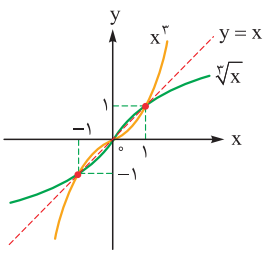
ت) $\log x^2=2\log|x|$ و $\log x^3=3\log x$

– تابع چندجمله‌ای و تابع درجه۳ –

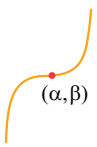
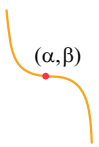
۱ توابع چندجمله‌ای:

				مثال
ضابطه	$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-1}+\cdots$			$f(x)=2x^5-8x^4+x-7$
درجه	بزرگ‌ترین توان x، درجهٔ تابع چندجمله‌ای است.			درجهٔ تابع بالایی، ۵ است.
توابع معروف	$y=\overset{c\neq 0}{c}$ درجه‌صفر (ثابت)	$y=ax+b$ درجه‌یک (خطی)	$y=ax^2+bx+c$ درجه‌دو (سهمی)	
نکات	۱) دامنه‌شان $\mathbb{R}$ است.			$f(x)=x^8-2x^3+1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$
	۲) اگر درجه فرد باشد، بردش هم $\mathbb{R}$ است.			$f(x)=x^7-3x^6+2x^2-1 \Rightarrow R_f=\mathbb{R}$
	۳) اگر درجه زوج باشد، بردش به صورت $[k,+\infty)$ یا $(-\infty,k]$ است.			$f(x)=x^2-6x+1$
	۴) برای تابع $y=0$، درجه تعریف نمی‌شود.			

۲ مقایسهٔ تابع لر و سهمی:

ضابطه	نمودار	دامنه و برد
$f(x)=x^3$		$D_f=R_f=\mathbb{R}$
$g(x)=x^2$		$D_g=\mathbb{R}$ $R_g=[0,+\infty)$

۳ نمودار تابع درجه‌سوم $y=a(x-\alpha)^3+\beta$:

علامت a	$a>0$	$a<0$
یکنوایی	اکیداً صعودی	اکیداً نزولی
مرکز تقارن	(α,β)	(α,β)
نمودار		

۴ برای ساده‌کردن ضابطهٔ توابع درجه۳، باید اتحاد مکعب را بلد باشیم:

صورت کلی اتحاد مکعب	$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$
مثال‌هایی که در این قسمت زیاد به کار می‌آیند.	$(x\pm 1)^3=x^3\pm 3x^2+3x\pm 1$
	$(x\pm 2)^3=x^3\pm 6x^2+12x\pm 8$
	$(2x\pm 1)^3=8x^3\pm 12x^2+6x\pm 1$

یکنوایی

۱ انواع یکنوایی:

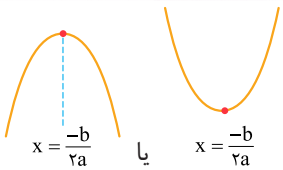
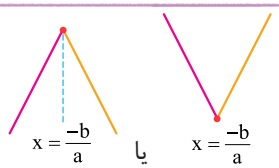
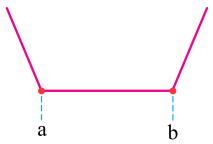
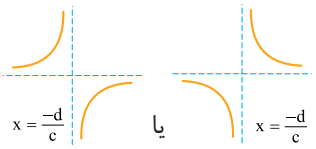
	نوع یکنوایی	وضعیت نمودار	مثال نموداری	تعریف ریاضی
یکنوا اکید	صعودی اکید	فقط رو به بالا می‌رود.		$a>b \Leftrightarrow f(a)>f(b)$
	نزولی اکید	فقط رو به پایین می‌رود.		$a>b \Leftrightarrow f(a)<f(b)$
یکنوا	صعودی	یا رو به بالا می‌رود یا ثابت است.		$a>b \Rightarrow f(a)\geq f(b)$
	نزولی	یا رو به پایین می‌رود یا ثابت است.		$a>b \Rightarrow f(a)\leq f(b)$
ثابت	هم صعودی هم نزولی	روی یک خط افقی است.		$\forall a,b\in D_f \Rightarrow f(a)=f(b)$
غیریکنوا	قسمتی رو به بالا و قسمتی رو به پایین			

۲ تابعی که هم صعودی باشد هم نزولی، تابع ثابت است.

۳ معروف‌ترین توابع یکنوا:

اسم تابع	ضابطه	شرط اکیداً صعودی‌بودن	شرط اکیداً نزولی‌بودن
خطی	$y = mx + h$	$m > 0$	$m < 0$
درجه۳	$y = a(x+\alpha)^3 + \beta$	$a > 0$	$a < 0$
رادیکالی	$y = \sqrt{ax+b} + c$	$a > 0$	$a < 0$
نمایی	$y = a^x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
لگاریتمی	$y = \log_a x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
آبشاری	$y = \lvert x-a \rvert - \lvert x-b \rvert$	(صعودی) $b \geq a$	(نزولی) $a \geq b$

۴ بازه‌های یکنوای توابع غیریکنوایی معروف:

تابع	ضابطه	نمودار	نقطهٔ مرزی بازه‌های یکنوایی	بازه‌های یکنوایی
سهمی	$y = ax^2 + bx + c$		رأس	$(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ یا $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$
قدرمطلقی‌خطی	$y = \pm \lvert ax+b \rvert$		ریشهٔ داخل قدرمطلق	$(-\infty, \frac{-b}{a}]$ یا $[\frac{-b}{a}, +\infty)$
گلدانی	$y = \lvert x-a \rvert + \lvert x-b \rvert$		ریشه‌های داخل قدرمطلق	اکید: $(-\infty, a]$ یا $[b, +\infty)$ غیراکید: $(-\infty, b]$ یا $[a, +\infty)$
هموگرافیک	$y = \frac{ax+b}{cx+d}$		ریشهٔ مخرج	$(-\infty, \frac{-d}{c})$ یا $(\frac{-d}{c}, +\infty)$

۵ برای بررسی یکنوایی تابع $f(x)=ax+b+|a'x+b'|$، اول آن را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} mx+h & x\le \frac{-b'}{a'} \\ m'x+h' & x\ge \frac{-b'}{a} \end{cases}$$

حالا داریم:

علامت شیب ضابطه‌ها		نمودار	وضعیت یکنوایی	نتیجه
$m'>0$	$m>0$		اکیداً صعودی	شرط اکیداً یکنوایی: $mm'>0$
$m'<0$	$m<0$		اکیداً نزولی	
$m'<0$	$m>0$		غیریکنوا	شرط غیریکنوایی: $mm'<0$
$m'>0$	$m<0$		غیریکنوا	
$m'>0$	$m=0$		صعودی	شرط یکنوایی: $mm'\ge 0$
$m'=0$	$m>0$		صعودی	
$m'<0$	$m=0$		نزولی	
$m'=0$	$m<0$		نزولی	

۶ اگر f تابعی اکیداً یکنوا باشد، برای حل نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$ دو حالت پیش می‌آید:

f اکیداً صعودی	در نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$، با حذف fها، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند: $a>b$
f اکیداً نزولی	در نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$، با حذف fها، جهت نامساوی تغییر می‌کند: $a<b$

۷ **یکنوایی و اعمال جبری:**

f	g	f + g	f − g	fg
ص	ص	ص		
ص	ن		ص	
ن	ص		ن	
ن	ن	ن		

تذکر خانه‌هایی که خالی هستند، هر سه حالت (صعودی، نزولی و غیریکنوا) می‌تواند برایشان رخ دهد.

۸ **تعیین وضعیت یکنوایی fog:** اگر صعودی‌بودن را + و نزولی‌بودن را − در نظر بگیریم، برای تعیین وضعیت یکنوایی fog، علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم؛ مثلاً اگر f صعودی و g نزولی باشد، آن‌گاه:

$\underset{+}{f}\,o\,\underset{-}{g} \Rightarrow$ مثبت در منفی می‌شود منفی $\xrightarrow{\text{پس}}$ fog نزولی است.

fog	g	f
صعودی	صعودی	صعودی
نزولی	نزولی	صعودی
نزولی	صعودی	نزولی
صعودی	نزولی	نزولی

۹ اگر $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی (نزولی) باشد، آن‌گاه:

- $f(-x)$ و $-f(x)$، اکیداً نزولی‌اند (صعودی‌اند).
- تابع $\frac{1}{f(x)}$ به شرطی که برد f تغییر علامت ندهد، اکیداً نزولی (صعودی) است، ولی اگر f تغییر علامت بدهد، تابع $\frac{1}{f}$ غیریکنوا می‌شود.

ترکیب توابع

۱ نکات اولیهٔ fog:

معادل fog(x)	$f(g(x))$
ضابطهٔ fog(x)	جای xهای تابع f، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.
مقدار fog(a)	دو مرحله دارد: اول $g(a)$ (مثلاً می‌شود k)، بعد $f(k)$
دامنهٔ fog	**راه اول:** $D_{fog} = \{\underbrace{x \in D_g}_{\text{شرط (۱)}} \cap \underbrace{g(x) \in D_f}_{\text{شرط (۲)}}\}$
	راه دوم: ضابطهٔ fog را بدون هیچ ساده‌کردنی تشکیل می‌دهیم و سپس دامنهٔ آن را حساب می‌کنیم.
برد fog	مرحلهٔ ۱: برد تابع g را حساب می‌کنیم (مثلاً می‌شود بازهٔ I).
	مرحلهٔ ۲: برد تابع f با دامنهٔ I را حساب می‌کنیم.

۲

دامنهٔ fog زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع داخلی یعنی g است.	$D_{fog} \subseteq D_g$
برد fog زیرمجموعهٔ برد تابع بیرونی یعنی f است.	$R_{fog} \subseteq R_f$

۳ وقتی از بین f، g و fog، ۲تا را داریم و سومی را می‌خواهیم:

f	g	fog	راه حل
✓	✓	؟	باید $f(g(x))$ را تشکیل دهیم.
؟	✓	✓	$g(x)$ را مساوی t قرار می‌دهیم. x را برحسب t حساب می‌کنیم و به جای xهای داخل $fog(x)$، رابطهٔ x برحسب t را قرار می‌دهیم.
✓	؟	✓	در ضابطهٔ f، جای xهایش $g(x)$ قرار می‌دهیم. عبارت به دست آمده را با fog داده‌شده برابر قرار می‌دهیم.

۴ ترکیب f و f^{-1}، همواره تابعی همانی است.

	ضابطه	دامنه	نمودار
حالت ۱	$(fof^{-1})(x)=x$	$D_{f^{-1}}=R_f$	نیمساز ناحیهٔ اول و سوم با دامنهٔ R_f
حالت ۲	$(f^{-1}of)(x)=x$	D_f	نیمساز ناحیهٔ اول و سوم با دامنهٔ D_f

۵ شرط لازم و کافی برای برابربودن fof^{-1} و $f^{-1}of$ آن است که $D_f=R_f$.