مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳

رشته ریاضی

پایــهٔ دوازدهم

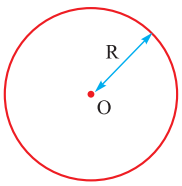
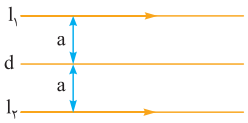
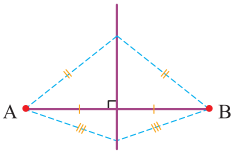
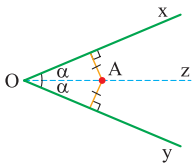
مرحله ششم

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
هندسه	دهم فصل ۱ صفحهٔ ۹ تا ۲۷ دوازدهم فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۹ تا ۲۱	۲	۸	علیرضا نصراللهی	محسن فراهانی بردیا نصیری

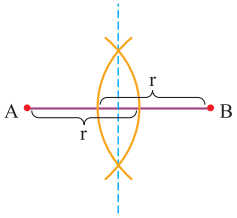
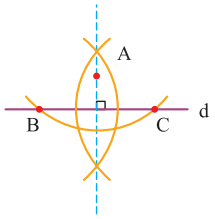
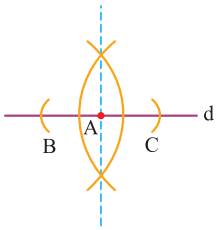
ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

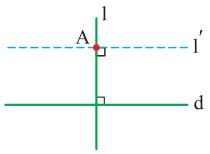
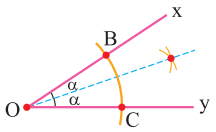
شروع دوازدهم از مهر

مکان هندسی‌های معروف

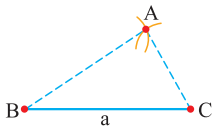
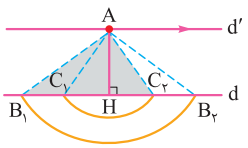
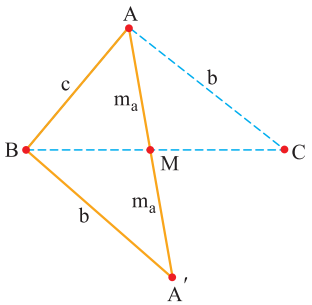
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت مانند O به فاصلهٔ معلوم R باشند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ ثابت a از خط d قرار دارند، دو خط به موازات d و به فاصلهٔ a از آن می‌باشد.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط مانند AB به یک فاصله باشند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.	
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از اضلاع یک زاویه مانند $x\hat{o}y$ به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.	

رسم‌های پایه و معروف

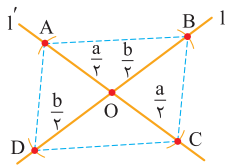
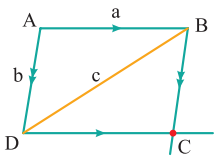
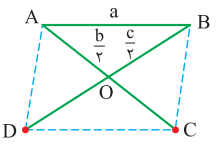
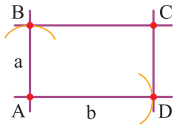
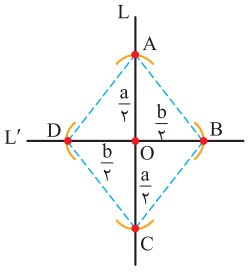
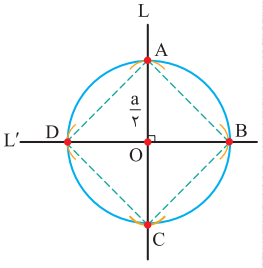
عمودمنصف یک پاره‌خط	دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ بیش از نصف طول پاره‌خط AB $(r \geq \frac{AB}{2})$ باز کرده و به مراکز A و B کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخوردها را به هم وصل می‌کنیم تا عمودمنصف حاصل شود.	
خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن	ابتدا به مرکز A کمانی می‌زنیم تا خط d را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. سپس به کمک رسم عمودمنصف یک پاره‌خط، عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم تا خط عمود مطلوب حاصل شود.	
خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن	ابتدا به مرکز A کمانی می‌زنیم تا پاره‌خط BC را از آن جدا کند. سپس به کمک رسم عمودمنصف، یک پاره‌خط عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم تا خط عمود مطلوب حاصل شود.	

خط موازی از یک نقطه	ابتدا خط عمود l را به کمک مطالب قبلی بر d وارد می‌کنیم. سپس از نقطهٔ A روی l عمود l' را خارج می‌کنیم. دو خط عمود بر یک خط (d , L') با هم موازی‌اند. (اگر نقطهٔ A روی خط بود، چه؟)	
نیمساز یک زاویه	به مرکز O کمانی دلخواه رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در B و C قطع کند. سپس به مراکز B و C و شعاع بیش از نصف BC کمان‌هایی رسم می‌کنیم. از O به محل برخورد کمان‌ها وصل کنیم و نیمساز حاصل می‌شود.	

رسم مثلث

داده‌ها	روش رسم	شرط وجود مثلث	شکل
داشتن طول سه ضلع $(a , b و c)$	ابتدا پاره‌خطی به طول a رسم می‌کنیم، سپس به مرکز B و شعاع c و به مرکز C و شعاع b کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند. از وصل کردن A به B و C مثلث مطلوب حاصل می‌شود.	$\lvert a-c\rvert < b < a+c$ یا ۱) $a+b>c$ ۲) $a+c>b$ ۳) $b+c>a$	
داشتن طول دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم $(h_a و b , c)$	ابتدا خط d و d' را به موازات هم و به فاصلهٔ h_a از هم رسم می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه A و عمود AH را می‌کشیم. به مرکز A و شعاع b و c کمان‌هایی می‌زنیم تا خط d را در B_1، B_2، C_1 و C_2 قطع کند. مثلث‌های $\overset{\Delta}{AB_1C_2}$ و $\overset{\Delta}{AB_2C_1}$ جواب مسئله‌اند.	اگر b و c هر کدام از حالات زیر را داشته باشند؛ مثلث حاصل شده به فرم زیر است: ۱) b و $c > h_a$ ⇒ دو مثلث ۲) $b=c>h_a$ ⇒ یک مثلث متساوی‌الساقین ۳) $b=h_a , c>h_a$ ⇒ یک مثلث قائم‌الزاویه ۴) b یا $c<h_a$ ⇒ صفر مثلث (ممکن نیست، زیرا h_a کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط موازی d و d' است.)	
داشتن طول دو ضلع و میانهٔ وارد بر ضلع سوم $(h_a , c و b)$	ابتدا مثلثی به اضلاع b، c و $2m_a$ رسم می‌کنیم $(\overset{\Delta}{ABA'})$، وسط AA' را M می‌نامیم. از B به M وصل کرده و به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأس C حاصل شود.	۱) $b+c>2m_a$ ۲) $2m_a+b>c$ ۳) $2m_a+c>b$	

رسم چهارضلعی‌های معروف

داده‌ها	روش رسم	شرط	شکل
متوازی‌الاضلاع با داشتن طول دو قطر (a و b)	ابتدا دو خط متقاطع دلخواه رسم می‌کنیم و محل برخورد را O می‌نامیم. به مرکز O و شعاع $\frac{a}{2}$ و $\frac{b}{2}$ کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا l و l' را به ترتیب در (D و B) و (C و A) قطع کند. $ABCD$ چهارضلعی مطلوب است.	بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این داده‌ها می‌توان رسم کرد.	
متوازی‌الاضلاع با داشتن طول دو ضلع a و b و اندازهٔ یک قطر c	ابتدا مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ به اضلاع a، b و c را رسم می‌کنیم. از B خطی به موازات AD و از D خطی به موازات AB می‌کشیم تا محل برخورد را C بنامیم و متوازی‌الاضلاع مطلوب حاصل شود.	۱) $a+b>c$ ۲) $a+c>b$ ۳) $b+c>a$	
متوازی‌الاضلاع با داشتن طول دو قطر c و b و یک ضلع a	ابتدا مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ را به اضلاع $\frac{c}{2}$، $\frac{b}{2}$ و a رسم می‌کنیم. AO و BO را به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم تا رأس‌های C و D مشخص شوند. $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مطلوب می‌باشد.	۱) $\frac{b}{2}+\frac{c}{2}>a$ ۲) $a+\frac{b}{2}>\frac{c}{2}$ ۳) $a+\frac{c}{2}>\frac{b}{2}$	
مستطیل با داشتن طول دو ضلع a و b	دو خط عمود بر هم رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کنند. به مرکز A و شعاع a و b کمان‌هایی می‌زنیم تا این دو خط را در B و D قطع کند. از B و D عمودهایی خارج می‌کنیم تا محل برخورد آن‌ها، رأس C را مشخص کند. $ABCD$ چهارضلعی مطلوب است.	در این حالت با هر داده‌ای، می‌توان یک مستطیل رسم کرد.	
لوزی با داشتن طول دو قطر a و b	ابتدا دو خط عمود بر هم l و l' را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند، به مرکز O و شعاع $\frac{a}{2}$ و $\frac{b}{2}$ کمان‌هایی می‌زنیم تا این دو خط را به ترتیب در (A و C) و (D و B) قطع کند. لوزی $ABCD$، چهارضلعی مطلوب است.	در این حالت با هر داده‌ای، فقط یک لوزی می‌توان رسم کرد.	
مربعی با داشتن طول قطر آن (a)	دو خط عمود بر هم l و l' را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند. به مرکز O و شعاع $\frac{a}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خطوط را در چهار نقطه قطع کند. $ABCD$ مربع مطلوب است.	در این حالت با هر دایره‌ای فقط یک مربع می‌توان رسم کرد.	

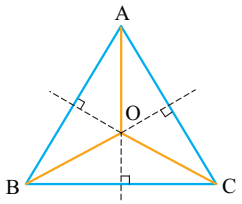
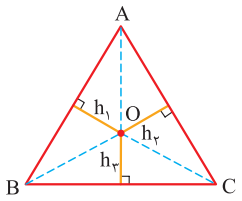
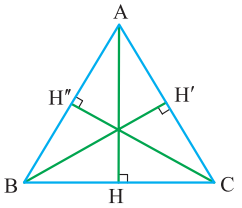
استدلال

انواع استدلال	تعریف
استقرایی	روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است.
استنتاجی	روش نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ حقایقی که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم.
مثال نقض	به مثالی که درست‌بودن یک حکم و ادعای کلی را رد کند، گفته می‌شود.
برهان خلف	استدلالی که به جای این‌که به طور مستقیم از فرض به حکم برسیم، ابتدا درست‌بودن حکم را زیر سؤال می‌بریم، (یعنی فرض می‌کنیم که حکم، غلط است.) سپس به کمک اطلاعات مسئله به تناقض رسیده و به این نتیجه می‌رسیم که حکم درست می‌باشد.

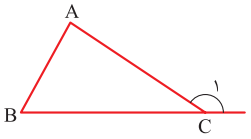
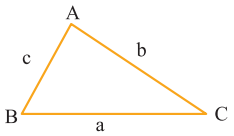
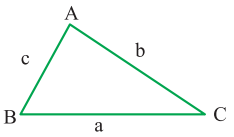
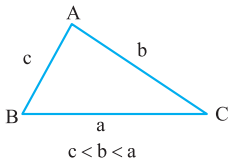
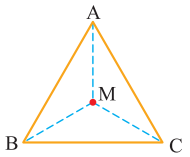
استدلال استنتاجی

گزاره	هر جملهٔ خبری که دارای ارزش درست یا ارزش نادرست باشد را گزاره می‌نامند.
قضیه	گزاره‌ای که بتوان با منطق و استدلال استنتاجی آن را ثابت کرد، قضیه می‌نامند.
عکس قضیه	اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم به آن‌چه حاصل می‌شود، عکس قضیه گویند.
قضیهٔ دوشرطی	اگر یک قضیه، خودش و عکس آن برقرار باشد، آن را قضیهٔ دوشرطی می‌نامیم.

همرسی‌های مثلث

در هر مثلث، عمودمنصف‌ها همرس هستند و نقطهٔ همرسی آن‌ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است. ● نقطهٔ همرسی بسته به نوع مثلث می‌تواند داخل، روی محیط و یا خارج مثلث باشد.	 $OA = OB = OC$
در هر مثلث، نیمسازهای داخلی همرس هستند و نقطهٔ همرسی آن‌ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. ● نقطهٔ همرسی همواره داخل مثلث قرار دارد.	 $h_۱ = h_۲ = h_۳$
در هر مثلث ارتفاع‌ها همرس هستند. محل همرسی ارتفاع‌ها در مثلث حادالزاویه داخل مثلث، در مثلث قائم‌الزاویه روی رأس قائم و در مثلث منفرجه‌الزاویه بیرون مثلث قرار دارد.	

نامساوی‌های مثلث

قضیه		شکل
هر زاویهٔ خارجی مثلث همواره از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.	$\hat{C}_1 > \hat{A}$ $\hat{C}_1 > \hat{B}$	
زاویهٔ رو به ضلع بزرگ‌تر همواره، از زاویهٔ رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. ● عکس این قضیه نیز برقرار است.	$b > c \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$	
مجموع طول دو ضلع مثلث همواره از ضلع سوم بزرگ‌تر است. (قضیهٔ وجود مثلث)	۱) $a+b>c$ ۲) $a+c>b$ ۳) $b+c>a$	
در هر مثلث دلخواه، همواره رابطهٔ زیر برقرار است: $\frac{۱}{۲}$(محیط) < بزرگ‌ترین ضلع ≤ $\frac{۱}{۳}$(محیط) ≤ کوچک‌ترین ضلع	$c \le \frac{۱p}{۳} \le a < \frac{۱p}{۲}$ (P محیط مثلث است.)	
اگر M نقطه‌ای دلخواه درون مثلث باشد، مجموع فواصل M از سه رأس مثلث، همواره بین محیط و نصف محیط مثلث می‌باشد.	$\frac{p}{۲} < MA + MB + MC < p$ (P محیط مثلث است.)	

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف ماتریس

به چیدمان $m\times n$ درایه، یک ماتریس از مرتبهٔ $m\times n$ می‌گوییم؛ مثلاً:

ماتریس دارای ۲ سطر و ۲ ستون	ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون	ماتریس ۲×۳ برحسب ij
ستون اول $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ سطر دوم	ستون سوم $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۰\\ ۴ & ۷ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times۳}$ درایهٔ سطر دوم و ستون دوم $=b_{۲۲}$	$c_{ij}=\begin{cases}i+j & i\geq j\\ i-j & i<j\end{cases}$ $C=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۴\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}_{۳\times۲}$

ماتریس مربعی

اگر در ماتریسی تعداد سطرها و تعداد ستون‌ها برابر باشد، آن را ماتریس مربعی می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

قطر اصلی: $i=j$ ، $i<j$ ، $i>j$ ، قطر فرعی

→ ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳

ماتریس‌های مربعی خاص

ماتریس صفر	ماتریس قطری	ماتریس اسکالر	ماتریس همانی (واحد)	ماتریس بالا مثلثی	ماتریس پایین مثلثی
$O=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۱۰\end{bmatrix}$	$C=\begin{bmatrix}۶ & ۰\\ ۰ & ۶\end{bmatrix}$	$I_۲=I=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$	$D=\begin{bmatrix}۴ & ۷ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۶\end{bmatrix}$	$E=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۵ & ۱ & ۰\\ -۴ & ۲ & ۶\end{bmatrix}$
همهٔ درایه‌ها برابر صفر می‌باشد. البته ماتریس صفر می‌تواند مربعی نباشد.	همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر است.	درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر و تمام درایه‌های قطر اصلی با هم برابرند.	درایه‌های قطر اصلی همگی عدد ۱ و بقیهٔ درایه‌ها صفر می‌باشد.	درایه‌های زیر قطر اصلی همگی صفر است.	درایه‌های بالای قطر اصلی همگی صفر است.

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبه را مساوی می‌گوییم، هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشد.

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}\qquad A=B\Rightarrow\begin{cases}a=x\ ,\ b=y\\ c=z\ ,\ d=t\end{cases}$$

جمع و تفریق و ضرب ماتریس‌ها

جمع و تفریق دو ماتریس	ضرب دو ماتریس
$\begin{bmatrix}۷ & -۱\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷+۱ & ۱\\ ۲ & ۰\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۲ & ۰\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}_{۳\times۲}\times\begin{bmatrix}۱ & -۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\end{bmatrix}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}۱\times۱+۴\times۰ & ۲ & ۱۱\\ ۲ & -۴ & ۶\\ -۱ & ۴ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times۳}$
برای جمع و تفریق دو ماتریس هم‌مرتبه، درایه‌های نظیربه‌نظیر با هم جمع یا تفریق می‌شوند.	ماتریس اول را به صورت سطری و ماتریس دوم را به صورت ستونی دسته‌بندی می‌کنیم و هر یک از سطرهای ماتریس اول را در ستون‌های ماتریس دوم ضرب می‌کنیم.

- شرط لازم برای این‌که دو ماتریس بتوانند در هم ضرب شوند، برابری تعداد ستون‌های ماتریس اول با سطرهای ماتریس دوم است:

$A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}$

خواص اعمال جبری روی ماتریس

ماتریس صفر عضو بی‌اثر در جمع ماتریس‌ها	جمع ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است.	عضو قرینه در جمع ماتریس‌ها	جمع ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.
$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$	$A+(B+C)=(A+B)+C$	$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$	$A+B=B+A$
قابلیت حذف عدد غیرصفر	توزیع‌پذیری عدد روی جمع ماتریس	ماتریس I عضو بی‌اثر در ضرب ماتریس‌ها	توزیع‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها
$rA=rB \xrightarrow{r\neq 0} A=B$	$r(A\pm B)=rA\pm rB$	$AI=IA=A$	$A\times(B\pm C)=(A\times B)\pm(A\times C)$
ضرب ماتریس خاصیت جابه‌جایی ندارد.	عدم نتیجه‌گیری در مورد صفربودن ماتریس	ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.	فاکتورگیری
$AB\neq BA$	$AB=0 \Leftrightarrow A\neq 0, B\neq 0$	$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$	$AB+AC=A(B+C)$ $BC+AC=(B+A)C$

توان در ماتریس

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، داریم: $A^n=A\times A^{n-1}=A^{n-1}\times A$ و $A^3=A^2\times A=A\times A^2$

چهار ماتریس خاص

ماتریس متناوب	ماتریس پوچ‌توان	ماتریس خودتوان	ماتریس خودضریب
$A^2=I \Rightarrow \begin{cases} A^{2n}=I \\ A^{2n+1}=A \end{cases}$	$A^2=\bar{O} \Rightarrow A^n=\bar{O}$	$A^2=A \Rightarrow A^n=A$	$A^2=kA \Rightarrow A^n=k^{n-1}A$

تعریف: وقتی می‌گوییم دو ماتریس A و B تعویض‌پذیرند یعنی:

- ماتریس همانی با هر ماتریس مربعی هم‌مرتبه‌اش تعویض‌پذیر است.
- ضرب دو ماتریس قطری تعویض‌پذیر است.

اتحادهای جبری در ماتریس

اگر دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، تمام اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است:

اتحاد مربع دوجمله‌ای	$(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$
اتحاد مزدوج	$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$
اتحاد مکعب دوجمله‌ای	$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$
اتحاد چاق و لاغر	$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$

قضیهٔ کیلی ـ همیلتون

اگر ماتریس A یک ماتریس 2×2 باشد، داریم: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2=(a+d)A-(ad-bc)I$