مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳

رشته ریاضی

پایه دوازدهم | مرحله ششم

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
حسابان و ریاضیات پایه	پایهٔ دهم: فصل ۵ صفحهٔ ۹۴ تا ۱۱۷ پایهٔ یازدهم: فصل ۲ صفحهٔ ۳۷ تا ۷۰ پایهٔ دوازدهم: فصل ۱ (درس ۱) صفحهٔ ۱ تا ۱۲	۲	۱۸	علی شهرابی	مهدی خوشنویس

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

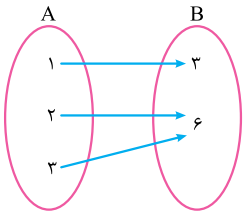
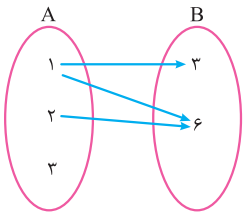
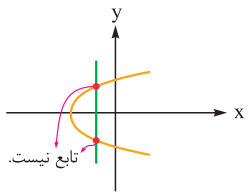
شروع دوازدهم از مهر

تابع

مقدمات (تعریف تابع، دامنه و تساوی توابع)

۱ تابع دستگاهی است که به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی می‌دهد.

۲ روش‌های نمایش تابع:

	روش نمایش	شرط تابع‌بودن	مثال
۱	پیکانی (نمودار وِن)	از هر عضو مجموعهٔ مبدأ، باید دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.	 تابع است.  تابع نیست.
۲	زوج مرتبی	مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها نباید برابر باشد. اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد.	$\{(۱,۲),(۲,۳),(-۱,۳)\} \rightarrow$ تابع است. $\{(۱,۲),(۳,۵),(۱,۶)\} \rightarrow$ تابع نیست.
۳	جدولی	مؤلفه‌های سطر مربوط به xها نباید یکسان باشد. اگر مؤلفه‌های x یکسان داشتیم، مؤلفه‌های y شان هم باید یکسان باشد.	x: ۲ ۳ ۵ ۳ y: −۱ ۷ ۴ ۲ تابع نیست.
۴	نموداری	اگر خطی موازی محور yها پیدا شود که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن نمودار مربوط به یک تابع نیست و اگر چنین خطی پیدا نشود، تابع است.	
۵	توصیفی	با توجه به جملهٔ توصیفی، اگر به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی داشته باشیم، آن رابطه تابع است.	رابطه‌ای که به هر فرد، کد ملی‌اش را نسبت می‌دهد. { ورودی: انسان‌ها، خروجی: کد ملی } چون هر شخص نمی‌تواند بیش از یک کد ملی داشته باشد، پس تابع است.
۶	ضابطه‌ای	اگر به ازای هر x، فقط یک خروجی داشته باشیم، تابع است. روابطی که در آن‌ها y تنها می‌شود، حتماً تابع هستند؛ مثل $\underset{\text{تنها}}{y} = \log_۲ x + \cos\frac{۱}{x}$	در رابطهٔ $y^۲ = x + ۱$، اگر $x = ۱$ را بدهیم، ۲تا خروجی می‌دهد: $y^۲ = ۲ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲} \rightarrow$ تابع نیست.

۳ تعداد توابع:

تعداد کل توابع از مجموعهٔ nعضوی به مجموعهٔ mعضوی	m^n
تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ nعضوی به مجموعهٔ mعضوی $(m \geq n)$	$P(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}$

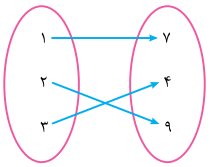
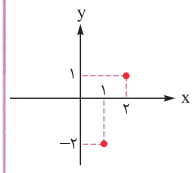
۴ سؤالات تابع‌نویسی: از ما می‌خواهد عبارتی (مثل محیط، مساحت و ...) را برحسب یک متغیر (مثل ضلع، شعاع و ...) بنویسیم.

مثال تابع مساحت مربع برحسب محیط آن؟

پاسخ می‌دانیم $P=۴a$ و $S=a^۲$ است. از $P=۴a$ نتیجه می‌گیریم $a=\frac{P}{۴}$. حالا این تساوی را در رابطهٔ مساحت قرار می‌دهیم:

$$S=a^۲ \xrightarrow{a=\frac{P}{۴}} S=(\frac{P}{۴})^۲ \Rightarrow S=\frac{P^۲}{۱۶} \xrightarrow{\text{به شکل تابع}} S(P)=\frac{P^۲}{۱۶}$$

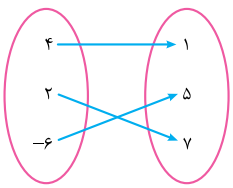
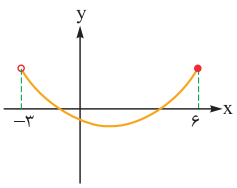
۵ مقدار تابع در یک نقطه:

روش نمایش تابع	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی	ضابطه‌ای
مثال		$f=\{(۱,۲),(۲,۶)\}$	x: ۱ ۲ ۳ y: −۳ ۶ ۲		f تابعی است که به هر عددی، مکعبش را نسبت می‌دهد.	$f(x)=\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۲x+۵}}$
مقدار تابع در $x=۲$	$f(۲)=۹$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۶$	$f(۲)=۱$	$f(۲)=۲^۳=۸$	$f(۲)=\frac{۵}{۳}$

۶ نقاط برخورد مهم:

نقطهٔ برخورد تابع f با ...	راه حل	مختصات نقطه (نقاط)
محور xها	«y را صفر می‌دهیم» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$»	$(\ ,۰)$ ← جواب‌های $f(x)=۰$
محور yها	«x را صفر می‌دهیم» یا «مقدار $f(۰)$»	$(۰,f(۰))$
تابع g	حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$ ← جواب‌ها ← $x_۱,\ldots$	$(x_۱,f(x_۱)),\ldots$
نیمساز ربع اول و سوم	حل معادلهٔ $f(x)=x$ ← جواب‌ها ← $x_۱,\ldots$	$(x_۱,x_۱),\ldots$
نیمساز ربع دوم و چهارم	حل معادلهٔ $f(x)=-x$ ← جواب‌ها ← $x_۱,\ldots$	$(x_۱,-x_۱),\ldots$

۷ محاسبهٔ دامنه در نمایش مختلف یک تابع (به‌جز نمایش ضابطه‌ای):

روش محاسبهٔ دامنه	پیکانی	زوج مرتبی	جدولی	نموداری	توصیفی
	همهٔ اعدادی که از آن‌ها فلش خارج شده	همهٔ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها	همهٔ اعداد سطر مربوط به x	تصویر نمودار روی محور xها	ورودی‌ها!
مثال		$f=\{(۵,۲),(۱,۳)\}$	x: ۱ −۴ ۶ y: ۶ ۵ ۹		تابعی که به هر عدد مربع کامل دورقمی، جذرش را نسبت می‌دهد.

دامنه $D=\{۴,۲,-۶\}$ $D_f=\{۵,۱\}$ $D=\{۱,-۴,۶\}$ $D=(-۳,۶]$ دامنه $=\{۱۶,۲۵,\dots,۸۱\}$

۸ محاسبهٔ دامنه در نمایش ضابطه‌ای:

اسم تابع	ضابطه	دامنه
چندجمله‌ای	$f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\cdots$	$\mathbb{R}$
کسری	$f(x)=\frac{A}{B}$	$\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$
رادیکال با فرجهٔ زوج	$f(x)=\sqrt[۲n]{A}$	جواب نامعادلهٔ $A\geq ۰$
رادیکال با فرجهٔ فرد	$f(x)=\sqrt[۲x+۱]{A}$	همان دامنهٔ A
لگاریتم	$f(x)=\log_B A$	$(A>۰)\cap(B>۰)\cap(B\neq ۱)$
سینوس و کسینوس	$\sin A$ یا $\cos A$	همان دامنهٔ A
تانژانت	$\tan A$	$A\neq(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$
کتانژانت	$\cot A$	$A\neq k\pi$

۹ دو نکته در مورد دامنهٔ توابع کسری و رادیکالی:

الف) اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\text{چندجمله‌ای}}{ax^۲+bx+c}$ به صورت $\mathbb{R}-\{k\}$ باشد، «$\Delta_{\text{مخرج}}=۰$» و «$k=\frac{-b}{۲a}$» است.

ب) برای دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^۲+bx+c}$، چند حالت می‌توانیم داشته باشیم:

	شرط	دامنه
عبارت زیر رادیکال درجه ۲ است.	$a>۰,\Delta\geq ۰$	$\mathbb{R}$
	$a>۰,\Delta>۰$	$\mathbb{R}-(x_۱,x_۲)$
	$a<۰,\Delta<۰$	$\varnothing$
	$a<۰,\Delta=۰$	$\{k\}$
	$a<۰,\Delta>۰$	$[x_۱,x_۲]$
عبارت زیر رادیکال درجه‌یک است.	$x_۱=\frac{-c}{b},b>۰,a=۰$	$[x_۱,+\infty)$
	$x_۱=\frac{-c}{b},b<۰,a=۰$	$(-\infty,x_۱]$

۱۰ شروط تساوی دو تابع f و g:

۱	$D_f=D_g$ (دامنه‌ها قبل از ساده‌کردن تابع باید محاسبه شوند.)
۲	ضابطه‌های دو تابع را بتوانیم با کارهای جبری و ... مثل هم کنیم.

۱۱ نکات مهم در تساوی توابع:

۱	دامنهٔ تابع به فرم $y=\sqrt{AB}$ از حل نامعادلهٔ $AB\geq 0$ و دامنهٔ تابع به فرم $y=\sqrt{A}\times\sqrt{B}$ از اشتراک جواب نامعادله‌های $A\geq 0$ و $B\geq 0$ به دست می‌آید.
۲	توابع $y=A$ و $y=\frac{AB}{B}$ به شرطی با هم برابرند که B ریشه‌ای نداشته باشد.
۳	توابع $f(x)=\begin{cases}\frac{AB}{B} & B\neq 0\\ C & B=0\end{cases}$ و $g(x)=\cdots$ به شرطی برابرند که $\begin{cases}\text{اولاً: } g(x)=A\\ \text{ثانیاً: مقدار } g(x) \text{ به ازای ریشهٔ } B=0 \text{، برابر با } C \text{ شود.}\end{cases}$
۴	$\log x^2=2\log\lvert x\rvert$ و $\log x^3=3\log x$

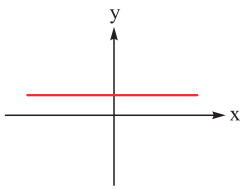
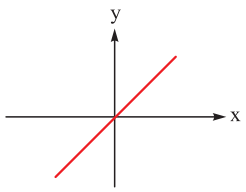
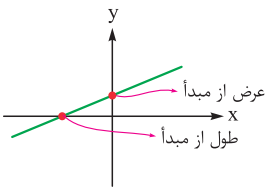
۱۲ نمایش ضابطه‌ای یک تابع:

نمایش ضابطه‌ای (به شکل کامل)	جزئیات
$\begin{cases}f:A\to B\\ f(x)=\cdots\end{cases}$	A: دامنه B: هم‌دامنه (هم‌دامنه $\supseteq$ برد)

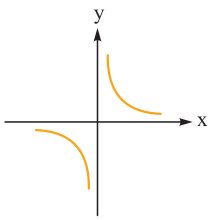
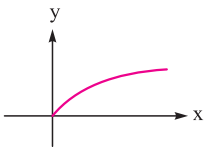
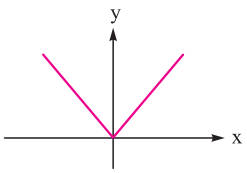
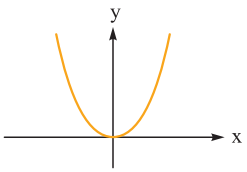
۱۳ **معادلات و توابع:** اگر در رابطه‌ای برحسب x و y، xای پیدا کنیم که به ازای آن بیش از یک مقدار برای y پیدا شود، آن رابطه تابع نیست؛ مثلاً در رابطهٔ $y^3-y=x$ به ازای $x=0$، سه خروجی $y=0$، $y=1$ و $y=-1$ داریم، پس تابع نیست.

انواع تابع

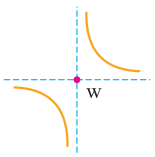
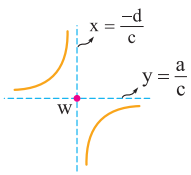
۱ **چند تابع خاص**

تابع	ضابطه	نکته	نمودار
ثابت	$f(x)=\underset{\text{عدد}}{c}$	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج مرتب‌ها با هم برابر است. در نمایش ضابطه‌ای، ضرایب جملات شامل x باید صفر باشد.	یک خط افقی 
همانی	$f(x)=x$	در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند. در نمایش ضابطه‌ای، ضریب x، یک و ضریب سایر جملات صفر است.	نیمساز ربع اول و سوم 
خطی	$f(x)=mx+h$	محل برخورد با محور yها $\to \underset{\text{عرض از مبدأ}}{h}$ $\underset{\text{شیب}}{m}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$	

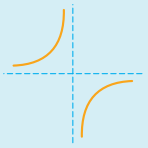
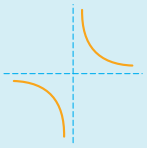
۲ چند تابع معروف با نمودارشان:

ضابطه	$y=\frac{1}{x}$	$y=\sqrt{x}$	$y=\|x\|$	$y=x^2$
نمودار				
دامنه	$\mathbb{R}-\{0\}$	$[0,+\infty)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
برد	$\mathbb{R}-\{0\}$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$

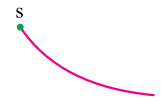
۳ نکات مهم تابع هموگرافیک با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$:

شرط هموگرافیک‌بودن	$ad-bc\neq 0, c\neq 0$
دامنه	$\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$
برد	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$
معادلهٔ خط‌چین عمودی	$x=\frac{-d}{c}$
معادلهٔ خط‌چین افقی	$y=\frac{a}{c}$
ضابطهٔ وارون	$\frac{-dx+b}{cx-a}$
شرط برابری f و f^{-1}	$a+d=0$
مرکز تقارن	$w=(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$
محورهای تقارن	دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از نقطهٔ w
شکل تابع	 $ad-bc<0$  $ad-bc>0$

نکته

برای رسم تابع هموگرافیک، می‌توان بعد از رسم خط‌چین‌های افقی و عمودی با مشخص‌کردن مختصات یک نقطه شکل آن را رسم کرد یا به این شکل است:  یا به این شکل: 

۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=a\sqrt{bx+c}+d$ به یکی از چهار شکل زیر است:

	علامت a	علامت b	شکل نمودار	مختصات نقطهٔ شروع (S)
۱	+	+		ریشهٔ داخل رادیکال: $\left(\frac{-c}{b}, d\right)$ عدد بیرونی
۲	+	−		
۳	−	+		
۴	−	−		

تبدیل نمودار توابع

۵ انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض:

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.
قرینه‌یابی	نسبت به محور xها	$-f(x)$	کل ضابطه را قرینه می‌کنیم.
	نسبت به محور yها	$f(-x)$	جای xها، $-x$ می‌گذاریم.
	نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
	نسبت به خط $x=k$	$f(۲k-x)$	جای xها، $۲k-x$ می‌گذاریم.
	نسبت به خط $y=k$	$۲k-f(x)$	
انبساط و انقباض افقی	انبساط با ضریب ۲	$f(\frac{x}{۲})$	جای xها، $\frac{x}{۲}$ می‌گذاریم.
	انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$	$f(۲x)$	جای xها، $۲x$ می‌گذاریم.
انبساط و انقباض عمودی	انبساط با ضریب ۲	$۲f(x)$	کل ضابطه ضربدر ۲ می‌شود.
	انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}f(x)$	کل ضابطه ضربدر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

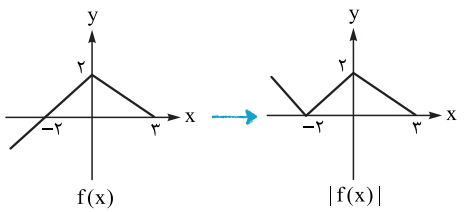
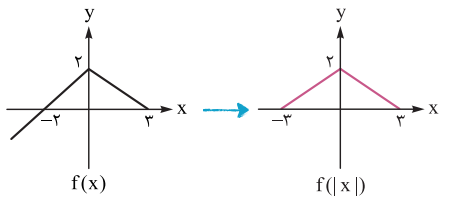
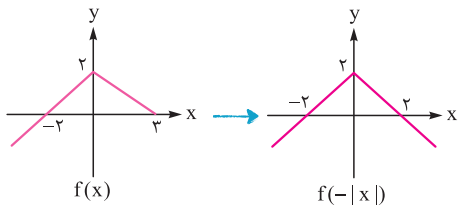
۶ برای تبدیل $y=f(x)$ به $y=\underset{\text{سوم}}{a}f(\underset{\text{دوم}}{b}x+\underset{\text{اول}}{c})+\underset{\text{چهارم}}{d}$، ترتیب مراحل این‌گونه است:

$c \to b \to a \to d$

۷ محاسبهٔ دامنه و برد تابع $y=af(bx+c)+d$ از روی دامنه و برد تابع $y=f(x)$:

	بی‌اثرها	مراحل محاسبهٔ دامنه یا برد جدید
دامنهٔ جدید	a,d	۱) دو سر بازهٔ دامنه را c واحد به چپ (یا راست) می‌بریم. ۲) دو سر بازه را در $\frac{۱}{b}$ ضرب می‌کنیم.
برد جدید	b,c	۱) دو سر بازهٔ برد را در a ضرب می‌کنیم. ۲) پس دو سر بازه را به علاوهٔ d می‌کنیم.

۸ اثر قدرمطلق روی نمودار:

ضابطه	چه اتفاقی برای نمودار $f(x)$ می‌افتد؟	تغییرات ضابطه	مثال نموداری
$\lvert f(x)\rvert$	قسمت زیر محور xها، نسبت به محور xها قرینه می‌شود و به قسمت بالا و روی محور x ها دست نمی‌زنیم.	کل ضابطه داخل قدرمطلق می‌رود.	
$f(\lvert x\rvert)$	مرحلهٔ ۱: سمت چپ محور yها را پاک می‌کنیم. مرحلهٔ ۲: قرینهٔ سمت راست محور yها نسبت به محور yها را در سمت چپش می‌کشیم.	جای xها، $\lvert x\rvert$ می‌گذاریم.	
$f(-\lvert x\rvert)$	مرحلهٔ ۱: سمت راست محور yها را پاک می‌کنیم. مرحلهٔ ۲: قرینهٔ سمت چپ محور yها نسبت به محور yها را در سمت راستش می‌کشیم.	جای xها، $-\lvert x\rvert$ می‌گذاریم.	

اعمال جبری روی توابع

۱ چهار عمل اصلی روی توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

اسم عمل	نماد	تعریف ریاضی	دامنه
جمع دو تابع	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
تفریق دو تابع	$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_f \cap D_g$
ضرب دو تابع	fg	$(fg)(x)=f(x).g(x)$	$D_f \cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=۰\}$

۲ اعمال جبری در نمایش زوج مرتبی با یک مثال:

مثال فرض کنید $f=\{(۱,۴),(۲,۷),(۳,۱۰)\}$ و $g=\{(۲,-۱),(۳,۶),(۴,۱)\}$ باشد و ما $f+۲g$ را بخواهیم.

مرحلهٔ ۱	اشتراک دامنه‌های f و g را می‌نویسیم: $D_{f+۲g}=\{۲,۳\}$
مرحلهٔ ۲	مقدار $f+۲g$ را به ازای xهای دامنه به دست می‌آوریم: $x=۲: f(۲)+۲g(۲)=۷+۲(-۱)=۵ \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (۲,۵)$ $x=۳: f(۳)+۲g(۳)=۱۰+۲(۶)=۲۲ \xrightarrow{\text{زوج مرتب}} (۳,۲۲)$
مرحلهٔ ۳	$f+۲g=\{(۲,۵),(۳,۲۲)\}$

۳ محاسبهٔ برد توابع $f \overset{+}{\underset{\div}{\times}} g$:

مرحلهٔ ۱	ابتدا دامنهٔ تابع $f \overset{+}{\underset{\div}{\times}} g$ را حساب می‌کنیم.
مرحلهٔ ۲	ضابطهٔ $f \overset{+}{\underset{\div}{\times}} g$ را تشکیل می‌دهیم.
مرحلهٔ ۳	برد تابع $f \overset{+}{\underset{\div}{\times}} g$ را در دامنه‌اش به دست می‌آوریم.

ترکیب توابع

۱ نکات اولیهٔ fog:

معادل fog(x)	$f(g(x))$
ضابطهٔ fog(x)	جای xهای تابع f، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.
مقدار fog(a)	دو مرحله دارد: اول $g(a)$ (مثلاً می‌شود k)، بعد $f(k)$
دامنهٔ fog	**راه اول:** $D_{fog} = \{\underbrace{x \in D_g}_{\text{شرط (۱)}} \cap \underbrace{g(x) \in D_f}_{\text{شرط (۲)}}\}$
	راه دوم: ضابطهٔ fog را بدون هیچ ساده‌کردنی تشکیل می‌دهیم و سپس دامنهٔ آن را حساب می‌کنیم.
برد fog	مرحلهٔ ۱: برد تابع g را حساب می‌کنیم (مثلاً می‌شود بازهٔ I).
	مرحلهٔ ۲: برد تابع f با دامنهٔ I را حساب می‌کنیم.

۲

دامنهٔ fog زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع داخلی یعنی g است.	$D_{fog} \subseteq D_g$
برد fog زیرمجموعهٔ برد تابع بیرونی یعنی f است.	$R_{fog} \subseteq R_f$

۳ وقتی از بین f، g و fog، ۲تا را داریم و سومی را می‌خواهیم:

f	g	fog	راه حل
✓	✓	؟	باید $f(g(x))$ را تشکیل دهیم.
؟	✓	✓	$g(x)$ را مساوی t قرار می‌دهیم. x را برحسب t حساب می‌کنیم و به جای xهای داخل $fog(x)$، رابطهٔ x برحسب t را قرار می‌دهیم.
✓	؟	✓	در ضابطهٔ f، جای xهایش $g(x)$ قرار می‌دهیم. عبارت به دست آمده را با fog داده‌شده برابر قرار می‌دهیم.

۴ ترکیب f و f^{-1}، همواره تابعی همانی است.

	ضابطه	دامنه	نمودار
حالت ۱	$(fof^{-1})(x)=x$	$D_{f^{-1}}=R_f$	نیمساز ناحیهٔ اول و سوم با دامنهٔ R_f
حالت ۲	$(f^{-1}of)(x)=x$	D_f	نیمساز ناحیهٔ اول و سوم با دامنهٔ D_f

۵ شرط لازم و کافی برای برابربودن fof^{-1} و $f^{-1}of$ آن است که $D_f=R_f$.

تابع یک‌به‌یک

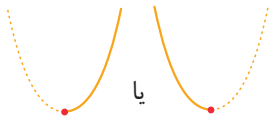
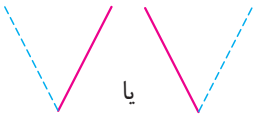
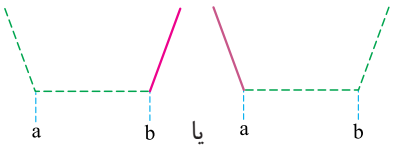
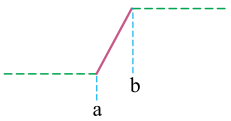
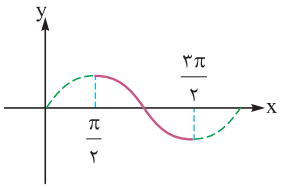
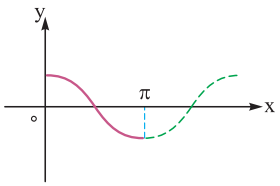
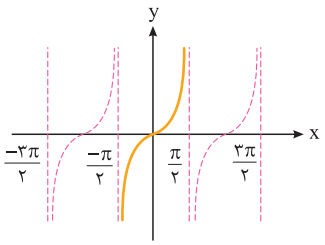
۱ به تابعی که در خروجی‌هایش، عدد تکراری نداریم، یک‌به‌یک می‌گوییم.

نمایش	شرط یک‌به‌یک بودن
زوج مرتبی	مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها باید متفاوت باشند.
جدولی	اعداد سطر دوم جدول باید متفاوت باشند.
پیکانی	به هیچ عددی نباید بیشتر از یک پیکان وارد شود.
نموداری	خطی موازی محور xها نباید نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.
ضابطه‌ای	$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

۲ **توابع یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک معروف:**

اسم تابع	یک‌به‌یک		غیر یک‌به‌یک	
چندجمله‌ای	خطی با شیب غیرصفر		ثابت	چندجمله‌ای درجه زوج
درجه ۳	$a(x-b)^3+c$	ax^3+bx (a و b هم‌علامت)	ax^3+bx (a و b ناهم‌علامت)	ax^3+bx^2
$\frac{ax+b}{cx+d}$	با شرط $ad-bc\neq 0$ (هموگرافیک می‌شه)		با شرط $ad-bc=0$ (ثابت می‌شه)	
براکتی‌ها	$ax+b[x]$ (a و b هم‌علامت)		$a[x]+b$	$ax-[ax]$
رادیکالی و قدرمطلقی	$\sqrt{ax+b}$		$\lvert ax+b\rvert$	$\lvert x+a\rvert \pm \lvert x+b\rvert$ (گلدانی و سرسره‌ای)
سایر	a^x (نمایی)	$\log_a x$ (لگاریتم)	مثلثاتی‌ها: $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$ و $\cot x$	

۳ یک‌به‌یک کردن توابع غیر یک‌به‌یک با محدودکردن دامنه:

ضابطه	بزرگ‌ترین بازهٔ یک‌به‌یکی	توضیح	نمودار
ax^2+bx+c	$x \le \frac{-b}{2a}$ یا $x \ge \frac{-b}{2a}$	xهای قبل یا بعد از x_S	
$\lvert ax+b\rvert+c$	$x \le \frac{-b}{a}$ یا $x \ge \frac{-b}{a}$	xهای قبل یا بعد از ریشهٔ قدرمطلق	
$\lvert x-a\rvert+\lvert x-b\rvert$ (b>a)	$x \le a$ یا $x \ge b$	xهای قبل از ریشهٔ کوچک‌تر یا بعد از ریشهٔ بزرگ‌تر	
$\lvert x-a\rvert-\lvert x-b\rvert$ (b>a)	$a \le x \le b$	xهای بین ریشه‌ها	
$\sin x$	مثلاً $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$	xهای بین دو min و max متوالی	
$\cos x$	مثلاً $0 \le x \le \pi$	xهای بین دو min و max متوالی	
$\tan x$	مثلاً $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	xهای بین دو خط‌چین عمودی	

تابع وارون

۱ نکات اولیهٔ تابع وارون:

۱	اگر نقطهٔ (a,b) روی f باشد، نقطهٔ (b,a) روی f^{-1} است و برعکس.
۲	$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$
۳	$R_{f^{-1}}=D_f$ و $D_{f^{-1}}=R_f$
۴	نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است.
۵	شرط وارون‌پذیری، یک‌به‌یک بودن است.

۲ برای محاسبهٔ $f^{-1}(k)$، بهترین راه این است که معادلهٔ $f(x)=k$ را حل کنیم. جواب این معادله، همان $f^{-1}(k)$ می‌شود؛ مثلاً اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد و ما $f^{-1}(12)$ را بخواهیم، معادلهٔ $x+\sqrt{x}=12$ را حل می‌کنیم که جوابش می‌شود ۹.

۳

ناحیه‌ای که نمودار f در آن است.	۱	۲	۳	۴
ناحیه‌ای که نمودار f^{-1} در آن قرار می‌گیرد.	۱	۴	۳	۲

۴ مراحل به دست آوردن ضابطهٔ وارون:

۱) x را برحسب y می‌نویسیم (باید x تنها شود).

۲) جای x و y را عوض می‌کنیم.

۵ طریقهٔ محاسبهٔ ضابطهٔ وارون توابع مهم:

اسم تابع	ضابطه	ضابطهٔ وارون (یا طریقهٔ محاسبه)	نکات
خطی	$ax+b$	$\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$	توابع خطی $y=x$ و $y=-x+b$، با وارونشان برابرند.
سهمی	$a(x-x_S)^2+y_S$	باید ابتدا مربع کامل کنید.	در دامنه‌های $x \geq x_S$ یا $x \leq x_S$ وارون‌پذیر است.
درجه۳	$k(x+a)^3+b$	باید از اتحادهای مکعب ستون بعدی کمک بگیرید.	$(x\pm1)^3=x^3\pm3x^2+3x\pm1$ $(x\pm2)^3=x^3\pm6x^2+12x\pm8$
هموگرافیک	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{-dx+b}{cx-a}$	$a+d=0 \Leftrightarrow f=f^{-1}$

حواستان باشد که دامنهٔ f^{-1}، برد f می‌شود و معمولاً بهترین راه برای محاسبهٔ $D_{f^{-1}}$ (یا همان R_f)، استفاده از نمودار f است.

۶ راه‌های به دست آوردن نقطه (یا نقاط) برخورد f و f^{-1}:

	روش	توضیح روش
۱	ضابطه‌ای	ضابطهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم و بعدش معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل می‌کنیم.
۲	نموداری	نمودار f را نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار f^{-1} به دست آید. تعداد نقاط برخوردشان معلوم می‌شود.

نکته

نقاط برخورد f و نیمساز ربع اول و سوم حتماً نقطهٔ برخورد f و f^{-1} است، ولی با توجه به نوع تابع f ممکن است نقاط برخورد f و f^{-1} روی نیمساز ربع اول و سوم نباشد. در واقع داریم:

نیمساز اول و سوم

$$f(x)=x \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x)=f(x) \not\Rightarrow f(x)=x$$

۷ محاسبهٔ $(fog^{-1})(a)$ یا $(f^{-1}og)(a)$ یا $(f^{-1}og^{-1})(a)$:

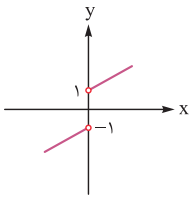
برای محاسبهٔ همهٔ عبارات فوق دو مرحله داریم؛ برای مثال $(f^{-1}og^{-1})(a)$ را توضیح می‌دهیم.

مرحلهٔ ۱: اول باید $g^{-1}(a)$ را حساب کنیم. اگر ضابطهٔ g را داریم، بهترین راه، حل معادلهٔ $g(x)=a$ است.

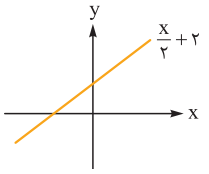
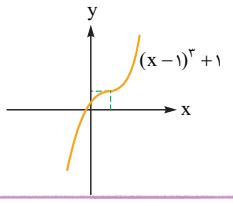
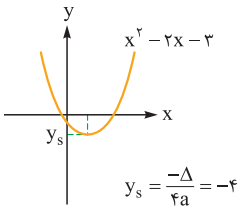
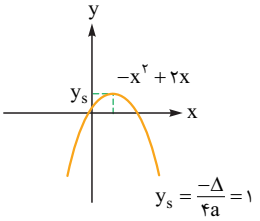
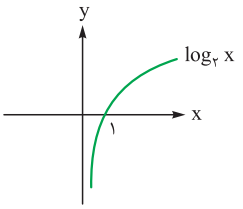
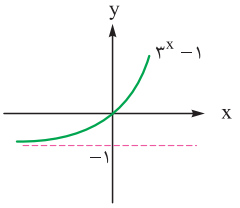
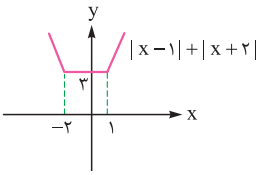
مرحلهٔ ۲: باید $f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(a)}_{\text{جوابش در مرحلهٔ قبل b شده}})$ را حساب کنیم. اگر ضابطهٔ f را داریم، بهترین راه، حل معادلهٔ $f(x)=b$ است.

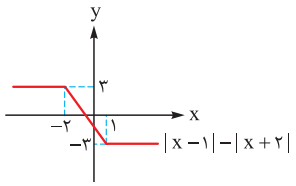
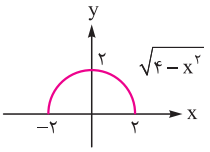
برد

۱ روش‌های محاسبهٔ برد:

روش	توضیح	مثال
رسم نمودار	اگر نمودار تابع را بلد باشیم، بهترین روش است.	$f(x)=x+\frac{\lvert x\rvert}{x}=\begin{cases}x+1 & x>0\\ x-1 & x<0\end{cases} \xrightarrow{\text{نمودار}}$  $\xrightarrow{\text{برد}} \mathbb{R}-[-1,1]$
ساختن y به کمک نامساوی‌ها	$(ax+b)^2\ge 0$ ، $\lvert ax+b\rvert\ge 0$ ، $\sqrt{ax+b}\ge 0$	$y=-\lvert 2x+3\rvert+4 \xrightarrow{\text{محاسبهٔ برد}} \lvert 2x+3\rvert\ge 0$ $\xrightarrow{\text{قرینه}} -\lvert 2x+3\rvert\le 0 \xrightarrow{+4} -\lvert 2x+3\rvert+4\le 4$ $\xrightarrow{\text{برد}} (-\infty,4]$
	$-1\le \sin x\le 1$ ، $-1\le \cos x\le 1$	$y=2\sin x+3 \xrightarrow{\text{محاسبهٔ برد}} -1\le \sin x\le 1$ $\xrightarrow{\times 2} -2\le 2\sin x\le 2 \xrightarrow{+3} 1\le y\le 5 \xrightarrow{\text{برد}} [1,5]$
	$0\le u-[u]<1$ ، $[u]+[-u]=\begin{cases}0 & u\in\mathbb{Z}\\ -1 & u\notin\mathbb{Z}\end{cases}$	$y=2x-2[x+1] \xrightarrow{\text{محاسبهٔ برد}} y=2x-2[x]-2$ $=2(\underbrace{x-[x]}_{\substack{0\le\ <1\\ 0\le\ <2\\ -2\le\ <0}})-2 \xrightarrow{\text{برد}} [-2,0)$
طرفین‌وسطین	باید x^2 ، $\sqrt{x}$ ، $\lvert x\rvert$ ، $\sin x$ ، $\cos x$ یا ... را تنها کنیم و بعد عبارت سمت راست تساوی را در بازه‌ای محدود کنیم.	$y=\frac{x^2+1}{x^2+4} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} x^2y+4y-x^2-1=0$ $\Rightarrow x^2(y-1)=-4y+1 \Rightarrow x^2=\frac{-4y+1}{y-1}$ $\xrightarrow{x^2\ge 0} \frac{-4y+1}{y-1}\ge 0 \xrightarrow[\text{(برد)}]{\text{تعیین علامت}} \frac{1}{4}\le y<1$
استفاده از یکنوایی	$D_f=[a,b] \xrightarrow[\text{و پیوسته}]{\text{f صعودی}} R_f=[f(a),f(b)]$ $D_f=[a,b] \xrightarrow[\text{و پیوسته}]{\text{f نزولی}} R_f=[f(b),f(a)]$	$f(x)=\underbrace{x^3+2x}_{\text{اکیداً صعودی}} \xrightarrow{D_f=[1,3]} R_f=[\underbrace{f(1)}_{3},\underbrace{f(3)}_{33}]$

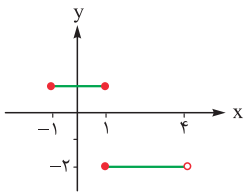
۲ توابعی که بردشان را باید بلد باشیم:

تابع	ضابطه	برد	مثال	جواب برد مثال
خطی ($a \neq 0$)	$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$
چندجمله‌ای درجهٔ فرد		$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$
سهمی ($a > 0$)	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$[y_S, +\infty)$		$[-4, +\infty)$
سهمی ($a < 0$)	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$(-\infty, y_S]$		$(-\infty, 1]$
لگاریتمی	$f(x) = \log_a x$	$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$
نمایی	$f(x) = a^x + b$	$(b, +\infty)$		$(-1, +\infty)$
هموگرافیک	$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$	$y = \frac{2x-1}{3x+1}$	$\mathbb{R} - \{\frac{2}{3}\}$
گلدانی	$f(x) = \lvert x-a \rvert + \lvert x-b \rvert$	$[\lvert b-a \rvert, +\infty)$		$[3, +\infty)$

تابع	ضابطه	برد	مثال	جواب برد مثال
آبشاری	$f(x)=\|x-a\|-\|x-b\|$	$[-\|b-a\|,\|b-a\|]$		$[-۳,۳]$
نیم‌دایره به شعاع R و مرکز مبدأ	$f(x)=\sqrt{R^۲-x^۲}$	$[۰,R]$		$[۰,۲]$

جزء صحیح

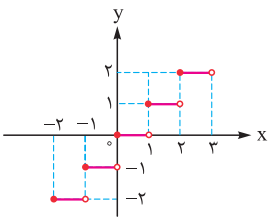
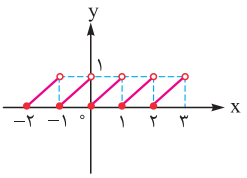
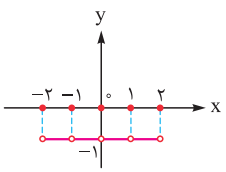
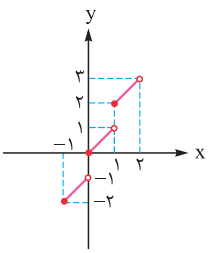
۱ تابع پله‌ای:

تعریف	توابع چندضابطه‌ای که همهٔ ضابطه‌هایش یک تابع ثابت است.
نمودار	از تعدادی پاره‌خط افقی تشکیل شده است.
مثال	$f(x)=\begin{cases}۱ & -۱\le x<۱\\ -۲ & ۱\le x<۴\end{cases}$
شکل	

۲ تعریف جزء صحیح یا براکت:

تعریف	جزء صحیح هر عدد صحیح، خودش می‌شود: $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]=x$
	جزء صحیح هر عدد غیرصحیح، عدد صحیح ماقبل آن می‌شود: $k\le x<k+۱\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}[x]=k$

۳ نمودارهای مهم توابع براکتی:

ضابطه	$y=[x]$	$y=x-[x]$	$y=[x]+[-x]$	$y=x+[x]$
نمودار				
برد	$\mathbb{Z}$	$[۰,۱)$	$\{-۱,۰\}$	$\cdots\cup[۰,۱)\cup[۲,۳)\cup\cdots$

۴ ویژگی‌های مهم براکت:

۱	$[u]\in\mathbb{Z}$
۲	$[u]=k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le u<k+1$
۳	$0\le u-[u]<1$
۴	$[u]+[-u]=\begin{cases}0 & u\in\mathbb{Z}\\ -1 & u\notin\mathbb{Z}\end{cases}$
۵	$k\in\mathbb{Z}\Rightarrow [u\pm k]=[u]\pm k$
۶	$[2u]=[u]+[u+\frac{1}{2}]$

۵ برای پیداکردن برد عبارت‌هایی به فرم $u-a[\frac{u}{a}]$، ابتدا از a فاکتور می‌گیریم، بعد از ویژگی سوم جدول بالا استفاده می‌کنیم.

مثال برد تابع $f(x)=x-2[\frac{x}{2}]+3$ ؟

پاسخ

$$\underbrace{0\le \frac{x}{2}-[\frac{x}{2}]<1}_{\text{طبق نکتهٔ ۳ جدول بالا}} \xrightarrow{\times 2} 0\le x-2[\frac{x}{2}]<2 \xrightarrow{+3} 3\le f(x)<5$$

۶ برای رسم تابع $y=a[bx]$، طول بازه‌ها را $\frac{1}{|b|}$ انتخاب می‌کنیم. مثلاً برای رسم تابع $f(x)=3[2x]$، طول بازه‌ها را $\frac{1}{2}$ می‌گیریم و بازه‌ها به شکل $[\frac{-1}{2},0),[0,\frac{1}{2}),[\frac{1}{2},1),\ldots$ می‌شوند.