مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳

رشته تجربی

پایه یازدهم | مرحله اول

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
ریاضی(۲)	فصل ۱ (درس ۱ و ۲) صفحهٔ ۱ تا ۱۸	۲	۸	علی شهرابی	صادق محمدی محسن فراهانی

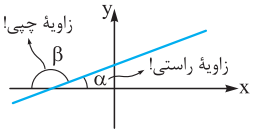
ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴

هندسهٔ تحلیلی

۱ شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ A و B:

$$\text{شیب} = \frac{\text{اختلاف y ها}}{\text{اختلاف x ها}} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

۲ تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، همان شیب است: $m = \tan\alpha$

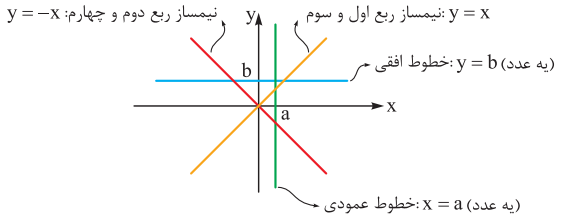


۳ اگر سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط (یا راستا یا امتداد) باشند، آن‌گاه: $m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$

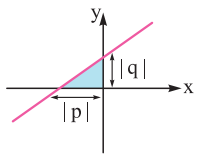
۴ نوشتن معادلهٔ خط در چند حالت پرکاربرد:

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ با شیب m	$y - y_\circ = m(x - x_\circ)$
معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ h	$y = mx + h$
معادلهٔ خط با طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q	$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = ۱$

۵ معادلهٔ خطوط خاص:



۶ مساحت مثلثی که هر خط با محورهای مختصات می‌سازد: $S = \frac{|\text{عرض از مبدأ} \times \text{طول از مبدأ}|}{۲} = \frac{|p.q|}{۲}$



۷ برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط، باید یک دستگاه دو معادله ـ دو مجهول حل کنیم.

۸ وضعیت دو خط نسبت به هم:

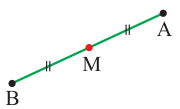
حالات دو خط نسبت به هم	شرط	مثال
موازی (غیرمنطبق)	$m_۱ = m_۲ , h_۱ \neq h_۲$	$y = ۳x + ۴$ $y = ۳x - ۲$
عمود	$m_۱ = \frac{-۱}{m_۲}$ یا $m_۱ m_۲ = -۱$	$y = \frac{۳}{۴}x + ۱$ $y = \frac{-۴}{۳}x + ۲$
متقاطع	$m_۱ \neq m_۲$	$y = x - ۱$ $y = ۳x + ۴$
منطبق	$m_۱ = m_۲ , h_۱ = h_۲$	$y = ۲x + ۵$ $۲y = ۴x + ۱۰$

۹ فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B:

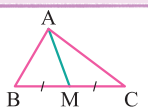
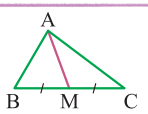
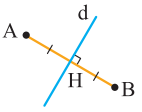
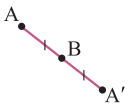
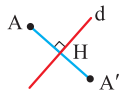
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(\text{اختلاف xها})^۲ + (\text{اختلاف yها})^۲}$$

۱۰ نقطهٔ وسط پاره‌خط AB:

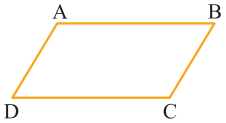
$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right)$$



۱۱ کاربردهای نقطهٔ وسط یک پاره‌خط در سؤالات:

	شکل	مراحل محاسبه یا توضیح
معادلهٔ میانه در مثلث		۱) پیداکردن مختصات M ۲) نوشتن معادلهٔ خط گذرنده از A و M
طول میانهٔ مثلث		۱) پیداکردن مختصات M ۲) محاسبهٔ طول پاره‌خط AM
معادلهٔ عمودمنصف		۱) پیداکردن مختصات H ۲) محاسبهٔ شیب d: $m_d = \frac{-۱}{m_{AB}}$ ۳) نوشتن معادلهٔ خط d
قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ B		B وسط A و A′ است: $B = \frac{A+A'}{۲} \Rightarrow A' = ۲B - A$
قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط d		۱) معادلهٔ AH را می‌نویسیم (با داشتن نقطهٔ A و شیب AH که قرینه و معکوس شیب d است). ۲) محاسبهٔ H (با تقاطع AH و d) ۳) محاسبهٔ A′: $A' = ۲H - A$

۱۲ رابطهٔ بین رئوس متوازی‌الاضلاع:

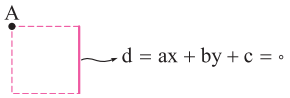
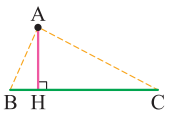
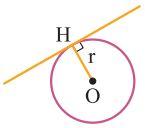


$$\xrightarrow{\text{رئوس روبه‌رو}} \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \xrightarrow{\text{خلاصه‌تر!}} A + C = B + D$$

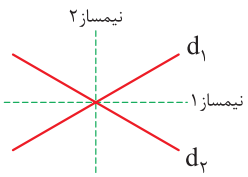
۱۳ فاصلهٔ نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$:

$$\frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

۱۴ کاربردهای فاصلهٔ نقطه از خط در سؤالات:

مقدار قابل محاسبه	شکل	توضیح
ضلع مربع		فاصلهٔ A تا خط d = ضلع
قطر مربع		فاصلهٔ A تا قطر = نصف قطر
ارتفاع مثلث		فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC = طول ارتفاع AH
شعاع دایره		فاصلهٔ مرکز تا خط مماس = شعاع

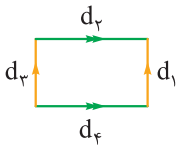
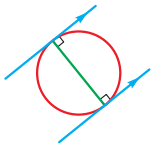
۱۵ معادلهٔ نیمسازهای دو خط $ax + by + c = ۰$ و $a'x + b'y + c' = ۰$:



$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^۲ + b'^۲}}$$

۱۶ فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$: $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

۱۷ کاربردهای فاصلهٔ دو خط موازی در سؤالات:

	شکل	توضیح
مربع		فاصلهٔ d_1 تا d_2 = ضلع مربع
مستطیل		فاصلهٔ d_1 تا d_3 = طول فاصلهٔ d_2 تا d_4 = عرض
دایره		فاصلهٔ دو خط مماس موازی = قطر

۱۸ خطی که از دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ به یک فاصله است: $ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$

معادلهٔ درجه‌دو

۱ ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, \Delta=b^2-4ac$

۲ تعداد ریشه‌ها:

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
ریشهٔ حقیقی ندارد.	یک ریشهٔ مضاعف ↓ $x_{\text{مضاعف}}=\frac{-b}{2a}$	۲ ریشهٔ متمایز

۳ اگر عبارت درجه‌دومی، مربع کامل باشد، دلتایش صفر است.

۴ دو حالت خاص پرکاربرد:

رابطهٔ بین ضرایب	ریشه‌ها	مثال
$a+b+c=0$	$1, \frac{c}{a}$	$3x^2-8x+5=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{5}{3} \end{cases}$
$a+c=b$	$-1, \frac{-c}{a}$	$5x^2-7x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{12}{5} \end{cases}$

۵ با شرط $\Delta>0$ داریم:

جمع ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	اختلاف ریشه‌ها	مجموع مربع ریشه‌ها	مجموع مکعب ریشه‌ها
$S=\frac{-b}{a}$	$P=\frac{c}{a}$	$M=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$x_1^2+x_2^2=S^2-2P$	$x_1^3+x_2^3=S^3-3SP$

۶ اگر حاصل عباراتی مثل $\sqrt{x_1}\pm\sqrt{x_2}$ را خواستید حساب کنید، آن را مساوی A قرار دهید و طرفین را به توان ۲ برسانید.

۷ معادلهٔ درجه‌دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل‌ضرب آن‌ها P باشد، به صورت $x^2-Sx+P=0$ است.

۸ بحث روی علامت ریشه‌ها: مثلاً وقتی قرار است معادله دو ریشهٔ منفی متمایز داشته باشد، باید سه نامعادلهٔ $\Delta > 0$، $S < 0$ و $P > 0$ را حل کنیم و بین جواب‌هایشان اشتراک بگیریم.

		Δ	S	P
۱	دو ریشهٔ مثبت متمایز	+	+	+
۲	دو ریشهٔ منفی متمایز	+	−	+
۳	دو ریشهٔ ناهم‌علامت	$\Delta \geq 0$		$P \leq 0$
۴	دو ریشهٔ قرینه	+	۰	−
۵	دو ریشهٔ معکوس	+		۱

۹ اگر $P < 0$ باشد (یا a و c هم‌علامت نباشند)، حتماً $\Delta > 0$ است و نیازی به چک‌کردن شرط $\Delta > 0$ نیست.

۱۰ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (با شرط $a \neq 0$) با تغییر متغیر $x^2 = t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax^4 + bx^2 + c = 0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2 + bt + c = 0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۴	دو ریشهٔ مثبت	$\Delta > 0, S > 0, P > 0$
۳	یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر	$c = 0, \frac{-b}{a} > 0$
۲	حالت ۱: یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P < 0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta = 0, \frac{-b}{a} > 0$
۱	یک ریشهٔ صفر	$b = c = 0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی	$\Delta > 0, S < 0, P > 0$
	حالت ۲: یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta = 0, \frac{-b}{a} < 0$
	حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta < 0$

۱۱ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ یا هر معادله‌ای که همهٔ توان‌های x در آن زوج باشد، صفر است. مثلاً در معادله‌های $2x^4 - 7x^2 + 1 = 0$ و $x^8 - 4x^6 + 2x^2 = 0$، مجموع ریشه‌ها صفر است. (توان‌های زوج اعداد قرینه با هم برابر و مجموع آن‌ها صفر است.)

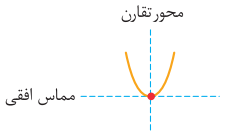
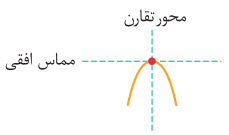
۱۲ تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ (با شرط $a \neq 0$) با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$:

تعداد جواب معادلهٔ $ax + b\sqrt{x} + c = 0$	جواب‌های معادلهٔ $at^2 + bt + c = 0$ باید چه‌جوری باشن؟	شروط
۲	حالت (۱) دو ریشهٔ مثبت	$\Delta > 0, S > 0, P > 0$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ صفر	$c = 0, \frac{-b}{a} > 0$
۱	حالت (۱) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی	$P < 0$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مضاعف مثبت	$\Delta = 0, \frac{-b}{a} > 0$
	حالت (۳) یک ریشهٔ صفر	$b = c = 0$
بدون جواب	حالت (۱) هر دو ریشه منفی	$\Delta > 0, S < 0, P > 0$
	حالت (۲) یک ریشهٔ مضاعف منفی	$\Delta = 0, \frac{-b}{a} < 0$
	حالت (۳) فاقد ریشه	$\Delta < 0$

۱۳ برای حل معادلهٔ درجه‌سوم، اول یک ریشه را از بین اعداد ۱± و ۲± حدس می‌زنیم (مثلاً $x = a$ شد). بعد عبارت درجه‌سوم را بر $x - a$ تقسیم می‌کنیم و معادلهٔ درجه‌سوم اولیه را به شکل $(x - a)(\text{درجه}۲) = ۰$ درمی‌آوریم که حلش را بلدیم.

تابع درجه‌دو (سهمی)

۱ با توجه به علامت a، سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ دوتا شکل می‌تواند داشته باشد:

	قیافه	طول رأس	عرض رأس	محور تقارن	مماس افقی	مقدار min یا max	برد
$a > ۰$		$\frac{-b}{۲a}$	$\frac{-\Delta}{۴a}$ یا $f(\frac{-b}{۲a})$	$x = \frac{-b}{۲a}$	$y = \frac{-\Delta}{۴a}$	$\min = \frac{-\Delta}{۴a}$	$[\frac{-\Delta}{۴a}, +\infty)$
$a < ۰$						$\max = \frac{-\Delta}{۴a}$	$(-\infty, \frac{-\Delta}{۴a}]$

۲ تنها نقطه‌ای از سهمی که با حذف آن برد تغییر می‌کند، رأس سهمی است.

۳ اگر دو نقطه با yهای یکسان در سهمی داشته باشیم، میانگین xهایشان، x رأس را می‌دهد. از این جمله می‌توانیم نتیجه بگیریم میانگین ریشه‌های سهمی، x رأس است.

۴ اگر $ax + by = c$ باشد($ab > ۰$)، زمانی xy ماکزیمم است که ax و by هر دو برابر با $\frac{c}{۲}$ باشند؛ مثلاً اگر $۳x + ۲y = ۱۲$ باشد و ماکزیمم xy را بخواهیم، باید $۳x = ۶$ و $۲y = ۶$ باشد (که $x = ۲$ و $y = ۳$ و در نتیجه $xy = ۶$ را نتیجه می‌دهد).

۵ منظور از صفرهای تابع $f(x)$، «طول نقاط برخورد تابع f با محور xها» یا «جواب‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$» است.

۶ نوشتن سریع معادلهٔ سهمی:

	چیزهایی که داریم	ضابطهٔ سهمی	نکتهٔ تکمیلی
۱	$x_۱$ و $x_۲$ صفرهای سهمی‌اند.	$y = a(x - x_۱)(x - x_۲)$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲	نقطهٔ (x_S, y_S) رأس سهمی است.	$y = a(x - x_S)^۲ + y_S$	برای محاسبهٔ a، یک نقطهٔ دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳	سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله ـ سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.	اگر نقطه‌ای به مختصات $(۰, c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.

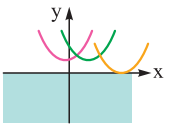
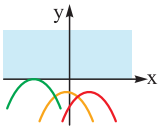
۷ اگر سهمی در نقطهٔ $(\alpha, ۰)$ بر محور xها مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید: $y = a(x - \alpha)^۲$

۸ علامت ضرایب a، b و c:

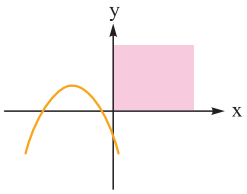
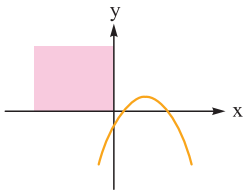
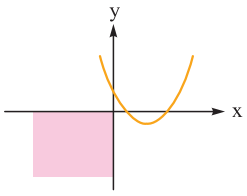
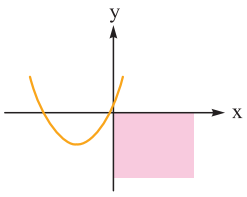
علامت a	علامت b	علامت c
دهانهٔ سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور yها	عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها

۹ سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات:

حالت ۱: سهمی فقط از ۲ ناحیه عبور کند.

		شکل	شرایط	
			a	Δ
۱	سهمی فقط از ناحیهٔ ۱ و ۲ عبور کند.		+	$\Delta \leq 0$
۲	سهمی فقط از ناحیهٔ ۳ و ۴ عبور کند.		−	$\Delta \leq 0$

حالت ۲: سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند):

		شکل	شرایط			
			a	b	c	Δ
۱	فقط از ناحیهٔ ۱ نگذرد.		−	−	−	+
۲	فقط از ناحیهٔ ۲ نگذرد.		−	+	−	+
۳	فقط از ناحیهٔ ۳ نگذرد.		+	−	+	+
۴	فقط از ناحیهٔ ۴ نگذرد.		+	+	+	+

c می‌تواند صفر هم باشد.

حالت ۳: سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند $\xleftarrow{\text{فقط کافیه که}}$ $P < 0$

۱۰ شرط آن‌که سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند آن است که سهمی دو ریشهٔ هم‌علامت داشته باشد: $\Delta > 0$ و $P \geq 0$

۱۱ وضعیت خط و سهمی نسبت به هم: معادلهٔ $\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{سهمی}}=\underbrace{mx+h}_{\text{خط}}$ را تشکیل می‌دهیم. بعد آن را به صورت $ax^2+b'x+c'=0$ درمی‌آوریم. دلتای این معادله، وضعیت خط و سهمی را مشخص می‌کند.

علامت Δ	وضعیت خط و سهمی	شکل
$\Delta>0$	سهمی و خط در ۲ نقطه متقاطع‌اند.	
$\Delta=0$	خط در یک نقطه بر سهمی مماس است.	
$\Delta<0$	سهمی و خط، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.	