

صفات اختصاصی حسابی

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مجموع اعداد متوالی

❖ **مثال:** روی محیط دایره ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

❖ **حل:** نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به دست می آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می کنیم. ۱۷ وتر حاصل می شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با:

$$19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = \frac{19}{2} (1 + 19) = 190$$

تعداد جملات

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

قدرنسبت
جمله اول

مجموع
جملات
دنباله
حسابی

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

جمله آخر
جمله اول

❖ **مثال:** مجموع صد جمله اول دنباله حسابی ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، را به دست آورید.

❖ **حل:** جمله اول ۳، تعداد جمله ها ۱۰۰ و قدرنسبت جملات ۴ است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می توان نوشت:

$$S_{100} = \frac{100}{2} [(2 \times 3) + (99 \times 4)] = 50 \times 402 = 20100$$

$$S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$$

تعداد جمله ها
جمله اول
قدرنسبت

اثبات:

فرض می کنیم مجموع n جمله اولیه دنباله هندسی S_n باشد:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

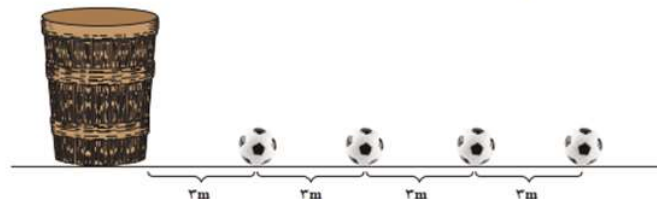
طرفین رابطه را در q ضرب می کنیم:

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

اگر $S_n q - S_n$ را تشکیل دهیم، پس از ساده سازی، نتیجه می گیریم:

$$S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$$

❖ **مثال:** در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سید نیز ۳ متر است (شکل زیر). دوندۀ ای باید از کنار سید شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سید حمل کند و به سید بپردازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سید بپردازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دوندۀ در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سید انداخته است؟



❖ **حل:** دوندۀ برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سید باید مسافت $۳+۳=۶$ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می‌دهد. اگر n تعداد توپ‌های انداخته شده در سید باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \Rightarrow n = 17$$

❖ **مثال:** تویی داریم که از هر ارتفاعی رها شود پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۱۰ متری برسد این توپ پس از چهار بار برخورد با زمین چه مسافتی را طی می‌کند؟

❖ **حل:** ارتفاع توپ قبل از n امین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. داریم:

$$A_1 = 10, A_2 = \frac{1}{4}, A_3 = \frac{1}{16}, \dots, A_n = \frac{1}{4^{n-1}}$$

بنابراین مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین دنباله زیر را تشکیل می‌دهد.

$$20, \frac{20}{4}, \frac{20}{16}, \dots, \frac{20}{4^{n-1}}$$

$$\text{دنباله فوق یک دنباله هندسی با مجموع } S_n = 20 \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} \text{ داریم:}$$

$$S_5 = 20 \times \frac{1 - (\frac{1}{4})^5}{\frac{3}{4}} = \frac{80}{3} \left(1 - (\frac{1}{4})^5\right) = \frac{80}{3} \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = 26 \frac{64}{64} \text{ متر}$$

① جمله عمومی دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ و با آن چند جمله از این

دنباله را با هم جمع تا مجموع آنرا ۲۵۵ شود؟

$$a_1 = 2^0 = 1 \quad a_r = 2^r \rightarrow q = \frac{a_r}{a_1} = 2$$

$$S_n = 255 \rightarrow \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 255 \rightarrow 2^n - 1 = 255$$

$$2^n = 256 \rightarrow n = 8$$

② مجموع حداقل چند جمله از دنباله $1, 3, 5, 7, \dots$ از ۱۰۰ بزرگتر

$$a = 1 \quad d = 2$$

است؟

$$S_n > 100 \rightarrow \frac{n(2 \times 1 + (n-1) \times 2)}{2} > 100 \rightarrow n(2n+1) > 200$$

اگر n را ۸ بگیریم $200 < 8(2 \times 8 + 1) = 136$ و این کمتر است
پس حداقل ۹ جمله باید جمع کنیم

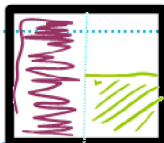
$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2 \quad \text{③ ثابت کنید}$$

این دنباله حسابی با جمله اول ۱ و قدر نسبت ۲ است

$$S_n = \frac{n(1 + 2n-1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

④ مدل ضلع مربعی یک هنداست در هر مرحله اول غیر از مساحت آن را رنگ می‌کنیم
و در هر مرحله از مراحل بعدی نیز از قسمت رنگ شده را رنگ می‌کنیم پس از چند مرحله

حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده؟



$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \dots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{99}{100} \rightarrow 1 - \frac{99}{100} > \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} > \frac{1}{100} \rightarrow n > 7$$

اطلاع رسانی آزمونهای مسجده سلیمان

<https://rubika.ir/azmonkheilisabzmis>

elqasi

۰۹۱۶۶۸۱۷۶۰۲ آدرس: تهران + آدرس: تهران

⑤ برابر عدد حقیقی مخالف یک a و عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

اثبات: دنباله هندسی $a^{n-1}, a^{n-2}, \dots, a^2, a, 1$ را در نظر بگیرید

و مجموع جملات آن را بیابانیم

$$s_n = \frac{1(a^n - 1)}{a - 1} \rightarrow a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1 = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$\rightarrow a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$$

قد ر حلقه

① $\sqrt{a^2} = |a|$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$$

② $|x| = k \rightarrow x = \pm k$
 $k \geq 0$

③ $|x| > k \leftrightarrow \begin{cases} x > k \\ x < -k \end{cases}$
 $k > 0$

④ $|x| < k \leftrightarrow -k < x < k$
 $k > 0$

⑤ $|x| = |a| \Rightarrow x = \pm a$
 $a \in \mathbb{R}$

⑥ $|a||b| = |ab|$

⑦ $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$
 $b \neq 0$

اثبات ⑥
 $|a||b| = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{(ab)^2} = |ab|$

بر همه دو طرف حقیقی

⑧ $-|a| \leq a \leq |a|$: برابر عدد حقیقی a

⑨ $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$

⑩ $|a+b| \leq |a| + |b|$

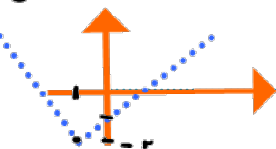
اثبات ⑩ :
برابر عدد حقیقی a و b داریم

$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$$

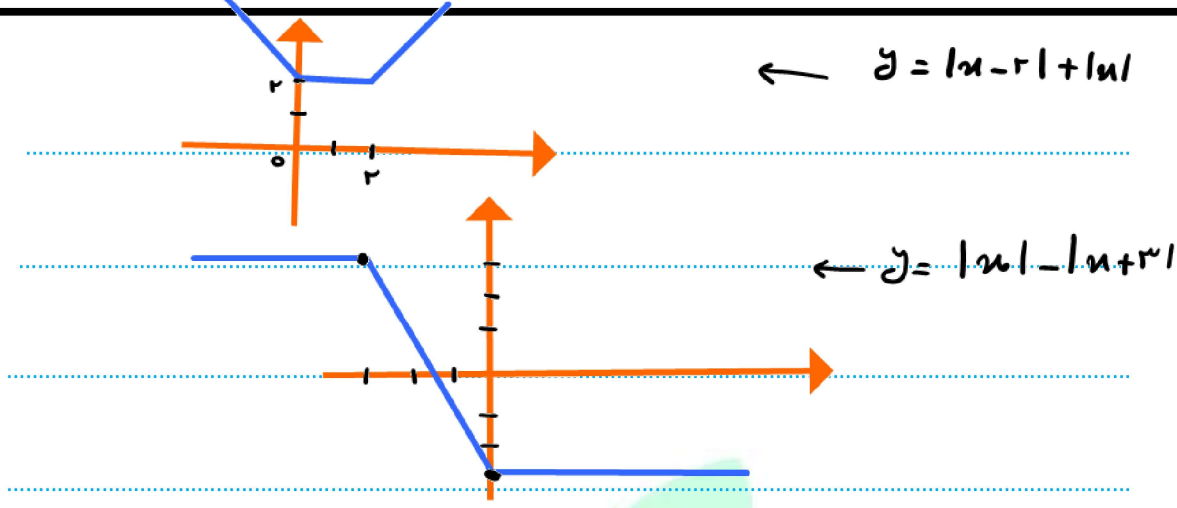
$$|a+b| \leq k \rightarrow |a|+|b| \leq k$$

غدار با: $y = |x-k|+h$ از انتقال غدار $|x|=|x|$ به اندازه k واحد راسته و h واحد بالا

غدار $|x-a|+|x-b|$ شکل: غدار توابع را رسم کنید



غدار $|x-a|-|x-b|$ رسم



* برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم سپس قته زیر محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه کنیم



* برای رسم نمودار $y = f(|x|)$ قته سمت چپ محور x ها را حذف و قرینه نمودار نسبت به محور y ها را جای آن قرار می دهیم



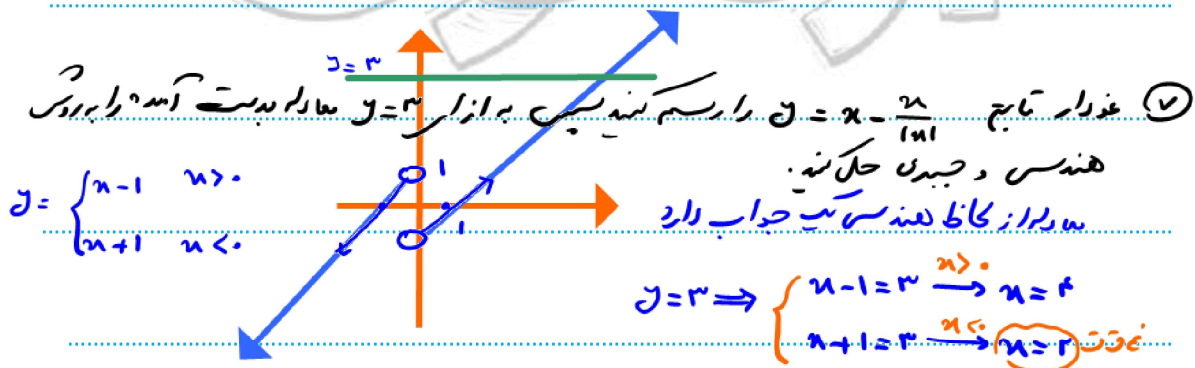
⑥ معادله دنا معادله زیر را حل کنید:

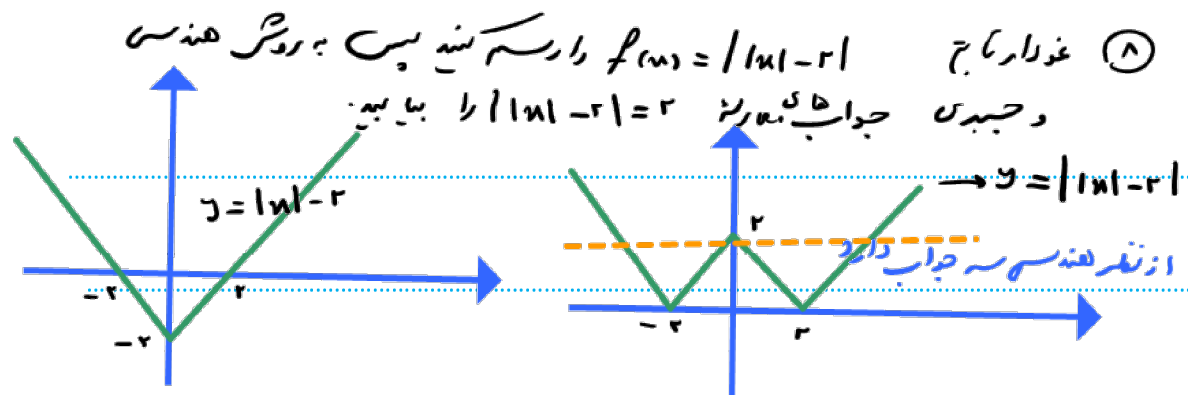
الف) $|x-1| = 4-3x$ ب) $|5x+3| \leq 13$

$x > 1 \rightarrow x-1 = 4-3x \rightarrow 4x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{4}$ $-13 \leq 5x+3 \leq 13$

$x < 1 \rightarrow -x-1 = 4-3x \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2}$ $-16 \leq 5x \leq 10$

غلطی زیرا $\frac{5}{2} > 1$ $-\frac{16}{5} \leq x \leq 2$





حل جبری:

$$|x| - 2 = 2 \rightarrow |x| - 2 = \pm 2$$

$$|x| - 2 = 2 \rightarrow |x| = 4 \rightarrow x = \pm 4$$

$$|x| - 2 = -2 \rightarrow |x| = 0 \rightarrow x = 0$$

ترکیب تابع: اگر f و g دو تابع باشند ترکیب $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
بالاتر از آن تابع g در تابع f جایگزین می‌شود.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

⑨ اگر $f = \{(2, 5), (7, 3), (-1, 4), (4, 9)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 2), (9, -1)\}$

داریم صورت تابع f و g را بنویسید و حاصل
 $(f \circ g)(7) = f(g(7))$ را بیابید.

$$f \circ g = \{(5, 3), (3, 5), (9, 2)\} \quad g \circ f = \{(2, 7), (7, 2), (4, -1)\}$$

$$(g \circ f)(7) = 2 \rightarrow f(2) = 5$$

اطلاع رسانی آزمونهای مسجد سلیمان

<https://rubika.ir/azmonkheilisabzmis>

elqasi

۰۹۱۶۶۸۱۷۶۰۲ آدرس: تهران، علمیه + آزمون های خیمه سبز

① اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x}{x-2}$ داشته باشیم و دامنه و مقابله
 تابع f را بنویسیم $D_f: [-1, +\infty)$ و $D_g: \mathbb{R} - \{2\}$
 $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 2 \mid \frac{x}{x-2} \geq -1\} = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$
 $\frac{x}{x-2} + 1 \geq 0 \rightarrow \frac{x+x-2}{x-2} \geq 0 \rightarrow \frac{x+2}{x-2} \geq 0$ تغییر علامت

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

❖ مثال: مقدار $\sin 75^\circ$ در زیر محاسبه شده است.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

❖ مثال: درستی رابطه $\tan(\frac{\pi}{4} + \theta) = -\cot \theta$ را نشان دهید.

$$\tan(\frac{\pi}{4} + \theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \theta)}{\cos(\frac{\pi}{4} + \theta)} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

(۱۱) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

$$\cos \alpha = \frac{14}{15} \rightarrow \sin \alpha = \frac{9}{15} \xrightarrow{\text{نسبت}} \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{144}{169} \rightarrow \sin \beta = \frac{75}{169} \xrightarrow{\text{نسبت}} \sin \beta = \frac{5}{13}$$

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha+\beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

درناصیه سوم

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5} \times -\frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = -\frac{14}{65}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times -\frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = -\frac{23}{65}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

(۱۲) اگر $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و α درناصیه دوم باشد $\sin \alpha$ و $\cos 2\alpha$ را حساب کنید.

$$\cos \alpha = \frac{9}{15} \rightarrow \sin \alpha = \frac{14}{15} \xrightarrow{\text{نسبت}} \sin \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{5} = -\frac{24}{15}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \frac{9}{15} - 1 = \frac{18}{15} - 1 = \frac{3}{15}$$

(۱۳) نسبت های مثلثاتی زاویه 2π را با $\frac{\pi}{2}$ را حساب کنید.

$$\cos^2 2\pi = \frac{1 + \cos 4\pi}{2} \Rightarrow \cos^2 2\pi = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 2\pi = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin^2 2\pi = \frac{1 - \cos 4\pi}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \rightarrow \sin 2\pi = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

۱۴) نسبت های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{12}$ ، همان ۱۵ را بیا بیه.

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

مسئله نیمه عمر:

فرض کنید Q جرم یک مقدار کربن ۱۴ برحسب گرم با نیمه عمر 5730 سال باشد (یعنی پس از 5730 سال نصف

مقدار معینی از آن از بین می رود). مقدار این کربن بعد از t سال از رابطه $Q(t) = 10 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5730}}$ به دست می آید.
الف) در لحظه $t=0$ داریم $Q(0) = 10 \text{ gr}$ و بعد از 2000 سال داریم

$$Q(2000) = 10 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2000}{5730}} = 7.85 \text{ gr}$$

ب) اگر $t=5730$ ، آن گاه $Q(5730) = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ gr}$ یعنی بعد از 5730 سال، مقدار کربن ۱۴ نصف می شود.

