

مرورنامہ آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

رشته ریاضی

مرحله اول

پایه یازدهم

نام درس	مباحث	از صفحه	تا صفحه	مؤلف	ویراستار
حسابان (۱)	فصل ۱ (درس ۱ و ۲) صفحه ۱ تا ۱۶	۲	۶	علی شهبازی	مهدی خوشنویس ابوالفضل ناصری

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۴



مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی

۱) مجموع n جمله اول جملات دنباله حسابی و هندسی:

مثال	مجموع n جمله اول	دنباله
$2, 5, 8, 11, \dots$ $\xrightarrow{\text{مجموع } 20 \text{ جمله اول}} S_{20} = \frac{20}{2} [2(2) + (20-1)3]$ $= 10 [4 + 57] = 610$	$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$ یا $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$	حسابی
$4, 12, 36, \dots$ $\xrightarrow{\text{مجموع } 5 \text{ جمله اول}} S_5 = \frac{4(3^5 - 1)}{3 - 1} = 2 \times 242 = 484$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$	هندسی

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲) مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۳) مجموع مربع اعداد طبیعی از ۱ تا n :

$$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{\text{مثال}} a_n = S_n - S_{n-1}$$

۴) محاسبه a_n از روی S_n :

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n + 1 \xrightarrow{\text{مثال}} \frac{S_{12}}{S_6} = q^6 + 1$$

۵) نسبت مجموع $2n$ جمله اول به n جمله اول دنباله هندسی:



معادله درجه دو

۱ ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

۲ تعداد ریشه‌ها:

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
۲ ریشه متمایز	یک ریشه مضاعف \downarrow $x_{\text{مضاعف}} = -\frac{b}{2a}$	ریشه حقیقی ندارد.

۳ اگر عبارت درجه دومی، مربع کامل باشد، دلتایش صفر است.

۴ دو حالت خاص پرکاربرد:

رابطه بین ضرایب	ریشه‌ها	مثال
$a + b + c = 0$	$1, \frac{c}{a}$	$3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$
$a + c = b$	$-1, -\frac{c}{a}$	$5x^2 - 7x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{12}{5} \end{cases}$

۵ با شرط $\Delta > 0$ داریم:

جمع ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	اختلاف ریشه‌ها	مجموع مربع ریشه‌ها	مجموع مکعب ریشه‌ها
$S = -\frac{b}{a}$	$P = \frac{c}{a}$	$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$	$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$	$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$

۶ اگر حاصل عباراتی مثل $\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_2}$ را خواستید حساب کنید، آن را مساوی A قرار دهید و طرفین را به توان ۲ برسانید.

۷ معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل ضرب آن‌ها P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

۸ بحث روی علامت ریشه‌ها: مثلاً وقتی قرار است معادله دو

ریشه منفی متمایز داشته باشد، باید سه نامعادله $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ را حل کنیم و بین جواب‌هایشان اشتراک بگیریم.

P	S	Δ		
+	+	+	۱	دو ریشه مثبت متمایز
+	-	+	۲	دو ریشه منفی متمایز
$P \leq 0$	+	+	۳	دو ریشه ناهم علامت
-	۰	+	۴	دو ریشه قرینه
۱	+	+	۵	دو ریشه معکوس

۹ اگر $P < 0$ باشد (یا a و c هم علامت نباشند)، حتماً $\Delta > 0$ است و نیازی به چک کردن شرط $\Delta > 0$ نیست.

۱۰ منظور از صفرهای تابع $f(x)$ ، «طول نقاط برخورد تابع f با محور xها» یا «جواب‌های معادله $f(x) = 0$ » است.

۱۱ نوشتن سریع معادله سهمی:

چیزهایی که داریم.	ضابطه سهمی	نکته تکمیلی
۱ x_1 و x_2 صفرهای سهمی‌اند.	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	برای محاسبه a، یک نقطه دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۲ نقطه (x_S, y_S) رأس سهمی است.	$y = a(x - x_S)^2 + y_S$	برای محاسبه a، یک نقطه دیگر را در سهمی صدق می‌دهیم.
۳ سه نقطه از سهمی	با حل سه معادله - سه مجهول، ضرایب را پیدا می‌کنیم.	اگر نقطه‌ای به مختصات $(0, c)$ داشتیم، از آن شروع می‌کنیم.



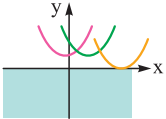
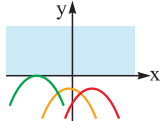
۱۲ اگر سهمی در نقطه $(\alpha, 0)$ بر محور x مماس بود، می‌توانید از هر دو حالت ۱ و ۲ در جدول بالا کمک بگیرید: $y = a(x - \alpha)^2$

۱۳ علامت ضرایب a ، b و c :

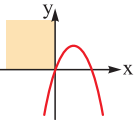
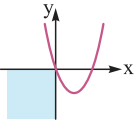
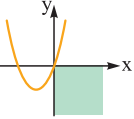
علامت a	علامت b	علامت c
با دهانه سهمی	شیب خط مماس بر سهمی در محل برخورد با محور y ها	عرض نقطه برخورد سهمی با محور y ها

۱۴ سهمی در نواحی مختلف دستگاه مختصات:

حالت ۱: سهمی فقط از ناحیه ۲ عبور کند.

شرایط		شکل	
Δ	a		
$\Delta \leq 0$	+		۱ سهمی فقط از ناحیه ۱ و ۲ عبور کند.
$\Delta \leq 0$	-		۲ سهمی فقط از ناحیه ۳ و ۴ عبور کند.

حالت ۲: سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند (فقط از یک ناحیه عبور نکند).

شرایط						
Δ	c	b	a	شکل		
+	-	-	-		فقط از ناحیه ۱ نگذرد.	۱
+	-	+	-		فقط از ناحیه ۲ نگذرد.	۲
+	+	-	+		فقط از ناحیه ۳ نگذرد.	۳
+	+	+	+		فقط از ناحیه ۴ نگذرد.	۴

c می‌تواند صفر هم باشد.

حالت ۳: سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند. فقط کافیست که $P < 0$

۱۵ شرط آن که سهمی دقیقاً از ۳ ناحیه عبور کند، آن است که سهمی دو ریشه هم‌علامت داشته باشد: $\Delta > 0$ و $P \geq 0$.



درجه ۲

۱۶ حل معادلات درجه ۳ که عامل $x - a$ دارند: $f(x) = 0$

مرحله ۱	جای x اعداد $1, -1, 2$ و -2 را قرار می‌دهیم تا ببینیم به ازای کدامشان تساوی برقرار است.
مرحله ۲	اگر به ازای $x = a$ ، تساوی برقرار شد، عبارت را به $x - a$ تقسیم می‌کنیم: عبارت درجه ۲ عبارت درجه ۳: $\frac{x-a}{\vdots}$ ۰
مرحله ۳	معادله درجه سوم اولیه را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم: $(x-a)(\text{عبارت درجه ۲}) = 0$
مرحله ۴	از حل دو معادله روبه‌رو، جواب‌های معادله به دست می‌آیند: $\begin{cases} x-a=0 \\ \text{عبارت درجه ۲}=0 \end{cases}$

۱۷ تعداد جواب‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (با شرط $a \neq 0$) با تغییر متغیر $x^2 = t$:

تعداد جواب معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$	جواب‌های معادله $at^2 + bt + c = 0$ باید چه جوری باشند؟	شروط
۴	دو ریشه مثبت	$\Delta > 0, S > 0, P > 0$
۳	یک ریشه مثبت و یک ریشه صفر	$c = 0, \frac{-b}{a} > 0$
۲	حالت ۱: یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی حالت ۲: یک ریشه مضاعف مثبت	$P < 0$ $\Delta = 0, \frac{-b}{a} > 0$
۱	یک ریشه صفر	$b = c = 0$
بدون جواب	حالت ۱: هر دو ریشه منفی حالت ۲: یک ریشه مضاعف منفی حالت ۳: فاقد ریشه	$\Delta > 0, S < 0, P > 0$ $\Delta = 0, \frac{-b}{a} < 0$ $\Delta < 0$

۱۸ مجموع ریشه‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ یا هر معادله‌ای که همه توان‌های x در آن زوج باشد، صفر است. (اگر $x = a$ جواب باشد،

$x = -a$ هم جواب است؛ درواقع توان‌های زوج اعداد قرینه باهم برابر و مجموع آن‌ها صفر است.)

مثلاً در معادله‌های $2x^4 - 7x^2 + 1 = 0$ و $x^4 - 4x^2 + 2x^2 = 0$ ، مجموع ریشه‌ها صفر است.



روش هندسی (نموداری)

۱ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط برخورد نمودارهای این دو تابع، جوابهای معادله $f(x) = g(x)$ است و برعکس، یعنی هر جواب معادله $f(x) = g(x)$ ، یکی از نقاط برخورد دو تابع است.

۲ یادآوری انتقال نمودار:

نمودار چه می شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می افتد.
a واحد راست	$f(x - a)$	جای x ها، $x - a$ می گذاریم.
a واحد چپ	$f(x + a)$	جای x ها، $x + a$ می گذاریم.
b واحد بالا	$f(x) + b$	b تا به ضابطه اضافه می کنیم.
b واحد پایین	$f(x) - b$	b تا از ضابطه کم می کنیم.

۳ وضعیت خط و سهمی نسبت به هم: معادله $ax^2 + bx + c = mx + h$ را تشکیل می دهیم. بعد آن را به صورت $ax^2 + b'x + c' = 0$ درمی آوریم. دلتای این معادله، وضعیت خط و سهمی را مشخص می کند.

علامت Δ	وضعیت خط و سهمی	شکل
$\Delta > 0$	سهمی و خط در ۲ نقطه متقاطع اند.	
$\Delta = 0$	خط در یک نقطه بر سهمی مماس است.	
$\Delta < 0$	سهمی و خط، یکدیگر را قطع نمی کنند.	

۴ روش هندسی، تعداد و محدوده تقریبی جوابها را به ما می دهد، ولی جواب دقیق را معمولاً به ما نمی دهد.

۵ در معادلاتی که جنس عبارت های دو طرف تساوی، مثل هم نیست، معمولاً سراغ روش هندسی می رویم.

مثلاً در معادله های $\sin x = \log x$ یا $2^x = x^2 - 1$
مثلاثی لگاریتمی نمایی سهمی