مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله ششم

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

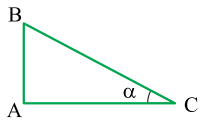
شروع دوازدهم از تابستان

این مرورنامه، ویژهٔ مباحث جدید آزمون است. مرورنامهٔ مباحثی که در آزمون‌های قبل به آن‌ها پرداخته شده، در پنل کاربری شما قابل دریافت است و در این فایل از تکرار آن پرهیز شده است.

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
حسابان و ریاضیات پایه	پایهٔ دهم: فصل ۲ صفحهٔ ۲۸ تا ۴۶ پایهٔ یازدهم: فصل ۴ (درس‌های ۱، ۲و ۳) صفحهٔ ۹۱ تا ۱۰۹ پایهٔ دوازدهم: فصل ۱ (درس ۲) فصل ۲ (درس ۱) صفحهٔ ۱۳ تا ۳۴	۲	۱۰	علی شهرابی	مهدی خوشنویس

مقدمات

۱ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

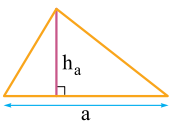
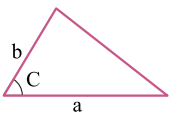
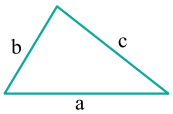
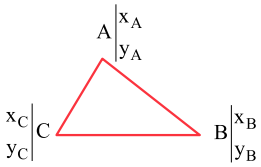


نسبت	تعریف	برای زاویهٔ α در شکل مقابل
سینوس	$\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$	$\sin\alpha = \frac{AB}{BC}$
کسینوس	$\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$	$\cos\alpha = \frac{AC}{BC}$
تانژانت	$\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$	$\tan\alpha = \frac{AB}{AC}$
کتانژانت	$\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$	$\cot\alpha = \frac{AC}{AB}$

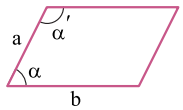
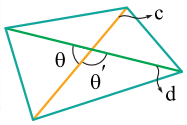
۲ نسبت‌های مثلثاتی زوایا مهم:

	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	ت.ن
cot	ت.ن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

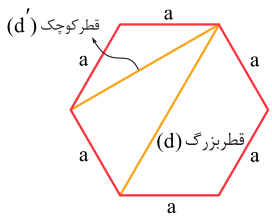
۳ مساحت مثلث:

	مقادیری که داریم	فرمول		شکل
۱	قاعده و ارتفاع وارد بر آن	$\frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$	$\frac{a.h_a}{۲}$	
۲	دو ضلع و زاویهٔ بین	سینوس زاویهٔ بین دو ضلع × حاصل‌ضرب دو ضلع × $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$	
۳	سه ضلع (هرون)	$\sqrt{\underbrace{p}_{\text{نصف محیط}}(p-a)(p-b)(p-c)}$		
۴	مختصات سه رأس	$\frac{\lvert(x_Ay_B+x_By_C+x_Cy_A)-(x_By_A+x_Cy_B+x_Ay_C)\rvert}{۲}$		

۴ مساحت چهارضلعی:

	مقادیری که داریم	فرمول		شکل
۱	دو ضلع و زاویهٔ بین در متوازی‌الاضلاع	سینوس زاویهٔ بین دو ضلع × حاصل‌ضرب دو ضلع	$ab\sin\alpha$ ↓ یا α'	
۲	دو قطر و زاویهٔ بین در هر چهارضلعی محدب	سینوس زاویهٔ بین دو قطر × حاصل‌ضرب دو قطر × $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}cd\sin\theta$ ↓ یا θ'	

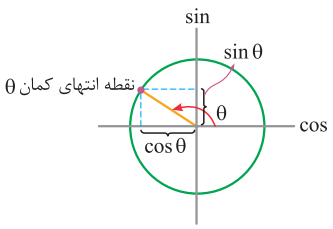
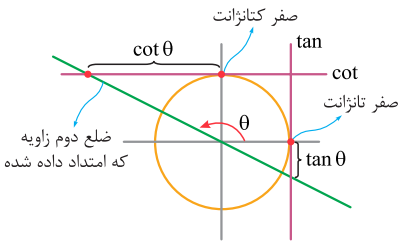
۵ شش‌ضلعی منتظم:

قطر بزرگ	قطر کوچک	مساحت	
$d = 2a$	$d' = a\sqrt{3}$	$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع	

۶ رابطهٔ سینوس‌ها و کسینوس‌ها در مثلث:

اسم رابطه	فرمول	زمان استفاده
سینوس‌ها	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$	رابطهٔ بین دو اضلاع و زوایای روبه‌رویشان
کسینوس‌ها	$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\hat{A}$	رابطهٔ بین سه ضلع و یکی از زوایا

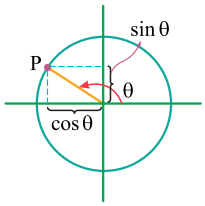
۷ نمایش نسبت‌های مثلثاتی روی دایره:

نمایش sin و cos	برای آن‌که سینوس و کسینوس یک زاویهٔ دلخواه روی دایره مثلثاتی را نشان دهیم کافی است از نقطهٔ انتهای کمانش به محورهای سینوس و کسینوس عمود کنیم.	
نمایش tan و cot	برای نمایش تانژانت و کتانژانت یک زاویه کافی است ضلع دوم زاویه را از دو طرف امتداد دهیم تا محورهای تانژانت و کتانژانت را قطع کند. نقطهٔ برخوردش با این محورها، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را نشان می‌دهد.	

۸ علامت نسبت‌های مثلثاتی در ۴ ناحیه دایره مثلثاتی:

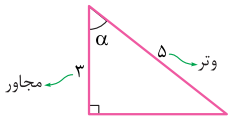
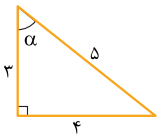
ناحیه	محدوده	sin	cos	tan	cot
اول	$0^\circ < x < 90^\circ$ یا $0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
دوم	$90^\circ < x < 180^\circ$ یا $\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	−	−	−
سوم	$180^\circ < x < 270^\circ$ یا $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	−	−	+	+
چهارم	$270^\circ < x < 360^\circ$ یا $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	−	+	−	−

۹ مختصات هر نقطه روی دایره مثلثاتی به صورت $P(\underbrace{\cos\theta}_{x_P}, \underbrace{\sin\theta}_{y_P})$ است.

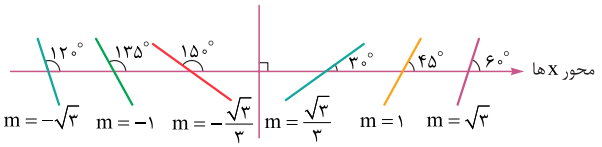


۱۰ محاسبهٔ سایر نسبت‌های مثلثاتی با داشتن یکی از آن‌ها (بدون استفاده از اتحادها):

مثلاً فرض کنید $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ و α دو ربع چهارم است و $\cot\alpha$ را می‌خواهیم. ابتدا با این‌که α در ربع چهارم است کاری نداریم.

گام ۱	با توجه به تعریف کسینوس که می‌شد اندازهٔ ضلع مجاور به وتر، مثلث قائم‌الزاویه‌ای مثل شکل روبه‌رو می‌کشیم.	
گام ۲	ضلع سوم را با فیثاغورس درمی‌آوریم: $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$	
گام ۳	حالا کتانژانت α را طبق تعریف می‌نویسیم و علامتش را با توجه به قرارداشتن آن در ربع چهارم می‌گذاریم.	$\cot\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ربع ۴}} \frac{-3}{4}$

۱۱ تانژانت زاویه‌ای که هر خطی با جهت مثبت محور xها می‌سازد، برابر با شیب آن خط است: $m = \tan\alpha$

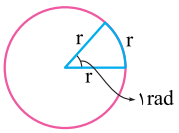
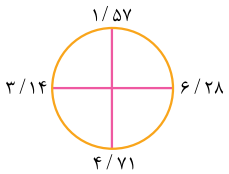


۱۲ اتحادهای اولیهٔ مثلثات:

	صورت اصلی اتحاد	صورت فرعی اتحاد	
۱	$\sin^2 x+\cos^2 x=1$	$1-\cos^2 x=\sin^2 x$	$1-\sin^2 x=\cos^2 x$
۲	$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x=\frac{1}{\tan x}$	$\tan x.\cot x=1$
۳	$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$		
۴	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$		
۵	$1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$		

رادیان

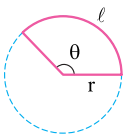
۱۳ نکات اولیه رادیان:

۱	تعریف ۱ رادیان	زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی که طولش برابر با شعاع دایره است:	
۲	تقریب ۱ رادیان برحسب درجه	$1\,rad \simeq 57/3^\circ$	
۳	مرزها برحسب رادیان		
۴	رابطهٔ بین درجه و رادیان	$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$ یا (π رادیان = ۱۸۰ درجه)	
۵	تبدیل سریع درجه به رادیان و برعکس	$D \underset{\times\frac{180}{\pi}}{\overset{\times\frac{\pi}{180}}{\rightleftarrows}} R$	

۱۴ زوایای مهم برحسب درجه و رادیان:

15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

۱۵ طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ θ رادیان در دایره‌ای به شعاع r:

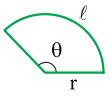


$\ell = r\theta$
↓
برحسب رادیان

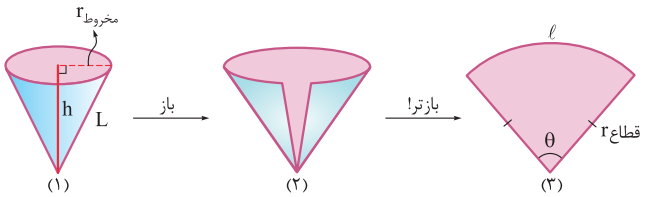
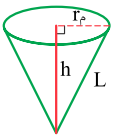
۱۶ در سؤالات «چرخیدن دو قرقره متصل به یک تسمه» یا «چرخیدن دو چرخ وسیله‌ای که چرخ‌های نابرابر دارد»، شروع حل، با برابر قراردادن طول کمان‌های طی شده است:

$\ell_1=\ell_2 \Rightarrow r_1\theta_1=r_2\theta_2 \Rightarrow \cdots$

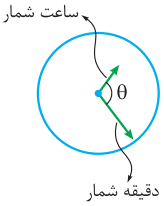
۱۷ قطاع:

شکل	محیط	مساحت
	$\ell + ۲r$ یا $r\theta + ۲r$	$\frac{۱}{۲}\theta r^{۲}$

۱۸ گستردهٔ مخروط:

شکل		
روابط بین قطاع و مخروط	۱) مولد مخروط با شعاع قطاع برابر است: $L = r_{قطاع}$ ۲) محیط قاعده مخروط با طول کمان قطاع برابر است: $P_{قاعده} = \ell \Rightarrow ۲\pi r_{م} = r_{قطاع}\theta$	
دو رابطهٔ مهم در مخروط	۱) $L = \sqrt{r_{م}^{۲} + h^{۲}}$ ۲) $S_{جانبی} = \pi r_{م} L$	

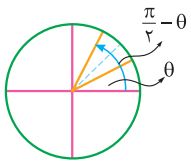
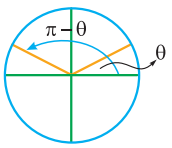
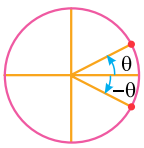
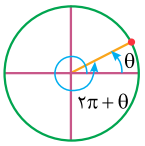
۱۹ زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت h و m دقیقه:



$\Rightarrow$ به درجه $\theta = \left|\frac{۱۱}{۲}m - ۳۰h\right|$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$

۲۰ زوایای متمم، مکمل، قرینه و هم پایان:

	متمم	مکمل	قرینه	هم‌پایان
تعریف	دو زاویه که مجموعشان ۹۰° است.	دو زاویه که مجموعشان ۱۸۰° است.	قرینه θ یعنی $-\theta$	زوایایی که اختلافشان مضربی از ۳۶۰° است.
برای زاویه θ	$\frac{\pi}{۲}-\theta$ یا $۹۰^\circ-\theta$	$\pi-\theta$ یا $۱۸۰^\circ-\theta$	$-\theta$	$۲k\pi+\theta$ یا $۳۶۰k+\theta$
روی دایره				
	قرینه نسبت به $y=x$	قرینه نسبت به محور yها	قرینه نسبت به محور xها	یک یا چند دور کامل می‌زند.
رابطه با نسبت‌های زاویهٔ θ	sin یکی با cos دیگری و tan یکی با cot دیگری برابر است و بالعکس.	sinها برابر و بقیه قرینه هم هستند.	cosها برابر و بقیه قرینه هم هستند. (کسینوس منفی را می‌خورد!)	همه‌چی ثابت می‌ماند.
مثال	$\sin ۲۰^\circ = \cos ۷۰^\circ$	$\sin ۱۲۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$	$\cos(-۳۰^\circ) = \cos ۳۰^\circ$	$\sin ۳۹۰^\circ = \sin ۳۰^\circ$

۲۱ نوشتن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$ برحسب زویهٔ α در ۳ مرحله:

مرحله ۱	$۰ <$ زاویه $< ۲\pi$	اگر کمان از ۲π بیشتر بود، مجاز هستیم مضارب ۲π را از آن کم کنیم تا به زاویه‌ای در محدودهٔ ۰ تا ۲π برسیم.
مرحله ۲	تغییر اسم می‌دهد یا نه	اگر π یا ۲π داشتیم، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود ولی اگر $\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۳\pi}{۲}$ داشتیم، sin به cos (و بالعکس) و tan به cot (و بالعکس) تبدیل می‌شود.
مرحله ۳	علامت + یا −	α را زاویه‌ای در ربع اول (مثلاً ۱۰°) در نظر می‌گیریم و با توجه به آن، محدودهٔ زاویهٔ $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$ را مشخص و علامت نسبت را تعیین می‌کنیم.

مثال $\sin(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)$:

مرحلهٔ ۱: ۲π را از $\frac{۷\pi}{۲}$ کم می‌کنیم:

$$\sin(\underbrace{۲\pi}_{\text{حذف}} + \frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = \sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)$$

مرحلهٔ ۲: با فرض $\alpha = ۱۰^\circ$، زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۲} - \alpha$ می‌شود ۲۶۰° که در ربع ۳ قرار دارد و در این ربع sin منفی است.

پس:

$$\sin(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha) = \underset{\text{مرحلهٔ ۳}}{-}\overset{\text{مرحلهٔ ۲}}{\cos}\alpha$$

۲۲ جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$ (α در ربع اول قرار دارد.):

	$\frac{\pi}{۲}-\alpha$	$\frac{\pi}{۲}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{۳\pi}{۲}-\alpha$	$\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$	$۲\pi-\alpha$	$۲\pi+\alpha$
تغییر اسم می‌دهد یا نمی‌دهد ↑ + ↑ −	+	+	−	−	+	+	−	−
ناحیه (ربع) زاویهٔ جدید	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۱
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tan	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$
cot	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$

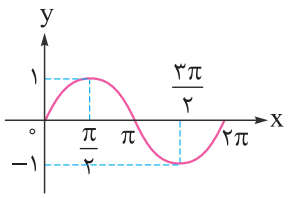
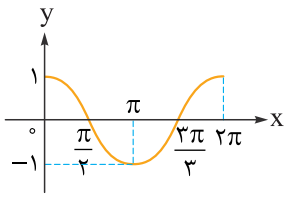
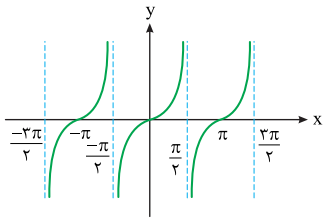
۲۳ برای آن‌که کسرهایی به فرم $\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{c\sin\alpha+d\cos\alpha}$ را برحسب $\tan\alpha$ بنویسیم، باید همهٔ نسبت‌ها را به $\cos\alpha$ تقسیم کنیم:

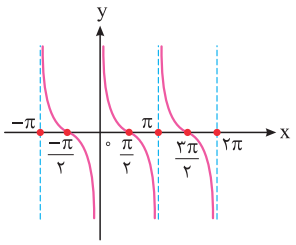
$$\frac{\frac{a\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{b\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{c\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{d\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{a\tan\alpha+b}{c\tan\alpha+d}$$

۲۴ برای ساده‌کردن عبارت‌هایی به فرم $a\sin^۲x+b\sin x\cos x+c\cos^۲x=d$، دو طرف را بر $\cos^۲x$ (یا $\sin^۲x$) تقسیم می‌کنیم تا بتوانیم عبارت را برحسب $\tan x$ (یا $\cot x$) بنویسیم.

توابع مثلثاتی

۲۵ نمودار توابع مثلثاتی:

ضابطهٔ تابع		دامنه	بُرد	دورهٔ تناوب	طول نقاط max	طول نقاط min	صفرهای تابع
$y=\sin x$		$\mathbb{R}$	$[-۱,۱]$	۲π	$۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$	$k\pi$
$y=\cos x$		$\mathbb{R}$	$[-۱,۱]$	۲π	$۲k\pi$	$۲k\pi+\pi$	$k\pi+\frac{\pi}{۲}$
$y=\tan x$		$\mathbb{R}-\{(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\}$	$\mathbb{R}$	π	-	-	$k\pi$

صفرهای تابع	نقاط min	نقاط max	دورهٔ تناوب	بُرد	دامنه		ضابطهٔ تابع
$k\pi+\frac{\pi}{۲}$	-	-	π	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}-\{k\pi\}$		$y=\cot x$

توابع متناوب

۲۶ می‌گوییم f تابعی متناوب است، اگر عدد مثبتی مثل T پیدا شود که هر دو شرایط زیر برقرار باشد:

- $f(x+T)=f(x)$
- اگر $x\in D_f$ بود، آن $(x\pm T)\in D_f$ باشد.

به کوچک‌ترین مقدار مثبت T، دورهٔ تناوب تابع می‌گوییم.

۲۷ اگر مساحت بین تابع متناوب f و محور xها در بازه‌ای به طول T برابر s باشد، مساحت بین تابع f و محور xها در بازه‌هایی به طول $k\times T$ (عدد طبیعی)، برابر با $k\times s$ است.

۲۸ دورهٔ تناوب‌هایی که باید حفظ باشیم.

جنس تابع	توضیح	قیافه	دورهٔ تناوب	مثال
sin , cos	توان فرد	$\cos^{(۲x+۱)}(ax)\,,\,\sin^{(۲x+۱)}(ax)$	$\frac{۲\pi}{\lvert a\rvert}$	$\sin ۳x \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳}$
	توان زوج و قدرمطلق	$\cos^{۲x} ax\,,\,\sin^{۲x} ax$ $\lvert\cos ax\rvert\,,\,\lvert\sin ax\rvert$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$	$\sin^{۴} ۶x \Rightarrow \frac{\pi}{۶}$ $\lvert\cos \pi x\rvert \Rightarrow \frac{\pi}{\pi}=۱$
tan , cot	توان فرد توان زوج قدرمطلق	$\cot^{(۲x+۱)}(ax)\,,\,\tan^{(۲x+۱)}(ax)$ $\cot^{۲x} ax\,,\,\tan^{۲x} ax$ $\lvert\cot ax\rvert\,,\,\lvert\tan ax\rvert$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$	$\tan^{۳} ۲x \Rightarrow \frac{\pi}{۲}$ $\cot^{۲} \frac{x}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{\frac{۱}{۴}}=۴\pi$ $\lvert\tan \frac{\pi}{۲}x\rvert \Rightarrow \frac{\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۲$
براکتی		$ax-[ax]$ $[ax]+[-ax]$	$\frac{۱}{\lvert a\rvert}$	$۲x-[۲x] \Rightarrow \frac{۱}{۲}$ $[\frac{x}{۳}]+[\frac{-x}{۳}] \Rightarrow \frac{۱}{\frac{۱}{۳}}=۳$
		$(-۱)^{[ax]}$	$\frac{۲}{\lvert a\rvert}$	$(-۱)^{[\frac{۲}{۳}x]} \Rightarrow \frac{۲}{\frac{۲}{۳}}=۳$

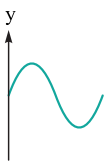
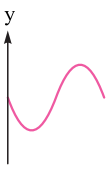
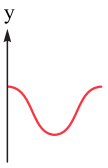
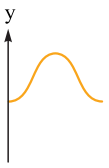
۲۹ برای عبارت‌های به فرم $a\sin(bx+d)+c$ و $a\cos(bx+d)+c$، داریم:

	فرمول	فرمول به فارسی!	مثال در $۲\sin(۶x)-۵$
max	$\lvert a\rvert+c$	عدد بیرونی +	ضریب پشت sin یا cos		$\lvert ۲\rvert+(-۵)=-۳$
min	$-\lvert a\rvert+c$	عدد بیرونی +	ضریب پشت sin یا cos	$-\lvert ۲\rvert+(-۵)=-۷$

۳۰ به دست آوردن ضرایب مجهول در توابع به فرم $y=a\sin(bx)+c$ یا $y=a\cos(bx)+c$:

گام	چیکار می‌کنیم؟	توضیح
۱	ساده‌کردن	اگر ضابطه ساده می‌شد، حتماً ساده می‌کنیم. مثلاً جای $۴\sin(\frac{\pi}{۲}-x)$ می‌نویسیم $۴\cos x$.
۲	دورهٔ تناوب	اگر از روی شکل دورهٔ تناوب معلوم بود، $\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}$ را با آن برابر قرار می‌دهیم تا b به دست آید.
۳	min , max	اگر مقدار min و max روی نمودار معلوم بود، از معادلات $max=\lvert a\rvert+c$ و $min=-\lvert a\rvert+c$، مقدار $\lvert a\rvert$ و c را حساب می‌کنیم.
۴	نقطهٔ‌کمکی	اگر مختصات نقطه‌ای از نمودار معلوم بود، آن را در ضابطه جای‌گذاری می‌کنیم تا یک معادله به ما بدهد.

۳۱ پیداکردن علامت a و b در توابع $y=a\sin(bx)+c$ و $y=a\cos(bx)+c$

	نمودار سینوسی		نمودار کسینوسی	
شکل نمودار در سمت راست محور yها				
شبیه به ...	صعودی یا مثل $\sin x$	نزولی یا مثل $-\sin x$	نزولی یا مثل $\cos x$	صعودی یا مثل $-\cos x$
علامت a و b	هم‌علامت‌اند $(ab>۰)$	ناهم‌علامت‌اند. $(ab<۰)$	$a>۰$	$a<۰$