

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

رشته ریاضی

مرحله ششم

پایه دوازدهم

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضیات گسسته	ریاضیات گسسته دوازدهم فصل ۱ - درس ۱ - صفحه ۱ تا ۸	۲	۳	سروش موئینی	بردیا نصیری مهدی خوشنویس

شروع دوازدهم از مهر



استدلال ریاضی

مثال نقض -

روش استفاده: با یک مثال نشان دهیم حکم کلی نادرست است.

مثال نقض	حکم نادرست
$n = 5$ (عدد $2^{32} + 1$ به 641 می‌خورد).	$2^{3n} + 1$ اول است.
اعداد 2^k (مثل $4, 8, \dots$)	هر عدد طبیعی $n > 2$ جمع اعداد متوالی است.
$\mathbb{Z} \cup W = \mathbb{Z} \cup N \not\Rightarrow W = N$	$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$
$x = \frac{1}{2}$	$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq x$
مثلث با یک زاویه باز	ارتفاع مثلث درون آن است.
$\sqrt{2} + \underbrace{(1 - \sqrt{2})}_{\text{گنگ}} = 1$	جمع دو عدد گنگ، گنگ است.
$0 \times \sqrt{3} = 0$	ضرب عدد گویا در گنگ، گنگ است.
$n = 3 \Rightarrow 4^3 + 1 = 65$	عدد $4^n + 1$ اول است.
$12 \nmid 6^2$	اگر مربع عددی به 12 بخش پذیر باشد، خود عدد هم به 12 بخش پذیر است.
$10 \nmid 4 \times 5$	اگر $a \mid bc$ ، آن گاه $a \mid b$ یا $a \mid c$.

اثبات مستقیم -

روش کار: با مدل سازی ریاضی، از فرض شروع می‌کنیم و با طی مراحل ریاضی به حکم می‌رسیم.

بیان صورت حکم	عدد طبیعی	عدد زوج	عدد فرد	دو عدد متوالی	دو عدد فرد متوالی	دو عدد زوج متوالی
بیان ریاضی	n	$2k$	$2k+1$	$n, n+1$	$2k+1$ و $2k-1$	$2k+2$ و $2k$

حکم‌های مهم که با استنتاج (اثبات مستقیم) ثابت می‌شوند:

- مربع هر عدد فرد از مضرب 8 یک واحد بیشتر است.
- جمع سه عدد متوالی مضرب 3 است.
- جمع دو عدد فرد متوالی مضرب 4 است.
- اگر k ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد $4k+1$ مربع کامل است.

بررسی تمام حالات -

روش کار: در مسائلی که حالت‌های محدودی داریم، مثلاً زوج یا فرد یا مثلاً باقی‌مانده بر 3 که می‌تواند 0 یا 1 یا 2 باشد، تمامی حالت‌ها را بررسی می‌کنیم.

حکم‌های مهمی که با این روش اثبات می‌شوند:

- اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، آن گاه باقی‌مانده تقسیم n بر 4 ، یا صفر یا 3 است.
- مربع هر عدد یا مضرب 9 است یا به صورت $4q+1$ (هیچ مربع کاملی $2+3q$ نیست).
- هر عدد اول $p > 5$ به صورت $6k \pm 1$ است.
- اگر ab فرد باشد، $a+b$ زوج است.



- برهان خلف -

شیوه اثبات، استفاده از هم‌ارزی ($p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$)

مراحل استدلال: فرض می‌کنیم حکم درست نیست و نشان می‌دهیم که با این فرض به تناقض می‌رسیم، پس خود حکم باید درست باشد. این روش اثبات غیرمستقیم است.

احکامی که با برهان خلف ثابت می‌شوند:

۱) $\sqrt{2}$ گنگ است.

۲) اگر β و α گنگ و $\alpha + 2\beta$ گویا باشد، $\alpha - \beta$ گنگ است.

۳) اگر x گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ هم گنگ است.

۴) اگر n^2 مضرب ۳ باشد n هم مضرب ۳ است.

۵) اگر اعداد x_1, x_2, x_3 و y_1, y_2, y_3 همان اعداد، ولی به ترتیب دیگری باشند، آن‌گاه $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)(x_3 - y_3)$ حتماً زوج است.

۶) جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، گنگ است.

۷) اگر عدد مثبت x گنگ باشد، \sqrt{x} هم گنگ است.

- اثبات بازگشتی -

روش اثبات: از خود حکم شروع می‌کنیم و با طی مراحل ریاضی برگشت‌پذیر، به رابطه‌ای می‌رسیم. اگر این رابطه همواره درست باشد، خود حکم هم درست است. اگر این رابطه درست نباشد، خود حکم هم درست نیست.

احکامی که بازگشتی اثبات می‌شوند:

۱) $a, b > 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

۲) $ab > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

۳) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$

۴) $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$

۵) رابطه $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ برای دو عدد مثبت x و y همواره درست نیست.